Grundlagen des Sachrechenunterrichts

Detlef Lind

Vorlesung im SS 2005

Bergische Universität Wuppertal

Inhaltsverzeichnis

„Sachrechnen“? - Eine knappe Begriffsbestimmung

In den neuen Grundschulrichtlinien[1] des Landes NRW heißt es unter dem Abschnitt ***Aufgaben des Faches***:

Der Mathematikunterricht in der Grundschule

- bildet Verständnis, Sicherheit und Flexibilität im Umgang mit Zahlen und mit Rechenoperationen heraus
- entwickelt einen verständigen Umgang mit Formen, Maßen, Lagebeziehungen und mit geometrischen Grundoperationen
- erschließt in der Auseinandersetzung mit authentischen, herausfordernden Aufgaben Aspekte der Lebenswirklichkeit mathematisch
- befähigt zur Lösung mathematikhaltiger Probleme
- fördert Freude an der Mathematik und eine positive Einstellung zum Mathematiklernen.

Betont wird außerdem, dass der Mathematikunterricht die Selbstständigkeit und mathematische Mündigkeit fördern soll.

Diese Ziele sollten auch für die anschließenden Schuljahre angestrebet werden. Hier kommen allerdings weitere Begriffe hinzu, da das Methodenrepertoire der Mathematik im Laufe der Zeit umfangreicher wird.

Offensichtlich beziehen sich die mittleren drei Ziele auf Unterrichtsinhalte des sogenannten „Sachrechnens“. Ihre Formulierung macht an sich schon deutlich, dass das *Sachrechnen* nicht auf das Lösen trainierter Aufgabentypen (Beispiele sind „Dreisatzaufgaben“ und „Prozentrechenaufgaben“) reduziert werden darf. Solchen Verengungen kann folgende „offene“ Begriffsdefinition vorbeugen:

> ***Sachrechnen ist die Anwendung von Mathematik auf vorgegebene Sachprobleme und die Mathematisierung konkreter Erfahrungen und Sachzusammenhänge vorwiegend unter numerischem Aspekt.***

Die Offenheit des Begriffs Sachrechnen gilt dabei insbesondere in Bezug auf die angesprochenen Mathematisierungsprozesse, die ja - wenn sie wirklich vom Schüler geleistet werden - zum fruchtbarsten, aber vielleicht auch schwierigsten Arbeiten innerhalb des Mathematikunterrichts führen und die auch in Materialien für Lehrer nur skizzenhaft beschrieben werden können. Sie sind ja auch nicht ein für allemal planbar, sondern müssen

[1] Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung, 1.8.2003, endgültiges In-Kraft-Treten zum 1.8.2006 vorgesehen

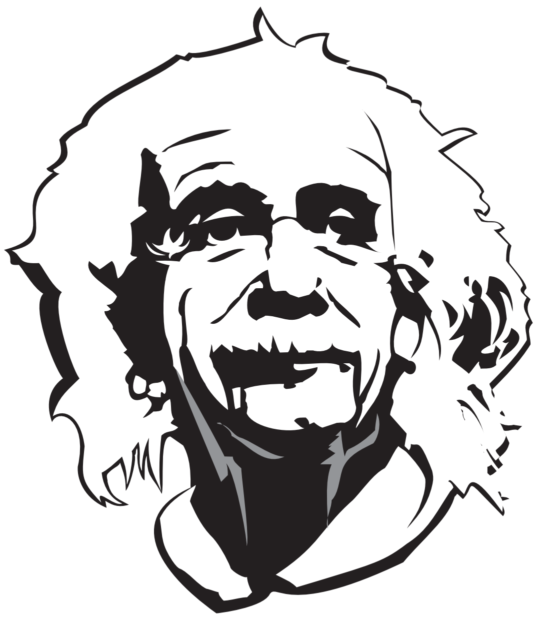
sich in kleinen und größeren Unterrichtsprojekten immer wieder neu aus der konkreten Situation der Klasse ergeben.

Ziel der Lehrveranstaltung „Grundlagen des Sachrechenunterrichts“ soll es nun sein, insbesondere GHR-Lehramtsstudierenden mit **anderen** Unterrichtfächern als Mathematik einen gewissen mathematischen Hintergrund zu solchen Unterrichtsstoffen zu vermitteln und dabei fachdidaktische Inhalte zu integrieren.

