Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz **SoSe 2012**

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

2. Übungsblatt

Abgabe bis zum 23.4.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Für die ersten drei Aufgaben sei $G = (G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Wir schreiben (auch in Zukunft) kurz $gh := g \cdot h$ für Elemente $g, h \in G$.

Aufgabe 1. (1+2 = 3 Punkte) Zeigen Sie:

a) Für ein fixiertes $g \in G$ wird durch die Abbildung

$$\mathrm{Int}(g) : G \to G, (\mathrm{Int}(g))\,(h) := ghg^{-1},$$

ein Gruppenautomorphismus von G definiert.

b) Sei $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge der Gruppenautomorphismen von G.

   i) Zusammen mit der durch Komposition von Abbildungen gegebenen Verknüpfung ist $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe.

   ii) Die Abbildung

   $$\mathrm{Int} : G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto \mathrm{Int}(g),$$

   ist ein Homomorphismus von Gruppen.

   iii) Bestimmen Sie den Kern von Int.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Zeigen Sie:

a) Jede Untergruppe von G vom Index 2 ist ein Normalteiler von G.

b) Es gibt eine Gruppe G mit einer Untergruppe vom Index 3, die kein Normalteiler von G ist.

c) Seien $M, N \subset G$ Normalteiler von G mit $M \cap N = \{e\}$. Für alle $(m,n) \in M \times N$ gilt $mn = nm$.

d) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe, sodass für alle $g, h \in G$ gilt:

$$Hg \neq Hh \Rightarrow gH \neq hH.$$

Dann ist H ein Normalteiler von G.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Konstruieren Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{S}(G)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\}$ und sei $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$. Auf B sei eine Verknüpfung „$\cdot$ “ durch die gewöhnliche Multiplikation von Matrizen gegeben. (Man überzeuge sich davon, dass so auf $B = (B, \cdot)$ eine Gruppenstruktur definiert ist.)

a) Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von B ist.

b) Zeigen Sie, dass $B/U \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, wobei die Gruppenstruktur auf $\mathbb{R}^*$ durch die Multiplikation reeller Zahlen gegeben ist.
(**Hinweis:** Für zwei Gruppen $G = (G, \cdot)$, $H = (H, \circ)$ definieren wir auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ eine Verknüpfung durch

$$(g, h) * (g', h') = (g \cdot g', h \circ h').$$

Man überzeuge sich davon, dass so auf $G \times H$ eine Gruppenstruktur gegeben ist und damit insbesondere auf $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.)

c) Ist U ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ kein Normalteiler von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist.