Prof. Dr. S. Orlik **SS 13**
Dr. M. Bender

Algebraische Geometrie

2. Übungsblatt

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1: (2 + 6 = 8 Punkte) Betrachten Sie den Morphismus

$$f : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^2, \quad (x, y) \mapsto (xy, y).$$

(a) Zeigen Sie, daß f dominant ist.

(b) Zeigen Sie, daß $f(\mathbb{A}_k^2)$ keine Untervarietät von $\mathbb{A}_k^2$ ist.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien X, Y irreduzible Varietäten über dem Körper k, $x \in X$ und $y \in Y$ derart, daß es einen Isomorphismus von k-Algebren $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{Y,y}$ gibt. Zeigen Sie, daß es dann offene Untervarietäten $x \in U \subseteq X$, $y \in V \subseteq Y$ gibt, die zueinander isomorph sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und $Y \subseteq k^n$ Zariski-abgeschlossen. Zeigen Sie, daß dann $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ existieren, so daß für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $f : X \to Y$ ein dominanter Morphismus von Varietäten und X irreduzibel. Zeigen Sie, daß Y irreduzibel ist.

Aufgabe 5: (4 Punkte) Sei I eine quasi-angeordnete Menge, die filtrierend ist, d.h. es existiert eine partielle Ordnung $\leq$ auf I, und für alle $i, j \in I$ existiert ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Ferner sei $(M_i, i \in I, f_{i,j} : M_i \to M_j, i \leq j)$ ein induktives System von abelschen Gruppen, d.h. für alle $i \leq j \leq k$ ist $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$. Eine filtrierende Untermenge $J \subseteq I$ heißt kofinal, falls für alle $i \in I$ ein $j \in J$ existiert mit $i \leq j$. Zeigen Sie, daß

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \simeq \varinjlim_{j \in J} M_j.$$