Da das *Mathematisieren* in vielen Fällen die Übersetzung einer Sachsituation in eine mathematische *Struktur* erfordert, sollen zunächst die wichtigsten mathematischen Grundbegriffe, wie *Menge*, *Relation, Abbildung, Verknüpfung, ...* und das Umgehen mit mathematischen Notationen zur Auffrischung des Schulwissens behandelt werden.

Alle Wissenschaft ist nur
eine Verfeinerung des
Denkens des Alltags.

– aus: Physik und Realität, 1936 –



Teil I

Mathematische Grundbegriffe

1 Mengen, Relationen, Abbildungen

1.1 Mengen

Der *Mengenbegriff* wird im Mathematikunterricht in der Schule und in allen Anwendungsbereichen der Mathematik ohne strenge Definition verwendet. Georg Cantor (1845 – 1918), der Begründer der transfiniten Mengenlehre hat ihn folgendermaßen gefasst:

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen."

Dies ist wohl auch keine Definition, da die Begriffe „Zusammenfassung" und „wohlunterschiedene Objekte" nicht völlig geklärt sind.

Eine Menge kann man auf verschiedene Arten festlegen. Zunächst kann man eine Menge durch explizite Angabe ihrer Elemente definieren, wobei man diese Elemente zwischen geschweifte Klammern (*Mengenklammern*) schreibt. Man nennt dies die *aufzählende* Mengenbeschreibung. Sie ist eigentlich nur bei endlichen Mengen möglich, wenn auch jedermann klar sein dürfte, welche Menge wohl mit $\{1, 2, 3, \ldots\}$ gemeint ist.

Häufig wird eine Menge A als eine Teilmenge einer umfassenderen Menge M beschrieben, deren Elemente gewisse Eigenschaften $\mathcal{E}(\ldots)$ haben (*aussondernde* Mengenbeschreibung). Man schreibt dann z. B.

$$A = \{x \in M \mid \mathcal{E}(x)\}$$

für die Menge A aller Elemente aus M, welche die Eigenschaft $\mathcal{E}(\ldots)$ haben. Geht aus dem Zusammenhang klar hervor, welche Menge M gemeint ist, so schreibt man dafür auch manchmal kürzer $A = \{x \mid \mathcal{E}(x)\}$.

Beispiele und zusätzliche Vereinbarungen sind:

(1) $P := \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ ist eine **aufzählende** Schreibweise der Menge P aller natürlichen Zweierpotenzen.

$P := \{x \mid x \in \mathbb{N}$ und es gibt $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x = 2^n\}$ ist eine **beschreibende** Schreibweise der Menge P aller natürlichen Zweierpotenzen.

Dabei sind folgende Schreibweisen für Elementbeziehungen üblich:
$x \in A$ heißt: x ist **Element** von A.
$x \notin A$ heißt: x ist **nicht** Element von A.

$P := \{x \in \mathbb{N} \mid$ es gibt $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x = 2^n\}$ ist eine **aussondernde** Schreibweise der Menge P aller natürlichen Zweierpotenzen.

Mit einem der Zeichen $\bigwedge$ („für alle") und $\bigvee$ („es gibt") schreibt man letzteres kürzer in der Form:

$P := \{x \in \mathbb{N} \mid \bigvee_{n \in \mathbb{N}_0} x = 2^n\}$

(2) Kürzel für „und" bzw. (logisches!) „oder" sind $\wedge$ bzw. $\vee$. Die logische Verneinung einer Aussage kann durch ein vorangestelltes $\neg$ gebildet werden.

Weitere Vereinbarungen für Mengen:

(3) $\{\}$ (bzw. $\emptyset$) ist die **leere** Menge (es gibt nur **eine**!).

(4) Mengen A und B heißen genau dann gleich, wenn sie **dieselben** Elemente enthalten, d.h. für alle $a \in A$ gilt $a \in B$ und für alle $b \in B$ gilt $b \in A$.

Kurzschreibweise dafür: $a \in A \Rightarrow a \in B \quad \wedge \quad b \in B \Rightarrow b \in A$.

Noch kürzer: $a \in A \iff a \in B$.

(5) $A \subseteq B$ heißt: A ist (echte oder unechte) **Teilmenge** von B, d.h. für alle $a \in A$ gilt $a \in B$. ($A = B$ ist damit nicht ausgeschlossen!).

