Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

6. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus f genau dann diagonalisierbar ist, wenn der Grad des Minimalpolynoms und die Anzahl der Eigenwerte von f übereinstimmen.

Aufgabe 2:
Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Dann gibt es ein Polynom $p \in K[X]$, so dass $p(A) = A^{-1}$ gilt.

Aufgabe 3:
Es habe $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$ das charakteristische Polynom $\chi_A(x) = (x - \lambda)^n$. Weiter sei $s = \dim V(A, \lambda)$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ und r der Grad des Minimalpolynoms $\mu_A(x)$, d.h. die kleinste Zahl mit $(A - \lambda E_n)^r = 0$. Bestimmen Sie die möglichen Jordannormalformen der Matrix A für die folgenden Tripel (n, s, r)

$$(5, 4, 1), (6, 2, 3), (6, 1, 2), (6, 3, 2).$$

Hinweis: Nicht jedes Tripel ist möglich!

Aufgabe 4:
Es sei $V = \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ der Raum aller reellen $n \times n$-Matrizen. Man zeige:

1. Die Funktion $\Phi(A, B) = \mathrm{Spur}(A \cdot B)$ ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V.
2. Sei $V_+ = \{A \in V \mid A^T = A\}$ der Untervektorraum aller symmetrischen und $V_- = \{A \in V \mid A^T = -A\}$ der Untervektorraum aller schiefsymmetrischen Matrizen. Es gilt
$$V = V_+ \oplus V_-, \qquad V_+^\perp = V_-, \qquad V_-^\perp = V_+.$$
3. Es ist Φ positiv definit auf V_+ und negativ definit auf V_-, d.h. es gilt $\Phi(A, A) > 0$ für alle $A \in V_+ \setminus \{0\}$ und $\Phi(A, A) < 0$ für alle $A \in V_- \setminus \{0\}$.

Abgabe bis Montag den **07.12.15** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`