

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

12. Übungsblatt

Abgabe bis zum 09.07.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei p eine Primzahl und sei k ein Körper mit $\text{char}(k) \neq p$, der die p -ten Einheitswurzeln enthält. Sei $a \in k \setminus k^p$ und sei K/k der Zerfällungskörper von $X^p - a$.

Zeigen Sie, dass K/k galoissch ist mit $\text{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen. Zeigen Sie:

- Es gibt zu jedem $m \in \mathbb{N}$ bis auf Isomorphie genau einen Körper $\mathbb{F}_{p^m} \supset \mathbb{F}_p$ mit p^m Elementen.
- Es ist $\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p$ galoissch vom Grad m und $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$ zyklisch vom Grad m , erzeugt durch den Frobenius-Automorphismus $\varphi : \mathbb{F}_{p^m} \rightarrow \mathbb{F}_{p^m}, x \rightarrow x^p$.
- Für einen Teiler n von m existiert genau ein Zwischenkörper \mathbb{F}_{p^n} von $\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p$ mit p^n Elementen und jeder Zwischenkörper entspricht auf diese Weise einem Teiler von m .
- Beschreiben Sie in der Situation von Teil c) den Zwischenkörper $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m}$ als Fixkörper einer Untergruppe von $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$.

Aufgabe 3. ($1 + 1 + 2 = 4$ Punkte) Sei K/k eine Körpererweiterung und seien E, F Zwischenkörper von K/k . Zeigen Sie:

- a) Ist E/k separabel, so auch $E.F/F$.
- b) Es ist K/k genau dann separabel, wenn K/E und E/k separabel sind.
- c) Sind $E/k, F/k$ separabel, dann sind auch $E \cap F/k$ und $E.F/k$ separabel.

Aufgabe 4. ($2 + 2 = 4$ Punkte) Sei K/\mathbb{Q} der Zerfällungskörper von $X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

Zeigen Sie, dass $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$ ist. Welcher Untergruppe von S_3 entspricht unter diesem Isomorphismus die Gruppe $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}))$? Wie viele Zwischenkörper E mit $[K : E] = 2$ gibt es in K/\mathbb{Q} ?