Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz **SoSe 2012**

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

7. Übungsblatt

Abgabe bis zum 04.06.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. ($1 + 2 + 1 = 4$ Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x^n = 0$. Zeigen Sie:

a) Jedes nilpotente Element von R liegt im Durchschnitt aller Primideale von R.

b) Für jedes nilpotente Element $x \in R$ ist $1 + x \in R$ eine Einheit in R.

c) Die Menge aller nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal in R.

Aufgabe 2. ($1+1+2 = 4$ Punkte) Sei R ein kommutativer Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ Ideale. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

b) Es gilt nicht notwendigerweise $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ (es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels!).

c) Aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$ folgt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Aufgabe 3. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ der sog. Ring der ganzen Gaußschen Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ bezüglich der Größenfunktion

$$g : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0, g(a + bi) := a^2 + b^2,$$

ein euklidischer Ring ist.
(**Hinweis:** Suchen Sie für die Verifikation des Divisionsalgorithmus für $u, v \in \mathbb{Z}[i], v \neq 0$, ein Element aus $\mathbb{Z}[i]$, welches zum Quotienten $\frac{u}{v}$ minimalen Abstand hat.)

b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $3 + i$ und $2 + 2i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ heißt *Primelement*, wenn für alle $a, b \in R$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$x \mid ab \Longrightarrow x \mid a \quad \text{oder} \quad x \mid b.$$

Sei nun R ein Hauptidealring. Zeigen Sie:
Ein Element in R ist genau dann prim, wenn es irreduzibel ist.