Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

4. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Berechnen Sie A^{1000} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{Q}).$$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{C}).$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass ein möglicherweise unendlich dimensionaler Vektorraum V über einem algebraisch abgeschlossenem Körper K genau dann in die direkte Summe $\oplus_{\lambda \in K} \mathrm{Hau}(f, \lambda)$ der Haupträume eines Endomorphismus' $f : V \to V$ zerfällt, wenn f lokal endlich ist. Dabei heißt ein Endomorphismus $f : V \to V$ *lokal endlich*, wenn für jeden Vektor $v \in V$ ein endlich dimensionaler Unterraum $U_v \subset V$ mit $v \in U_v$ und $f(U_v) \subset U_v$ existiert.

Aufgabe 4:
Es seien $f : V \to V$, $g : W \to W$ und $\phi : V \to W$ K-lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie, dass $\phi(\mathrm{Hau}(f, \lambda)) \subset \mathrm{Hau}(g, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$ gilt. Unter der zusätzlichen Annahme, dass K algebraisch abgeschlossen ist, existieren bekanntlich die Jordan-Zerlegungen $f = f_d + f_n$ und $g = g_d + g_n$. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Diagramme kommutieren.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_d"'] & W \arrow[d, "g_d"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_n"'] & W \arrow[d, "g_n"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

Abgabe bis Montag den **23.11.15** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`