**Prof. Späth** **WS 2015/16**
**Dr. Meinhardt**

# 10. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

**Aufgabe 1:**
Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und der Endomorphismus $\phi$, dessen Matrix bezüglich der Standardbasis durch

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

1. Zeigen Sie, dass $\phi$ ein orthogonaler Endomorphismus ist.
2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $B$, so dass die Matrix $M_B(\phi)$ in Normalform ist.
3. Schreiben Sie $\phi$ als Produkt von Spiegelungen und Drehungen.

**Aufgabe 2:**
Es sei $V$ ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $(-,-)$. Sei $\phi \in O(V)$ eine orthogonale lineare Abbildung. Für einen Eigenwert $\lambda$ (komplex oder nicht) sei

$$V_{Re(\lambda)} = \begin{cases} \ker(\lambda \operatorname{id} - \phi) & \text{falls } \lambda = \pm 1, \\ \ker(\operatorname{id} - 2\operatorname{Re}(\lambda)\phi + \phi^2) & \text{falls } \lambda \text{ keine reelle Zahl ist.} \end{cases}$$

Es sind also $V_1$ und $V_{-1}$ genau die Eigenräume von $\phi$ zu den Eigenwerten 1 und $-1$. Zeigen Sie, dass $V$ in die direkte Summe

$$V = \bigoplus_{\text{alle Eigenwerte}} V_{\operatorname{Re}(\lambda)}$$

zerfällt und $(V_{\operatorname{Re}(\lambda)}, V_{\operatorname{Re}(\lambda')}) = 0$ für alle Paare $(\lambda, \lambda')$ von Eigenwerten mit $\operatorname{Re}(\lambda) \neq \operatorname{Re}(\lambda')$ gilt.

**Aufgabe 3:**

1. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der positiv definiten symmetrischen Bilinearform, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
gegeben ist. Konstruieren Sie nach dem Gram–Schmidt Verfahren ausgehend von den Vektoren $\binom{1}{-1}$ und $\binom{2}{0}$ (in dieser Reihenfolge) eine Orthonormalbasis.
2. Betrachten Sie den 3-dimensionalen reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ aller reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 2 mit dem positiv definiten Skalarprodukt
$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)x^2 dx.$$
Nutzen Sie das Gram–Schmidt Verfahren, um ausgehend von den Monomen $1, x, x^2$ (in dieser Reihenfolge) eine Orthonormalbasis zu bestimmen.

**Aufgabe 4:**
Wir betrachten den 3-dimensionalen Minkowski-Raum, d.h. den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der symmetrischen Bilinearform $(-,-)$, dessen Matrix bezüglich der Standardbasis durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Wir betrachten außerdem die lineare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_0(2 \times 2, \mathbb{R})$$

in die Menge $\mathrm{M}_0(2 \times 2, \mathbb{R})$ der $2 \times 2$-Matrizen $A$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 0$. Wir versehen den Vektorraum $\mathrm{M}_0(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit der symmetrischen Bilinearform $\langle A, B \rangle := \frac{1}{2} \mathrm{Spur}(AB)$. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung $\Phi$ ist eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathrm{M}_0(2 \times 2, \mathbb{R})$, d.h. ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen mit $\langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle = (v, w)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$. (Achtung: Der Begriff "Isometrie" wird hier etwas allgemeiner verwendet, in dem Sinne, dass das "Abstandsquadrat" $\| v - w \|^2 := (v - w, v - w)$ bzw. $\| A - B \|^2 := \langle A - B, A - B \rangle$ erhalten bleibt, auch wenn eine (topologische) Metrik im engeren Sinne nicht gegeben ist.)

2. Zeigen Sie, dass jede Matrix $S \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{S' \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid \det(S') = 1\}$ via $A \mapsto SAS^{-1}$ eine Isometrie von $\mathrm{M}_0(2 \times 2, \mathbb{R})$ auf sich selbst induziert.

3. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(2, 1)$ ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie dessen Kern. Hierbei bezeichnet $\mathrm{O}(2, 1)$ in Analogie zu $O_3(\mathbb{R})$ die Gruppe aller Isometrien des Minkowski-Raumes $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst.

*Bemerkung: Man kann zeigen, dass das Bild von* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{O}(2, 1)$ *die Untergruppe* $\mathrm{SO}(2, 1)^+$ *aller Matrizen* $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ *aus* $\mathrm{O}(2, 1)$ *mit* $\det(M) = 1$ *und* $M_{3,3} > 0$ *ist. Es gilt* $\mathrm{O}(2, 1) / \mathrm{SO}(2, 1)^+ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ *heißt in diesem Zusammenhang auch Spin-Gruppe vom 3-dimensionalen Minkowski-Raum.*

Abgabe bis Montag den **18.01.16** um 10:00 Uhr (s.t.) in den Postfächern der Übungsleiter auf D.13. Gruppenabgaben für jeweils maximal zwei Studenten sind gestattet.
Aktuelles und Übungsblätter unter `http://www2.math.uni-wuppertal.de/~meinhard/la2.html`