Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

12. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix und bestimmen Sie ihr Minimalpolynom.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Seien $A, B \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{C})$ zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass die Gleichungen $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ genau dann gelten, wenn A und B ähnlich sind, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit $B = SAS^{-1}$. Lässt sich die Aussage auf 4×4-Matrizen verallgemeinern?

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass die folgende symmetrische Matrix positiv definit ist.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun das Skalarprodukt $s(x, y) := x^T Sy$ auf $\mathbb{R}^3$.

1. Wenden Sie das Verfahren von Gram–Schmidt auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an, um eine Orthonormalbasis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Skalarprodukts $s(-,-)$ zu finden.
2. Es sei M die Inverse der 3×3-Matrix, deren Spalten durch v_1, v_2 und v_3 gegeben sind. Zeigen Sie, dass $M^T \cdot M = S$ gilt.

Aufgabe 4:
Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Geben Sie eine minimale Menge $\mathcal{M}$ von reellen 3×3-Matrizen an, so dass für jede symmetrische Bilinearformen s auf V eine Basis $\mathcal{B}$ mit $M_{\mathcal{B}}(s) \in \mathcal{M}$ existiert.