Prof. Späth
Dr. Meinhardt **WS 2015/16**

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ -9 & 8 & 16 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{Q})$ gebe man jeweils ein $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ derart an, dass SAS^{-1} die Jordansche Normalform von A ist.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die möglichen Jordanschen Normalformen aller nilpotenten 6×6-Matrizen.

Aufgabe 3:
Es seien $f, g : V \to V$ kommutierende Endomorphismen eines endlich dimensionalen Vektorraumes V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeigen Sie, $(f+g)_d = f_d + g_d$ und $(f+g)_n = f_n + g_n$.

Aufgabe 4:
Es sei N eine nilpotente $n \times n$-Matrix über einem Körper der Charakteristik 0.

(a) Begründen Sie, dass die Matrix

$$\exp(N) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k$$

wohl-definiert ist und bestimmen Sie eine Jordan-Zerlegung von $\exp(N)$.

(b) Zeigen Sie, dass jede $n \times n$-Matrix mit dem Eigenwert 1 der algebraischen Vielfachheit n in der Form $\exp(N)$ mit einer eindeutig bestimmten nilpotenten Matrix N geschrieben werden kann. Demnach haben wir eine Bijektion zwischen den nilpotenten $n \times n$-Matrizen und den sogenannten *unipotenten* $n \times n$-Matrizen, d.h. Matrizen mit dem Eigenwert 1 der algebraischen Vielfachheit n.
Hinweis: Die Formel $log(1 + x) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k / k$ *könnte nützlich sein.*

(c) Beweisen Sie $\exp(N_1 + N_2) = \exp(N_1)\exp(N_2)$ für zwei kommutierende nilpotente $n \times n$-Matrizen N_1, N_2.

(d) Geben Sie zwei nichtkommutierende 3×3-Matrizen N_1, N_2 an, für die $\exp(N_1 + N_2) \neq \exp(N_1)\exp(N_2)$ gilt.

Abgabe bis Montag den **30.11.15** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`