Prof. Späth
Dr. Meinhardt **WS 2015/16**

2. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: Nutzen Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren, um zu zeigen, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & -21 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

maximalen Rang hat. Bestimmen Sie damit ebenfalls die Determinante und das Inverse von A.

Aufgabe 2:
Betrachten Sie das lineare inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \qquad - 2x_4 &= -2t + 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 4t - 1, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 6x_4 &= -5t + 5. \end{aligned}$$

Nutzen Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren, um zu entscheiden, für welche $t \in K$ eine Lösung existiert, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung für diese $t \in K$. Geben Sie auch alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an. Welche Dimension hat der Lösungsraum?

Aufgabe 3:
Es sei $V = \{f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in K\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Ferner sei $D : V \to V$ der Differentialoperator $D(f) = 3f'' - 2f' + f$.

1. Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von D. Entscheiden Sie, ob D invertierbar ist.
2. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Cramerschen Regel.
$$D(f) = -x^2 + x - 2$$
3. Bestimmen Sie sämtliche Eigenräume von D und entscheiden Sie, ob D diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4:
Es sei $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ eine invertierbare reelle Matrix und $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von $n \times n$ Matrizen, die (koeffizientenweise) gegen A konvergiert, d.h.

$$\lim_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad \text{für alle} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A^{(k)}$ für alle $k \geq k_0$ invertierbar ist. Beweisen Sie:

$$\lim_{k \to \infty} \left(A^{(k)}\right)^{-1} = A^{-1}.$$

Hinweis: Sie dürfen Ihr Wissen aus der Analysis I Vorlesung verwenden.

Abgabe bis Montag den **09.11.15** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Jeder gibt bitte seine eigene Lösung ab. Gruppenabgaben sind nicht gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`