$A \subset B$ heißt: A ist **echte** Teilmenge von B, d.h. es gilt $A \subseteq B$ und es gibt $b \in B$ mit $b \notin A$.

(6) Sind A und B Mengen, so heißt $A \cap B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$ der **Durchschnitt** von A und B.

(7) Sind A und B Mengen, so heißt $A \cup B := \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$ die **Vereinigung** von A und B.

(8) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$ heißt die **Mengendifferenz** „A ohne B".

(9) Bezeichnungen für Zahlenmengen (nicht nach DIN-Norm) sind: $\mathbb{N}$ für die natürlichen Zahlen *ohne* 0, $\mathbb{N}_0$ für die natürlichen Zahlen einschließlich der 0, $\mathbb{Z}$ für die ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}^+$ für die Bruchzahlen, $\mathbb{Q}$ für die rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ für die reellen Zahlen.

Umgangssprachlich ist der Durchschnitt der Mengen A und B die Menge aller Elemente, die *sowohl* zu A *als auch* zu B gehören. Die Vereinigungsmenge der Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A *oder* zu B gehören. Das *oder* ist dabei im nicht-ausschließenden Sinn zu verstehen; ein Element gehört also auch dann zu $A \cup B$, wenn es zu A *und* zu B gehört. Es gilt also stets

$$A \cap B \subseteq A \cup B.$$

Offensichtlich ist für jede Menge A

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{und} \quad A \cap A = A$$

sowie

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{und} \quad A \cup A = A.$$

Ferner gelten die folgenden Regeln:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B = B\cap A \\ A\cup B = B\cup A \end{array}\right\} \text{ Kommutativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C \\ A\cup (B\cup C) = (A\cup B)\cup C \end{array}\right\} \text{ Assoziativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C) \\ A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C) \end{array}\right\} \text{ Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap (A\cup B) = A \\ A\cup (A\cap B) = A \end{array}\right\} \text{ Absorptionsgesetze}$$

Diese Regeln folgen unmittelbar aus der logischen Bedeutung von *und* sowie *oder*. Für das erste Distributivgesetz sieht die Begründung so aus:

(1) Gilt $x \in A\cap (B\cup C)$, dann gehört x sowohl zu A als auch zu B *oder* C, also zu A *und* B oder zu A *und* C, also zu $A\cap B$ *oder* $A\cap C$ und damit zu $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2) Gilt $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$, dann gehört x zu A *und* B oder zu A *und* C, also zu A und zu mindestens einer der Mengen B oder C und somit zur Menge $A\cap (B\cup C)$.

(3) Damit haben wir gesehen, dass jedes Element von $A\cap (B\cup C)$ auch ein Element von $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ist und umgekehrt, dass diese Mengen also gleich sind.

Zur Veranschaulichung von Mengenverknüpfungen kann man *Mengenbilder* (auch *Euler-Diagramme* genannt) benutzen: Dabei wird durch gefärbte Bereiche angegeben, welche Teile mit Elementen besetzt werden dürfen. Falls keine der beteiligten Mengen dort Elemente besitzt, sind solche Bereiche trotz der Färbung leer. Beispiele für „Veranschaulichungen“ mit zwei Mengen sind:

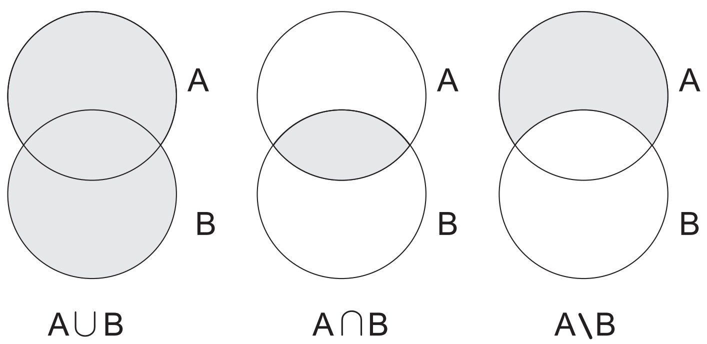


Fig. 1

Die Assoziativgesetze besagen insbesondere, dass man die Schnittmenge und die Vereinigungsmenge von mehr als zwei Mengen bilden und ohne Klammern hinschreiben darf. Die Regeln sind vollkommen symmetrisch bezüglich der Operationen $\cap$ und $\cup$, es liegt also eine andere Struktur vor als beim Addieren und Multiplizieren von Zahlen.

