

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

10. Übungsblatt

Abgabe bis zum 25.06.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. (1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)

- Berechnen Sie $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}) : \mathbb{Q}]$.
- Berechnen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.
- Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
- Konstruieren Sie einen Körper mit 8 Elementen und einen Körper mit 25 Elementen.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}$ eine abzählbare Menge ist. Sie dürfen hierzu ohne Beweis verwenden, dass \mathbb{Q} abzählbar ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die Elemente $\sin(q\pi)$ und $\cos(q\pi)$ algebraisch über \mathbb{Q} sind.

Aufgabe 4. (2 + 2 Punkte)

- Adjungieren Sie eine reelle Nullstelle δ des Polynoms $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ zu \mathbb{Q} und zerlegen Sie f in $\mathbb{Q}(\delta)[X]$ in Primfaktoren.
Bestimmen Sie dann einen Zerfällungskörper von f , welcher $\mathbb{Q}(\delta)$ enthält.
- Betrachten Sie das Polynom $g = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.
Zeigen Sie, dass jeder Zerfällungskörper von g den Grad $6 = 3!$ über \mathbb{Q} besitzt.