

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

11. Übungsblatt

Abgabe bis zum 02.07.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

**Aufgabe 1.** (2 + 2 = 4 Punkte) Sei  $f = X^4 - 5X^2 + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ .

- a) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper  $K$  von  $f$  über  $\mathbb{Q}$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$  isomorph zu einer Untergruppe von  $S_4$  ist.

**Aufgabe 2.** (1 + 1 + 2 = 4 Punkte) Sei  $K/k$  eine normale Körpererweiterung und seien  $E, F$  Zwischenkörper von  $K/k$ . Zeigen Sie:

- a) Ist  $E/k$  normal, so auch  $E.F/F$ .
- b) Es sind  $K/E, K/F$  normal.
- c) Sind  $E/k, F/k$  normal, so auch  $E \cap F/k$  und  $E.F/k$ .

**Aufgabe 3.** (4 Punkte) Seien  $p, q$  zwei verschiedene Primzahlen und seien  $a, b \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $a, b > 1$ . Finden Sie ein  $x \in \mathbb{C}$ , sodass  $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{a}, \sqrt[q]{b})$ .

**Aufgabe 4.** (2 + 2 Punkte) Ein Körper  $k$  heißt *vollkommen*, wenn jede algebraische Erweiterung von  $k$  separabel ist. Zeigen Sie:

- a) Ein Körper  $k$  der Charakteristik  $p > 0$  ist genau dann vollkommen, wenn  $k = k^p = \{x^p \mid x \in k\}$ .
- b) Jede algebraische Erweiterung eines vollkommenen Körpers ist vollkommen.
- c) Jeder endliche Körper ist vollkommen.