Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz

SoSe 2012

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

8. Übungsblatt

Abgabe bis zum 11.06.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. ($2+2=4$ Punkte) Sei R der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Die Elemente $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5} \in R$ sind irreduzibel, erzeugen jedoch jeweils keine Primideale.

b) Das Ideal $\mathfrak{p} = (2, 1+\sqrt{-5}) \subset R$ ist ein Primideal.

Aufgabe 2. ($2+1+1=4$ Punkte)

a) Weisen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome f in dem jeweils angegebenen Polynomring R nach:

   i) $f = X^3 + 27X + 213, R = \mathbb{Q}[X]$;
   ii) $f = X^3 + 6X + 12, R = \mathbb{Q}[X]$;
   iii) $f = X^2 + X + 1, R = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$;
   iv) $f = X^2 + 1, R = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$;
   v) $f = X^3 + X + 1, R = \mathbb{Z}[X]$.

b) Bestimmen Sie alle normierten irreduziblen Polynome vom Grad 3 in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

c) Zerlegen Sie $X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $p = 2, 3, 5$ in ein Produkt irreduzibler Polynome.

Aufgabe 3. $(2 + 2 = 4$ Punkte)

a) Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ und sei $r \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $r \in \mathbb{Z}$ ist.

b) Sei k ein unendlicher Körper und sei $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in k^n$. Zeigen Sie:

i) f ist das Nullpolynom.

ii) Geben Sie für die Aussage i) ein Gegenbeispiel für den Fall an, dass k nur endlich viele Elemente besitzt.

Aufgabe 4. $(1 + 1 + 2$ Punkte)

a) Sei R ein Hauptidealring, seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $d := \mathrm{ggT}(a, b)$ und sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig.
Zeigen Sie, dass $rd = \mathrm{ggT}(ra, rb)$.

b) Zeigen Sie, dass der ggT zweier Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ in $\mathbb{Q}[X]$ derselbe ist, wie ihr ggT in $\mathbb{C}[X]$.

c) Berechnen Sie den ggT der Polynome $2X^3 + 9X^2 + 10X + 3$ und $X^2 - X - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ und in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.