Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

8. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Es sei A eine invertierbare Matrix. Beweisen Sie die Gleichung

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} \chi_A(\lambda^{-1}).$$

Aufgabe 2:
Betrachten Sie die Bilinearform

$$S(x,y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_4 + x_3y_3 - x_3y_4 + 2x_4y_2 - x_4y_3 + x_4y_4$$

auf dem $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die dazugehörige Matrix und finden Sie eine Orthonormalbasis zu S. Was ist der Index und die Signatur von S?

Aufgabe 3:
Es sei V ein K-Vektorraum mit der Bilinearform $(-,-)$ und der zugehörigen quadratischen Form $q : V \ni v \longmapsto q(v) := (v,v) \in K$.

1. Beweisen Sie, dass $q(v+w) + q(v-w) = 2\big(q(v) + q(w)\big)$ für alle $v, w \in V$ gilt.
2. Man finde für den Körper $K = \mathbb{F}_2$ bestehend aus den beiden Elementen 0 und 1 zwei verschiedene Bilinearformen mit derselben quadratischen Form.

Aufgabe 4:
Es sei V ein K-Vektorraum und $(-,-)$ eine Bilinearform auf V. Es bezeichne L die Menge aller Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$, die die Gleichung $(f(v),w) + (v,f(w)) = 0$ für alle $v,w \in V$ erfüllen.

1. Zeigen Sie, dass L ein K-Vektorraum ist und mit $f, g \in L$ auch der Kommutator $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ in L liegt.
2. Bestimmen Sie L für den Fall $V = K^n$ mit der Standard Bilinearform $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
3. Es sei jetzt $K = \mathbb{R}$ und V endlich dimensional. Dann konvergiert für jeden Vektor $v \in V$ und jeden Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ die Reihe

   $$\exp(f)v := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(v)$$

   und definiert eine lineare Abbildung $\exp(f) : V \ni v \longmapsto \exp(f)v \in V$. Hierbei ist f^n die n-fache Verknüpfung von f. Außerdem können Sie beim Rechnen so tun, als ob Sie mit endlichen Summen arbeiten. Zeigen Sie nun, dass $\exp(f) : V \to V$ invertierbar ist und geben Sie das Inverse an. Beweisen Sie außerdem, dass für $f \in L$ sogar die Gleichung $(\exp(f)v, \exp(f)w) = (v,w)$ für alle $v,w \in V$ gilt.
   Hinweis: Die binomische Formel ist sehr nützlich.

Aufgabe 5:
Es sei $V = K[x]$ der K-Vektorraum aller Polynome und

$$D = \sum_{n=0}^{d} a_n \frac{d^n}{dx^n} : V \longrightarrow V$$

ein beliebiger linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $a_n \in K$. Bestimmen Sie die Jordan-Zerlegung von D. Betrachten Sie die Einschränkung von

$$D = 2\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + 3$$

auf den Unterraum $K[x]_{\leq 4}$ aller Polynome vom Grad kleiner gleich 4. Geben Sie eine Jordan-Basis für dieses D an.

Aufgabe 6:
Es sei $f = f_d + f_n$ die Jordan-Zerlegung einer linearen Abbildung $f : V \to V$ auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenem Körper. Man zeige $\mathrm{im}(f_d) \subset \mathrm{im}(f)$.
Hinweis: Man zeige zunächst $\mathrm{im}(f_d^N) = \mathrm{im}((f - f_n)^N) \subset \mathrm{im}(f)$ *für hinreichend großes* N *und überlege sich dann, wie* $\mathrm{im}(f_d)$ *und* $\mathrm{im}(f_d^N)$ *miteinander zusammenhängen.*

Aufgabe 7:
Es seien $V_1, \dots, V_n, W$ Vektorräume über dem Körper K und es bezeichne $\mathrm{Mult}_K(V_1, \dots, V_n; W)$ die Menge aller multilinearen Abbildungen f, d.h. die Menge aller Abbildungen $f : V_1 \times \dots, \times V_n \longrightarrow W$, die K-linear in jeder Komponente sind, also

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \mu v_i + v_i', v_{i+1}, \dots, v_n) = \mu f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_n)$$

mit $\mu \in K$ für alle $1 \leq i \leq n$ erfüllen. Für $n = 1$ ist offenbar $\mathrm{Mult}_K(V_1, W) = \mathrm{Hom}_K(V_1, W)$ und für $W = K$ sprechen wir auch von n-Linearformen bzw. von Bilinearformen für $n = 2$.

1. Begründen Sie, dass das Produkt einer K-Algebra A in $\mathrm{Mult}_K(A, A; A)$ liegt.
2. Es seien $v_1, \dots, v_n$ Spaltenvektoren in K^n. Begründen Sie, dass $\det(v_1, \dots, v_n)$ eine n-Linearform auf K^n ist, also in $\mathrm{Mult}_K(K^n, \dots, K^n; K)$ liegt.
3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Mult}_K(V_1, \dots, V_n; W)$ auf natürliche Weise ein K-Vektorraum ist.
4. Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Konstruieren Sie einen Isomorphismus
$$\mathrm{Mult}_K(V_1, \dots, V_n; W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mult}_K(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(n)}; W)$$
von K-Vektorräumen.
5. Es sei $1 \leq r < n$ eine natürliche Zahl. Konstruieren Sie einen Isomorphismus
$$\mathrm{Mult}_K(V_1, \dots, V_n; W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mult}_K\big(V_1, \dots, V_r; \mathrm{Mult}_K(V_{r+1}, \dots, V_n; W)\big)$$
von K-Vektorräumen. Insbesondere gilt also
$$\mathrm{Mult}_K(V_1, V_2; W) \cong \mathrm{Hom}_K(V_1, \mathrm{Hom}_K(V_2, W)) \text{ und}$$
$$\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2^*) \cong \mathrm{Mult}_K(V_1, V_2; K) \cong \mathrm{Mult}_K(V_2, V_1; K) \cong \mathrm{Hom}_K(V_2, V_1^*).$$

Abgabe bis Montag den **04.01.16** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Die Aufgaben 1, 5 und 6 sind Bonusaufgaben zum Punkte Sammeln und sollen separat abgegeben werden, da sie vielleicht etwas später korrigiert werden.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`