Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

11. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass durch die folgenden symmetrischen Matrizen A und B euklidische Skalarprodukte s_A auf $\mathbb{R}^2$ und s_B auf $\mathbb{R}^3$ definiert werden

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit der Matrix

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die Matrix von $f^{ad} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Skalarprodukte s_A auf $\mathbb{R}^2$ und s_B auf $\mathbb{R}^3$. Sämtliche Matrizen beziehen sich hier auf die Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2:
Es seien V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume und $f : V \to W$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass für die adjungierte Abbildung $f^{ad} : W \to V$ die Gleichungen $\ker(f^{ad}) = (\mathrm{im}(f))^\perp$ und $\ker(f) = (\mathrm{im}(f^{ad}))^\perp$ gelten.

Aufgabe 3:
Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume mit Skalarprodukten s_V und s_W. Ferner sei $f : V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, für die $s_W(f(x), f(y)) = s_V(x, y)$ für alle $x, y \in V$ gilt. Wir wollen die adjungierte Abbildung f^{ad} zu f bestimmen.

1. Bestimmen Sie f^{ad} für den Fall, dass f invertierbar ist.
2. Bestimmen Sie f^{ad}, falls f die Einbettung $V \hookrightarrow W$ eines Untervektorraumes $V \subset W$ ist.
3. Sei U ein weiterer endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt s_U und $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{h} W$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie $(h \circ g)^{ad} = g^{ad} \circ h^{ad}$.
4. Sei nun $f : V \to W$ eine beliebige lineare Abbildung mit $s_W(f(x), f(y)) = s_V(x, y)$ für alle $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass f die Komposition eines Isomorphismuses und einer Einbettung wie in Teil 1 und 2 ist. Nutzen Sie nun Teil 3, um f^{ad} zu bestimmen.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Iwasawa-Zerlegung der folgenden Matrizen aus $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis Montag den **25.01.16** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`