Prof. Dr. S. Orlik
Dr. M. Bender **SS 13**

Algebraische Geometrie

3. Übungsblatt

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: (6 Punkte) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von irreduziblen Varietäten. Zeigen Sie, daß f genau dann dominant ist, wenn für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv ist.

Aufgabe 2: (2 + 2 = 4 Punkte) Sei f der Morphismus

$$\mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^2_k, \quad [p_0 : p_1] \mapsto [p_0^2 : p_0p_1 : p_1^2],$$

Zeigen Sie:

(a) $f(\mathbb{P}^1_k) = V_+(T_1^2 - T_0T_2)$.

(b) Zeigen Sie, daß f eine abgeschlossene Einbettung ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ die lineare Hyperebene gegeben durch $x_n = 0$ und $p = [0 : \ldots : 0 : 1] \in \mathbb{P}^n_k - H$. Wir definieren eine Abbildung

$$\pi : \mathbb{P}^n_k - \{p\} \to H, \quad q \mapsto \pi(q)$$

wie folgt: $\pi(q)$ ist der Schnittpunkt von H mit der *Verbindungsgeraden* $\overline{p,q} \subseteq \mathbb{P}^n_k$ (d.h. $\overline{p,q}$ ist der Durchschnitt aller linearen Hyperebenen in $\mathbb{P}^n_k$, die p und q enthalten). Zeigen Sie, daß π ein Morphismus von Varietäten ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte) In welcher der folgenden Kategorien $\mathcal{C}$ existieren Faserprodukte?

(a) $\mathcal{C}$ = Ringe.

(b) $\mathcal{C}$ = Teilmengen einer gegebenen Menge M, mit $\mathrm{Hom}(U, V) = \emptyset$, falls $U \not\subseteq V$, und $|\mathrm{Hom}(U, V)| = 1$, falls $U \subseteq V$.

(c) $\mathcal{C}$= $\mathbb{R}$-Vektorräume von Dimension gleich 1.

Aufgabe 5: (2 + 3 = 5 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem finalen Objekt e. Zeigen Sie, daß für alle Objekte X, Y aus $\mathcal{C}$ gilt:

$$X \times_e Y \simeq X \times Y.$$

(b) Wir betrachten in einer Kategorie $\mathcal{C}$ die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "d"] \arrow[d, "p_{X'}"'] & X \arrow[dl, "p_X"] \\ S & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "e"] \arrow[d, "p_{Y'}"'] & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\ S & \end{tikzcd} \quad .$$

Zeigen Sie: Falls die Faserprodukte $(X' \times_S Y', p_{X'}, p_{Y'})$, $(X \times_S Y, p_X, p_Y)$ existieren, dann existiert genau ein $\varphi : X' \times_S Y' \to X \times_S Y$ mit $p_X \circ \varphi = d \circ p_{X'}$ und $p_Y \circ \varphi = e \circ p_{Y'}$.