Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender **SS 13**

Algebraische Geometrie

4. Übungsblatt

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: (2 + 4 + 2 = 8 Punkte) Es seien $X_0, \ldots, X_m$ bzw. $Y_0, \ldots, Y_n$ homogene Koordinaten des $\mathbb{P}_k^m$ bzw. $\mathbb{P}_k^n$, und $Z_{i,j}$, $(i,j) \in \{0, \ldots, m\} \times \{0, \ldots, n\}$ seien homogene Koordinaten des $\mathbb{P}_k^{mn+m+n} = \mathbb{P}_k^{(m+1)(n+1)-1}$. Wir betrachten den Morphismus

$$\varphi : \mathbb{P}_k^m \times \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^{mn+m+n}, \quad ([x_0 : \ldots : x_m], [y_0 : \ldots : y_n]) \mapsto [z_{0,0} : \ldots : z_{m,n}],$$

wobei $z_{i,j} = x_i \cdot z_j$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß φ wohldefiniert und injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß φ eine abgeschlossene Einbettung ist.

(c) Beweisen Sie, daß das Produkt projektiver Varietäten wieder projektiv ist.

Aufgabe 2: (2 + 2 + 3 = 7 Punkte) Seien X, Y Varietäten über k und $f, g : Y \to X$ Morphismen.

(a) Sei X separiert. Zeigen Sie, daß die Menge $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\} \subseteq Y$ abgeschlossen ist.

(b) Sei Y irreduzibel, X separiert und $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge, so daß $f_{|U} = g_{|U}$. Zeigen Sie, daß $f = g$.

(c) Zeigen Sie, daß für separiertes X und affine offene $U, V \subseteq X$ auch $U \cap V \subseteq X$ affin ist.

Aufgabe 3: (4 + 4 = 8 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, in der Faserprodukte existieren. Seien A, B, C, X Objekte von $\mathcal{C}$ und $\alpha : A \to B, \beta : B \to C$ und $f : X \to C$ Morphismen. Zeigen Sie, daß das Faserprodukt $(X \times_C B) \times_B A$ (wobei das äußere Faserprodukt bezüglich der Projektion $p_2 : X \times_C B \to B$ und α gebildet wird) und das Faserprodukt $X \times_C A$ (bezüglich f und $\beta \circ \alpha$) isomorph sind.
Tipp: Blatt 3, Aufgabe 5.

(b) Seien $f : X \to Y, g : Z \to Y$ Morphismen von Varietäten über k, und sei f separiert. Zeigen Sie, daß die Projektion $p_1 : Z \times_Y X \to Z$ separiert ist.