Prof. Dr. S. Orlik
MSc. M. Kuschkowitz **SoSe 2012**

Übungen zur Vorlesung „Algebra“

1. Übungsblatt

Abgabe bis zum 16.4.2012, 12 Uhr, in Fach 65 (D. Peters)

(Bezeichnungen wie in der Vorlesung)

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

a) Zeigen Sie: Besteht die Menge G aus höchstens 5 Elementen, so ist $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

b) Betrachten Sie den Fall, dass die Menge G aus 6 Elementen besteht. Ist $(G, \cdot)$ auch hier notwendigerweise abelsch?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei M eine Menge und sei $\mathrm{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge. Zeigen Sie, dass durch

$$A \cdot B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

eine Gruppenstruktur auf $\mathrm{P}(M)$ definiert wird.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e_G \in G$. Zeigen Sie, dass $(G, \cdot)$ in den folgenden beiden Fällen notwendigerweise abelsch ist:

a) Es gilt $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$ für alle $x, y \in G$.

b) Es gilt $x^2 = e_G$ für alle $x \in G$.

(Hierbei ist wie üblich $x^2 := x \cdot x$ für Elemente x einer Gruppe $(G, \cdot)$.)

Aufgabe 4. (5 Punkte) Entscheiden (und begründen!) Sie, bei welchen der folgenden Strukturen $(G, \cdot)$ es sich um einen Monoid oder sogar um eine Gruppe handelt:

a) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und „ $\cdot$ “ bezeichnet die Multiplikation reeller Zahlen.

b) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, und „ $\cdot$ “ bezeichnet die Multiplikation von Matrizen.

c) $(G, \cdot)$ mit $x \cdot y = y$ für alle $x, y \in G$.

d) Es sei V ein zweidimensionaler K-Vektorraum mit K-Basis (e_1, e_2). Sei dann G die Menge aller K-Automorphismen $f : V \to V$, die diese Basis in sich überführen, d.h. für alle $f \in G$ gelte $f(e_0), f(e_1) \in \{e_0, e_1\}$, und sei „ $\cdot$ “ die Komposition von Abbildungen.
Beschreiben Sie zusätzlich G durch Matrizen.