Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

7. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine K-Bilinearform auf V. Man zeige: Ist für die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aus V die Matrix $\big(s(v_i, v_j)\big)_{i,j=1}^n$ invertierbar, so sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Aufgabe 2:
Es sei V der 3-dimensionale Unterraum aller stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, der durch die linear unabhängigen Funktionen $1, \sin(x), \cos(x)$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass für $(f, g) \in V^2$ durch

$$s(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

eine symmetrische Bilinearform auf V definiert wird. Berechnen Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis $1, \sin(x), \cos(x)$. Was ist das orthogonale Komplement des Unterraumes $\mathbb{R}\cos(x)$?

Aufgabe 3:
Sei V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (e_0, e_1) sowie der durch

$$\langle e_0, e_0\rangle = 1, \quad \langle e_1, e_1\rangle = -1, \quad \langle e_0, e_1\rangle = \langle e_1, e_0\rangle = 0$$

eindeutig bestimmten symmetrischen Bilinearform $\langle -, -\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Man nennt diesen Raum auch den "zweidimensionalen Minkowski-Raum". Beschreiben Sie die Menge aller Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, so dass $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle v, w gilt.

Aufgabe 4:
Überprüfen Sie, ob durch die folgenden Abbildungen ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert wird. Geben Sie, falls das der Fall ist, die darstellende Matrix bzgl. der Basis $((1, 1), (1, -1))$ an:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \longmapsto 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2,$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \longmapsto 4x_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$.

Abgabe bis Montag den **14.12.15** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`