Prof. Späth
Dr. Meinhardt

WS 2015/16

1. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie, dass die Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, die i ganz nach vorne schiebt ohne die Reihenfolge der übrigen Elemente zu ändern, genau $i-1$ Fehlstände und folglich das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{i-1}$ hat.

2. Beweisen Sie, dass die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ für $n \geq 2$ von der Transposition $\tau_{1,2}$ der Elemente 1 und 2 und der "zyklischen Vertauschung" $\sigma : i \mapsto i+1$ für $1 \leq i < n$ und $n \mapsto 1$ erzeugt wird.

Aufgabe 2:
Für $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ und für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne $s_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$ die i-te Spaltensumme. Zeigen Sie:

1. Ist $s_i = 0$ für alle i, dann ist $\det(A) = 0$.

2. Ist $s_i = 1$ für alle i, dann ist $\det(A - E_n) = 0$. Finden Sie ein Beispiel für diesen Fall mit $\det(A) = 1$.

Aufgabe 3:
Es seien $A, B, C, D \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ quadratische Matrizen. Ferner sei D invertierbar und C mit D vertauschbar, d.h. es gelte $CD = DC$. Zeigen Sie, dass dann

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC) \text{ gilt.}$$

Bemerkung: Sind die Voraussetzungen nicht erfüllt, so gilt diese Formel für $n \geq 2$ im Allgemeinen nicht. Wer Lust hat, kann sich ein Gegenbeispiel überlegen.

Aufgabe 4:
Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_4)$ und W ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$. Die lineare Abbildung $f : V \to W$ sei gegeben durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie nun die Vektoren $v_1' = v_1 - v_2, v_2' = v_2 + v_3, v_3' = -v_3 + 2v_4, v_4' = v_4$ und $w_1' = w_1 + w_2, w_2' = w_2, w_3' = w_3 + w_1$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}' = (v_1', \ldots, v_4')$ eine Basis von V und $\mathcal{B}' = (w_1', w_2', w_3')$ eine Basis von W ist und bestimmen Sie die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f)$ von f bezügich dieser neuen Basen.

Aufgabe 5:
Es sei $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r_{>0}$ und $N = n_1 + \ldots + n_r$. Wir können $N \times N$ Matrizen in der folgenden Form schreiben

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{r1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

mit $A_{ij} \in \mathrm{M}(n_i \times n_j; K)$ für alle $1 \leq i, j \leq r$. Es sei $P_{\bar{n}} \subseteq \mathrm{M}(N \times N; K)$ die Menge aller oberen "Block-Dreiecksmatrizen" $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r$ mit $A_{ij} = 0$ für alle Paare $i > j$, die zusätzlich die Eigenschaft $A_{ii} \in \mathrm{GL}(n_i; K)$ für all $1 \leq i \leq r$ erfüllen, d.h.

$$P_{\bar{n}} := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{r1} \\ 0 & A_{22} & \dots & \dots & A_{2r} \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{rr} \end{pmatrix} \;\middle|\; A_{ii} \in \mathrm{GL}(n_i; K) \;\; \forall \; 1 \leq i \leq r \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $P_{\bar{n}}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(N; K)$ ist.
2. Zeigen Sie weiterhin, dass die beiden Teilmengen

$$\begin{aligned} L_{\bar{n}} &= \{A \in P_{\bar{n}} \mid A_{ij} = 0 \,\forall\, i < j\} \text{ "Block-Diagonalmatrizen"}, \\ U_{\bar{n}} &= \{A \in P_{\bar{n}} \mid A_{ii} = E_{n_i} \,\forall\, 1 \leq i \leq r\} \end{aligned}$$

   Untergruppen von $P_{\bar{n}}$ sind und dass aus $A \in U_{\bar{n}}$ sowie $B \in L_{\bar{n}}$ schließlich $BAB^{-1} \in U_{\bar{n}}$ folgt.
3. Wir bezeichnen die Menge $U_{\bar{n}} \times L_{\bar{n}}$ zusammen mit der Verknüpfung

$$(U_{\bar{n}} \times L_{\bar{n}})^2 \ni \Big((A, B), (A', B')\Big) \longmapsto (A, B) \cdot (A', B') := (ABA'B^{-1}, BB') \in U_{\bar{n}} \times L_{\bar{n}},$$

   welche nach Teil 2 wohldefiniert ist, als das "semidirekte Produkt" $U_{\bar{n}} \rtimes L_{\bar{n}}$ von $L_{\bar{n}}$ mit $U_{\bar{n}}$. Zeigen Sie, dass $U_{\bar{n}} \rtimes L_{\bar{n}}$ eine Gruppe ist, und konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus von $U_{\bar{n}} \rtimes L_{\bar{n}}$ auf $P_{\bar{n}}$.

Bemerkung: Man nennt $L_{\bar{n}}$ eine Levi-Untergruppe von $P_{\bar{n}}$ und den Isomorphisms $U_{\bar{n}} \rtimes L_{\bar{n}} \cong P_{\bar{n}}$ eine Levi-Zerlegung von $P_{\bar{n}}$.