Es gibt Fälle, in denen alle betrachteten Mengen Teilmengen einer gemeinsamen *Grundmenge* M sind. Für $A \subseteq M$ nennt man die Differenzmenge $M \setminus A$ das *Komplement* oder die *Komplementärmenge* bzw. *Ergänzungsmenge* von A in M und bezeichnet sie mit $\overline{A}$, es ist also

$$\overline{A} := M \setminus A.$$

Die Komplementbildung bezieht sich immer auf die zuvor festgelegte Grundmenge M.

Zweimalige Komplementbildung führt wieder zu der ursprünglichen Menge, d. h. es gilt

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ für alle } A \subseteq M.$$

Es gelten die folgenden *Regeln von de Morgan*, benannt nach dem englischen Mathematiker Augustus de Morgan (1806 – 1871):

(1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ für alle $A, B \subseteq M$,

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ für alle $A, B \subseteq M$.

Bei Veranschaulichungen von Komplementbildungen wird oft die gemeinsame Obermenge als alle Teilmengen umfassendes Rechteck gezeichnet:

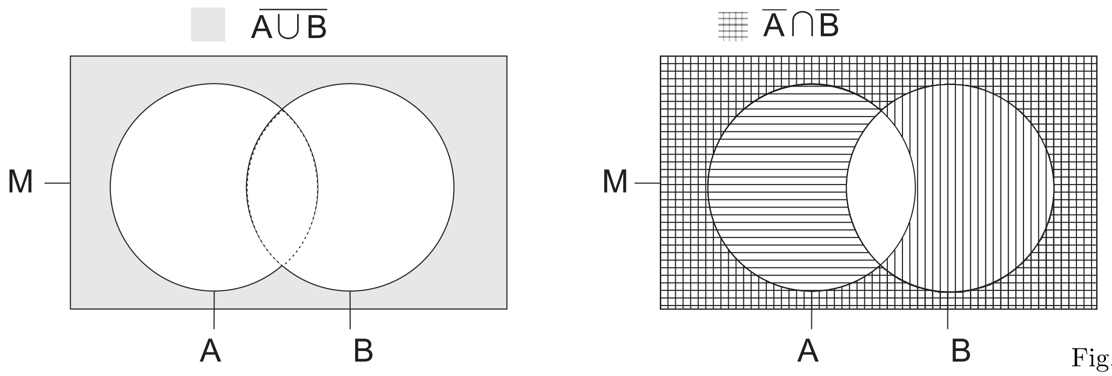


Fig. 1

Obiges Mengendiagramm zeigt, warum die erste der *de Morgan*schen Regeln richtig ist.

Weniger offensichtliche Regeln über das „Rechnen“ mit Mengen muss man natürlich beweisen, indem man auf die Definitionen der Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ zurückgreift.

Beispiel: Es gilt für alle Mengen A, B, C

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \text{ und } x \notin B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ und } x \notin B \text{ und } x \notin C \\ &\iff (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ und } (x \in A \text{ und } x \notin C) \\ &\iff x \in A \setminus B \text{ und } x \in A \setminus C \\ &\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Dieser Beweis zeigt, dass Aussagen der „Mengenalgebra“ auf Aussagen der Logik zurückgeführt werden, in denen die „logischen Verknüpfungen“ *und*, *oder* und *nicht* und die logische Äquivalenz „ $\iff$ “ sowie die logische Implikation „$\Longrightarrow$“ eine Rolle spielen.

Man kann die Mengenverknüpfungen $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ auch an Hand von *Inzidenztafeln* definieren, aus welchen zu entnehmen ist, wann eine Element zu $A \cap B$ usw. gehört ($\in$) oder nicht gehört ($\notin$), falls es zu A bzw. B gehört ($\in$) oder nicht gehört ($\notin$):

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A \setminus B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Untersucht man eine Beziehung, in der drei Mengen A, B, C eine Rolle spielen, so muss man in der Inzidenztafel 8 Fälle unterscheiden. Wir beweisen die Beziehung aus dem vorangehenden Beispiel mit Hilfe einer Inzidenztafel:

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
				$*$			$*$

In den mit $*$ gekennzeichneten Spalten ergeben sich die gleichen Werte, es gilt also

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

und daher

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Bei diesem Beispiel ist ansich die Verwendung einer Inzidenztafel unnötig, in komplizierteren Fällen kann die Inzidenztafel aber sehr nützlich sein.

