LÖSUNG AUFGABE 4.3 VOM BLATT 8

Behauptung: Das Inverse zu $\exp(f)$ ist $\exp(-f)$. Dazu rechnen wir folgendes nach.

$$\begin{aligned}
\exp(f)\exp(-f)v &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{m!n!}f^m\big((-f)^n(v)\big)\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{m!n!}f^{m+n}(v)\\
&= \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}(-1)^n\right)\frac{1}{p!}f^p(v)\\
&= \sum_{p\geq 0}(1-1)^p\frac{1}{p!}f^p(v)\\
&= v.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\exp(-f)\exp(f)v = 0$, was aber auch aus $\exp(-f)\exp(f) = \exp(f)\exp(-f)$ folgt. Den letzten Teil der Aufgabe löst man mit einer ganz ähnlichen Rechnung, wobei wir die Gleichung $(x, f(y)) = -(f(x), y)$ genau n-mal anwenden.

$$\begin{aligned}
(\exp(f)v, \exp(f)w) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{m!n!}(f^m(v), f^n(w))\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{m!n!}(f^{m+n}(v), w)\\
&= \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}(-1)^n\right)\frac{1}{p!}(f^p(v), w)\\
&= \sum_{p\geq 0}(1-1)^p\frac{1}{p!}(f^p(v), w)\\
&= (v, w).
\end{aligned}$$