Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz **SoSe 2012**

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

9. Übungsblatt

Abgabe bis zum 18.06.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. ($2 + 2 = 4$ Punkte)

a) Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_0 \neq 0$ und sei $f = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$ eine Zerlegung in Linearfaktoren von f über $\mathbb{C}$, sodass $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n| < 1$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

b) Sei p eine Primzahl und sei

$$f = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X].$$

Zeigen Sie, dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.
(Hinweis. Verwenden Sie die Substitution $X = Y + 1$.)

Aufgabe 2. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei K ein Körper.

a) Sei $f \in K[X]$ mit $d = \deg(f)$. Zeigen Sie, dass $\dim_K(K[X]/(f)) = d$ gilt.

b) Sei L/K ein Erweiterungskörper und sei $a \in L$. Zeigen Sie, dass

$$[K(a) : K] = \deg(\mu_{a,K}(X))$$

gilt.

Aufgabe 3. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei R ein Integritätsbereich und sei $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie:

a) Die Lokalisierung R_S ist ein kommutativer Ring.

b) Die Lokalisierung R_S und der Homomorphismus $i : R \to R_S, r \to \frac{r}{1}$, erfüllen die folgende universelle Eigenschaft:
Zu jedem Ringhomomorphismus $g : R \to T$ mit der Eigenschaft, dass alle Elemente $g(s)$ mit $s \in S$ in T Einheiten sind, faktorisiert eindeutig über R_S, d.h. es existiert genau ein Ringhomomorphismus $g' : R_S \to T$ sodass $g = g' \circ i$.

Aufgabe 4. $(1 + 1 + 2$ Punkte) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit Zwischenkörpern $E/K, F/K$. Zeigen Sie:

a) $[E.F : F] \leq [E : E \cap F]$,

b) $[E.F : K] \leq [E : K][F : K]$,

c) Sind $[E : K], [F : K]$ teilerfremd, so gilt $[EF : K] = [E : K][F : K]$.