Wir kehren nochmals zum Begriff der Menge zurück. Man kann Mengen bilden, deren Elemente selbst Mengen sind, beispielsweise

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Dies ist die Menge aller Teilmengen von $\{1,2,3\}$. Diese werden wir im folgenden Abschnitt die *Potenzmenge* von $\{1,2,3\}$ nennen.

Man kann auch Objekte sehr unterschiedlicher Natur zu einer Menge zusammenfassen, etwa $\{\mathbb{N},\ 17,\ \text{Susanne}\}$. Es fragt sich allerdings, welchen Nutzen man davon hat.

Nicht jede sprachliche oder sonstige Beschreibung einer „Menge“ definiert wirklich eine Menge. Das berühmteste Beispiel hierfür ist die *russellsche Antinomie*:

Es sei A die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Offensichtlich muss entweder $A \notin A$ oder aber $A \in A$ gelten. Gilt $A \notin A$, dann muss aufgrund der „Definition“ von A doch $A \in A$ gelten. Gilt aber $A \in A$, dann muss aufgrund der „Definition“ von A wieder $A \notin A$ gelten. Man verwickelt sich also in endlose Widersprüche und muss einsehen, dass die oben „definierte“ Menge nicht existiert.

Earl Bertrand Russell (1872 – 1970) gilt als einer der größten Grundlagenforscher des letzten Jahrhunderts. Zusammen mit seinem Lehrer Alfred Whitehead (1861 – 1947) schrieb er die *Principia Mathematica*, in dem die Grundlagen der Logik und damit der modernen Mathematik behandelt wurden.

Zur Vermeidung des obigen Widerspruchs reicht es, die Bildung von Mengen nur dann zu erlauben, wenn die dafür zugelassenen Elemente bereits einer Menge angehören.

1.2 Potenzmengen und Produktmengen

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M nennt man die *Potenzmenge* von M und bezeichnet sie mit $\mathcal{P}(M)$. Der Name rührt daher, dass bei einer endlichen Menge M mit m Elementen die Menge $\mathcal{P}(M)$ stets 2^m Elemente besitzt (man kann dies mit dem *binomischen Lehrsatz beweisen*).

Beispiele:

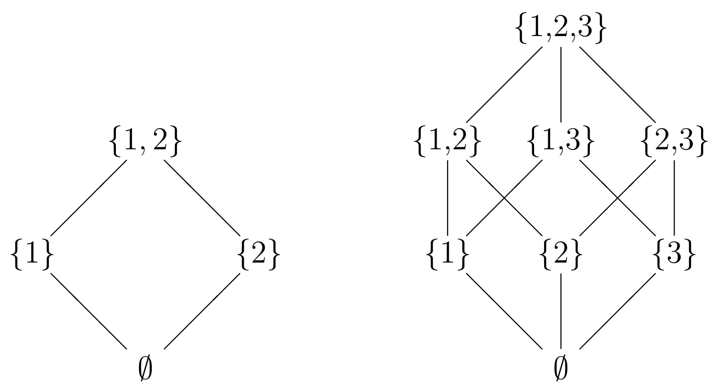
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (Menge mit genau *einem* Element, nämlich $\emptyset$);

$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$;

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$;

$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Die Potenzmenge einer endlichen Menge M kann man in einem *Teilmengendiagramm* von M darstellen:



$\mathcal{P}(\{1,2\})$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

Bei großen Elementezahlen wird dieses Diagramm natürlich sehr unübersichtlich.

Sind A und B Mengen, so heißt die Menge aller Paare
$A \times B := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A \wedge x_2 \in B\}$ ihr **kartesisches Produkt**.

Wir merken an, dass ein *Paar* etwas anderes als eine zweielementige Menge ist. In einem

Paar (a, b) kommt es auf die Reihenfolge der Elemente an, und es ist zulässig, dass a gleich b ist. Man daher nicht von den „Elementen“ des Paares, wie wir es gerade getan haben, sondern von seinen *Koordinaten*. Statt (a, b) schreibt man auch $(a; b)$ oder $(a|b)$, stets benutzt man aber *runde Klammern*, um ein Paar anzugeben.

