Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz **SoSe 2012**

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

3. Übungsblatt

Abgabe bis zum 30.04.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann zyklisch ist, wenn m und n teilerfremd sind.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* von G ist die Menge $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}$. Zeige Sie, dass $Z(G) \subset G$ ein abelscher Normalteiler ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Betrachten Sie die Gruppen $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +) \subset \mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +)$. Zeigen Sie:

i) Jedes Element in der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist von endlicher Ordnung.

ii) Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Untergruppe der Ordnung n in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und diese ist zyklisch.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe.

i) Sei $U \subset G$ eine Teilmenge, die unter G-Konjugation abgeschlossen ist; d.h. für alle $u \in U$ und für alle $g \in G$ gelte $gug^{-1} \in U$. Zeigen Sie, dass die von U erzeugte Untergruppe $\langle U \rangle$ ein Normalteiler in G ist.

ii) Betrachten Sie nun den Spezialfall $U = \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$. Die von U erzeugte Untergruppe G' heißt *Kommutatoruntergruppe* von G. Zeigen Sie:

a) G' ist ein Normalteiler in G.

b) G/G' ist abelsch.

c) Ist $N \subset G$ ein Normalteiler, so ist G/N genau dann abelsch, wenn $N \supset G'$ gilt.