Prof. Dr. S. Orlik **SoSe 2012**
MSc. M. Kuschkowitz

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

6. Übungsblatt

Abgabe bis zum 21.05.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. $(2 + 2 = 4$ Punkte) Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_5.

a) Geben Sie für die folgenden Elemente jeweils eine Zerlegung in ein Produkt disjunkter Zykeln an:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

b) Berechnen Sie anders herum für die folgenden Produkte von Zykeln eine Permutation gemäß der Schreibweise aus Teil a):

$$(15)(234), (234)(125), (23)(24)(25).$$

Aufgabe 2. $(2 + 2 = 4$ Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie jeweils alle Normalteiler der symmetrischen Gruppen $\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4$.

b) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_n genau dann auflösbar ist, wenn dies für die alternierende Untergruppe $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{S}_n$ gilt.

Aufgabe 3. $(2 + 2 = 4$ Punkte) Betrachten Sie die Menge $R = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ zusammen mit durch punktweise Verknüpfung definierter Addition „ $+$ “ und Multiplikation „ $\cdot$ “, d.h. für $f, g \in R$ sei $f + g$ gegeben durch $x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $f \cdot g$ gegeben durch $x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$.

a) Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

b) Bestimmen Sie die Menge $R^\times$ der Einheiten von R und bestimmen Sie alle Nullteiler in R.

Aufgabe 4. ($1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte) Entscheiden Sie, bei welchen der folgenden Strukturen $(R, +, \cdot)$ es sich um Ringe handelt und begründen Sie jeweils Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel!).

a) $R = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 11 \nmid b\}$; „$+$“ und „$\cdot$“ induziert durch die entsprechenden Operationen auf $\mathbb{Q}$.

b) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$; „$+$“ und „$\cdot$“ gegeben durch gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation von Matrizen.

c) $R =$ Potenzmenge einer beliebigen Menge M;

$$\begin{aligned} A + B &:= (A \cup B) \setminus (A \cap B), \\ A \cdot B &:= A \cap B, \end{aligned}$$

für $A, B \subset M$.
(Sie dürfen - falls nötig - Aufgabe 2 von Blatt 1 benutzen.)

d) $R = \mathrm{C}^0_c((0,1), \mathbb{R}) := \{f : (0,1) \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig, } \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ zusammen mit durch punktweise Verknüpfung definierter Addition „$+$“ und Multiplikation „$\cdot$“.