Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz

SoSe 2012

Übungen zur Vorlesung „Algebra"

4. Übungsblatt

Abgabe bis zum 07.05.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist.

b) Sei G eine Gruppe mit $\mathrm{ord}(G) = p^n$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Sei ferner $H \subsetneq G$ eine echte Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass die Gruppe H echt in ihrem Normalisator enthalten ist; d.h. zeigen Sie $H \subsetneq N_G(H)$.

Aufgabe 2. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei G eine endliche Gruppe und sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

a) Sei P eine p-Sylow-Untergruppe. Zeigen Sie, dass P die einzige p-Sylow-Untergruppe von $N_G(P)$ ist.

b) Sei $q \neq p$ eine weitere Primzahl, sodass $\mathrm{ord}(G) = p^2q$, und seien ferner p, q ungerade. Zeigen Sie, dass G einen echten (d.h. von $G, \{e\}$ verschiedenen) Normalteiler besitzt.

Aufgabe 3. ($2 + 1 = 3$ Punkte) Sei G eine Gruppe.

a) Sei $\mathrm{ord}(G) = 11^2 \cdot 13^2$. Zeigen Sie:

  i) G besitzt einen Normalteiler der Ordnung 121 und einen Normalteiler der Ordnung 169.

  ii) G ist abelsch.

b) Sei $\mathrm{ord}(G) = 72$. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler besitzt.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei $\mathbb{H} = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid b > 0\}$ die *obere Halbebene* in $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ operiert, nämlich durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

b) Zeigen Sie, dass bezüglich der in a) definierten Aktion genau eine Bahn existiert.