Prof. Dr. S. Orlik **SS 13**
Dr. M. Bender

Algebraische Geometrie

1. Übungsblatt

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Seien $(X_1, \mathcal{O}_{X_1}), (X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ Varietäten über k, $U_1 \subseteq X_1$, $U_2 \subseteq X_2$ offene Teilmengen und $\varphi : U_1 \to U_2$ ein Isomorphismus von Varietäten. Dann existiert eine Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ mit folgenden Eigenschaften:

- Es existiert eine offene Überdeckung $X = Y_1 \cup Y_2$ mit Y_i homöomorph zu X_i, für $i = 1, 2$.
- $\mathcal{O}_X \mid_{Y_i} \simeq \mathcal{O}_{X_i}$, für $i = 1, 2$.

Man nennt diese Konstruktion das Verkleben von X_1 und X_2 entlang U_1 und U_2 vermöge des Isomorphismus φ. Zur Konstruktion:

Sei $Y = X_1 \coprod X_2$ die *disjunkte Vereinigung* der topologischen Räume X_1, X_2, d.h. $X_1 \coprod X_2$ ist versehen mit der feinsten Topologie, welche die Inklusionen $X_i \to X_1 \coprod X_2$ stetig macht. Der Isomorphismus φ induziert eine Äquivalenzrelation auf $X_1 \coprod X_2$: Seien $x_1, x_2 \in X_1 \coprod X_2$:

$$x_1 \sim x_2 :\Longleftrightarrow (\varphi(x_1) = x_2, \quad x_1 \in U_1 \text{ und } x_2 \in U_2) \text{ oder } (x_1 = x_2)$$

Setze $X := X_1 \coprod X_2 / \sim$. Betrachte die Inklusionen $\iota_1 : X_1 \hookrightarrow X$, $\iota_2 : X_2 \hookrightarrow X$. Wir definieren eine Topologie auf X wie folgt: $V \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $\iota_i^{-1}(V) \subseteq X_i$ offen ist, für $i = 1, 2$.
Somit besitzt X eine offene Überdeckung $\{\iota_1(X_1), \iota_2(X_2)\}$, mit $\iota_i(X_i) \simeq X_i$. Da die X_i durch affine algebraische Mengen offen überdeckt sind, gilt dies auch X. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ definiert man wie folgt: Für offenes $V \subseteq X$ sei

$$\mathcal{O}_X(V) := \left\{ (f_1, f_2) \in \bigoplus_{i=1}^{2} \mathcal{O}_{X_i}(\iota_i^{-1}(V)) \mid \varphi^*(f_2 \mid_{\iota_2^{-1}(V) \cap U_2}) = f_1 \mid_{\iota_1^{-1}(V) \cap U_1} \right\}.$$

Aufgabe 1: $(2 + 2 + 2 + 4 = 10$ Punkte) Das Ziel dieser Aufgabe ist es, obige Konstruktion nachzuvollziehen.

(a) Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X_1 \coprod X_2$ definiert.

(b) Zeigen Sie, daß für $i = 1, 2$ die Abbildungen $\iota_i : X_i \hookrightarrow X$ offene Einbettungen sind.

(c) Zeigen Sie, daß X durch affine algebraische Mengen offen überdeckt wird.

(d) Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}_X$ eine Garbe auf X ist, mit $\mathcal{O}_X\mid_{\iota_i(X_i)} \simeq \mathcal{O}_{X_i}$, für $i = 1, 2$.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\mathbb{A}_k^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}_k^n, \quad (x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \ldots : x_n],$$

ein Morphismus von Varietäten ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Es sei $0 \neq f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogen vom Grad 1. Zeigen Sie, daß $D(f)$ eine affine Untervarietät von $\mathbb{P}_k^n$ ist.

Aufgabe 4: (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte) Es sei X ein topologischer Raum, $p \in X$ ein Punkt und G eine abelsche Gruppe.

(a) Seien $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, daß durch

$$G_p(U) := \left\{ \begin{array}{rl} G, & \text{falls } p \in U \\ \{0\}, & \text{falls } p \notin U \end{array} \right\}, \mathrm{res}_{U,V} := \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{id}_G, & \text{falls } p \in V \\ \{0\}, & \text{falls } p \notin V \end{array} \right\},$$

eine Garbe auf X definiert ist.

(b) Berechnen Sie die Halme von G_p.

(c) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Varietät über k und $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Zeigen Sie, daß durch

$$\psi(U) : \mathcal{O}_X(U) \to k_p(U), \quad s \mapsto \left\{ \begin{array}{rl} s(p), & \text{falls } p \in U \\ 0, & \text{falls } p \notin U \end{array} \right\}$$

ein Morphismus von Garben $\psi : \mathcal{O}_X \to k_p$ definiert ist.

(d) Berechnen Sie die Halme von $\ker(\psi)$.