**Prof. Dr. S. Orlik**
**MSc. M. Kuschkowitz** **SoSe 2012**

**Übungen zur Vorlesung „Algebra“**

**5. Übungsblatt**
**Abgabe bis zum 14.05.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)**
(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

**Aufgabe 1.** (2 Punkte) Sei $G$ eine Gruppe. Auf Blatt 3, Aufgabe 4, wurde die Kommutatoruntergruppe $G'$ von $G$ definiert. Zeigen Sie nun:
Jeder Homomorphismus von $G$ in eine abelsche Gruppe faktorisiert eindeutig über $G/G'$, das heißt zu jedem Homomorphismus $f : G \to A$ von $G$ in eine abelsche Gruppe $A$ existiert genau ein Homorphismus $\tilde{f} : G/G' \to A$, sodass $f = \tilde{f} \circ \pi$.
Hierbei ist $\pi : G \to G/G'$ die kanonische Projektion, gegeben durch $g \mapsto \pi(g) = gG'$.

**Aufgabe 2.** (4 Punkte) Sei $p$ eine Primzahl, sei $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit $p$ Elementen und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$\mathrm{B}(k) = \{g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \forall i > j : g_{ij} = 0\} \subset \mathrm{GL}_n(k)$$

auflösbar ist.

**Aufgabe 3.** (2+2 = 4 Punkte) Sei $G$ eine Gruppe und seien $H_1, \dots, H_n \subset G$ Normalteiler in $G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \to G, (h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto h_1 h_2 \cdots h_n,$$

genau dann ein Isomorphismus von Gruppen ist, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

i) $H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_n = G$,

ii) $H_i \cap (H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_{i-1} \cdot H_{i+1} \cdot \ldots \cdot H_n) = \{e\}$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $S_4$ auflösbar ist.