Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

9. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Es sei $\langle -, - \rangle$ eine hermitesche Form auf einem komplexen Vektorraum V der Dimension n. Ferner sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und A die Matrix der Form bezüglich dieser Basis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind.

(i) Die Form $\langle -, - \rangle$ (beziehungsweise A) ist positiv definit.

(ii) Die Matrix A repräsentiert die hermitesche Standardform auf dem $\mathbb{C}^n$ bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathbb{C}^n$.

(iii) Es gibt ein $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A = g^T \cdot \overline{g}$.

(iv) Die Form $\langle -, - \rangle$ hat eine Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_n)$, d.h., $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{i,j}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe 2:
Wir wollen das Hurwitz-Kriterium (auch Sylvester- oder Hauptminoren-Kriterium genannt) zeigen, gemäß dem die durch eine symmetrische $n \times n-$Matrix A definierte Bilinearform $(x, y) = x^T A y$ auf $\mathbb{R}^n$ genau dann positiv definit ist, wenn $\det(A^{(i)}) > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Hierbei ist $A^{(i)}$ die $i \times i-$Matrix, welche aus den ersten i Zeilen und Spalten von S besteht. Beachten Sie, dass $A^{(i)}$ die Matrix von $(-, -)^{(i)}$ bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_i)$ ist, wobei $(-, -)^{(i)}$ die Einschränkung von $(-, -)$ auf $V^{(i)} := \langle e_1, \ldots, e_i \rangle_{\mathbb{R}}$ ist. Wir gehen dazu wie folgt vor.

1. Sei zunächst $(-, -)$ positiv definit. Zeigen Sie, dass dann auch $(-, -)^{(i)}$ positiv definit ist. Begründen Sie, dass dann $\det(A^{(i)}) > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ gelten muss, indem Sie die Transformationsformel für $A^{(i)}$ bei Basiswechsel benutzen. Es empfiehlt sich, zu einer Orthonormalbasis bezüglich $(-, -)^{(i)}$ zu wechseln.

2. Sei nun umgekehrt $\det(A^{(i)}) > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie mittels Induktion nach n, dass $(-, -)$ positiv definit ist. Für den Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$ sei $f_1, \ldots, f_{n-1}$ eine Orthonormalbasis von $V^{(n-1)}$ bezüglich $(-, -)^{(n-1)}$, was nach Induktionsvoraussetzung positiv definit ist. Zeigen Sie, dass $(f_1, \ldots, f_{n-1}, \tilde{f}_n)$ eine Basis von $V^{(n)} = \mathbb{R}^n$ ist, wobei $\tilde{f}_n := e_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_i, e_n) f_i$ ist. Bestimmen Sie die Matrix von $(-, -)$ bezüglich dieser Basis und schließen Sie aus $\det(A^{(n)}) = \det(A) > 0$ auf $(\tilde{f}_n, \tilde{f}_n) > 0$. Begründen Sie nun, dass $(-, -)$ positiv definit ist und die Orthonormalbasis $(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n)$ mit $f_n = \tilde{f}_n / \sqrt{(\tilde{f}_n, \tilde{f}_n)}$ besitzt.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie nach dem Hurwitz-Kriterium, welche der drei folgenden Matrizen positiv definit ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(-,-)$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V. Dann ist bekanntlich $d(x,y) :=\| x-y \|= \sqrt{(x-y, x-y)}$ eine Metrik auf V. Zeigen Sie, dass jede nicht notwendigerweise lineare Abbildung $f : V \to V$ mit der Eigenschaft $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in V$ die Gestalt $f(x) = A(x) + b$ mit $b \in V$ hat, wobei $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $(A(x), A(y)) = (x,y)$ für alle $x, y \in V$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Nehmen Sie zunächst $f(0) = 0$ an und zeigen sie, dass dann $(f(x), f(y)) = (x,y)$ für all $x, y \in V$ gilt. (vgl. Aufgabe 3, Blatt 8)
2. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\| f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y) \|= 0$ für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.
3. Schließen Sie daraus $f(x) = A(x)$ für A wie oben und bestrachten Sie nun noch den allgemeinen Fall $f(0) \in V$ beliebig.

Abgabe bis Montag den **11.01.16** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`