Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

13. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die alle Eigenwerte, Eigenäume, Haupträume und die Jordansche Normalform der folgenden Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zusätzlich A^{20}

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix. Zeigen Sie dabei, dass Sie unabhängig von θ ist.

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass die Determinante der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 11 geteilt wird, ohne die Determinante direkt zu berechnen.
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Zahlen 121, 253 und 396 durch 11 teilbar sind.

Aufgabe 4 :
Es sei V ein komplexer endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $s(-,-)$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Ferner sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

1. Zeigen Sie, dass die beiden Abbildung $f \pm i : v \mapsto f(v) \pm iv$ invertierbar sind und miteinander vertauschen. *Hinweis: Berechnen Sie* $\ker(f \pm i)$.

2. Bestimmen Sie $(f \pm i)^{ad}$ und $\left((f \pm i)^{-1}\right)^{ad}$.

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung $U_{\pm}(f) := (f \pm i)^{-1}(f \mp i)$ aus $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ unitär sind.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie eine Orthogonalmatrix $O \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

so dass ${}^tO\,AO$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 6:
Es sei $n \geq 4$ und e_i der i-te Standardbasisvektor von $V = \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie in dem von den Vektoren $e_1 + 2e_3, e_2 - e_1, e_1 + e_4$ aufgespannten Untervektorraum von V eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts auf V.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom des Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$ mit

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{falls } 2 \nmid i, \\ e_{i-1} & \text{falls } 2 \mid i. \end{cases}$$

Aufgabe 8:
Es sei $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit Minimalpolynom $\mu_f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$. Geben Sie alle möglichen Formen für das charakteristische Polynome $\chi_f(x)$ an und bestimmen Sie für jeden möglichen Fall die geometrische und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte.

Aufgabe 9:
Für eine reelle $n \times n$-Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ ist

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

konvergent und definiert eine reelle $n \times n$-Matrix.

1. Bestimmen Sie $\exp(A)$ für Diagonalmatrizen A.
2. Zeigen Sie, dass $\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)S$ gilt. Geben Sie ein Verfahren an, um $\exp(A)$ für diagonalisierbare Matrizen A zu bestimmen.
3. Bestimmen Sie $\exp(A)$ für die Matrix A aus Aufgabe 5.
4. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen reellen Vektorraumes V mit Basis $\mathcal{B}$ und $\exp(f) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ die lineare Abbildung $v \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^n(v)$ von Blatt 8, Aufgabe 4.3. Zeigen Sie, $M_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = \exp(M_{\mathcal{B}}(f))$.
5. Zeigen Sie, $\det(\exp(f)) = \exp(\mathrm{Spur}(f))$ für diagonalisierbare Endomorphismen.