Sind $A = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m\}$ und $B = \{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\}$ endliche Mengen mit m bzw. n Elementen, dann kann man die mn Elemente von $A \times B$ in einer Tafel angeben:

$$\begin{array}{rr|cccc} & & B: & & & \\ & & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \hline A: & x_1 & (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \ldots & (x_1, y_n) \\ & x_2 & (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \ldots & (x_2, y_n) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & x_m & (x_m, y_1) & (x_m, y_2) & \ldots & (x_m, y_n) \end{array}$$

Das kartesische Produkt

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

von n Mengen $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ definiert man als die Menge aller *n-Tupel* (*Tripel, Quadrupel, Quintupel, Sextupel*, ...)

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \quad \text{mit } a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n.$$

Die Elemente $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ nennen wir wieder die *Koordinaten* des n-Tupels.

Es ist klar, dass man $A \times B$ und $B \times A$ unterscheiden muss, wenn A von B verschieden ist und keine der beiden Mengen leer ist. Es ist auch klar, dass die Beziehung $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ für jede Menge A gilt. Die Mengen

$$A \times B \times C, \quad (A \times B) \times C, \quad A \times (B \times C)$$

muss man unterscheiden; die erste besteht aus Tripeln (a, b, c), die zweite aus Paaren $((a, b), c)$, die dritte ebenfalls aus Paaren, nämlich $(a, (b, c))$ mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Sind die Faktoren in einem kartesischen Produkt gleich, dann benutzt man die Potenzschreibweise:

$$A^n := A \times A \times \ldots \times A \quad (n \text{ Faktoren}).$$

Beispielsweise ist $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Paare reeller Zahlen, $\mathbb{R}^3$ die Menge aller Tripel reeller Zahlen. (Diesen Produktmengen begegnet man in der analytischen Geometrie.)

1.3 Relationen

Werden *Beziehungen* zwischen realen oder auch fiktiven Objekten sprachlich beschrieben, so ist das Hilfsmittel ein Text mit Lücken, in die man nach gewissen Auswahlregeln Namen von Objekten einsetzen darf. Werden alle Lücken gefüllt, so muss der Text in eine Aussage übergehen (d.h. er läßt sich entweder in die Kategorie *wahr* oder in *falsch* einordnen.)

Beispiel 1:

Alle Elemente $a, b \in \mathbb{Q}$ lassen sich mit der *Kleinerbeziehung* vergleichen:

$$\begin{array}{ccc} a & \leq & b \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{1. Stelle} & & \text{2. Stelle} \end{array} \qquad \text{bedeutet: „}a\text{ ist kleiner oder gleich }b\text{“}$$

Diese Beziehung läßt sich als *Teilmenge* von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ auffassen, in der alle Paare $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $a \leq b$ zusammengefaßt sind.

Beispiel 2:

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teilerbeziehung erklärt durch

$$a \text{ teilt } b \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } y \in \mathbb{Z} \text{ mit } a \cdot y = b \;\; \text{(die Kurzschreibweise dafür ist } a|b.)$$

Die Beziehung lässt sich als Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auffassen, in der alle Paare $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $a|b$ zusammengefasst sind.

Beispiel 3:

Es sei W die Menge aller deutschen Ortschaften mit Bahnhof. Mit P sei die Menge aller Preise von 0,00 € bis 1000,00 € bezeichnet. Dann ist die folgende „dreistellige“ Beziehung von Interesse:

$$(*) \quad \text{Die einfache Fahrt mit der Bahn von} \quad \underset{\text{1. Stelle}}{\overset{a}{\uparrow}} \quad \text{nach} \quad \underset{\text{2. Stelle}}{\overset{b}{\uparrow}} \quad \text{kostet} \quad \underset{\text{3. Stelle}}{\overset{c}{\uparrow}} \quad .$$

Hier sind an den beiden ersten Stellen Einsetzungen aus W und an der dritten Stelle Einsetzungen aus P zulässig. Faßt man alle „Tripel“ (a, b, c) aus $W \times W \times P$ zu einer Menge F zusammen, für die $(*)$ eine wahre Aussage ist, so beschreibt F bezüglich der vorgegebenen Mengen dieselbe Beziehung wie $(*)$. Daß die sprachliche Variante $(*)$ außerhalb dieses Bereichs nicht präzise genug ist, zeigt sich beim Übergang von W zur Menge V aller deutschen Ortschaften: Über den Wahrheitswert einer Aussage des Typs

„Die Fahrt von Adorf nach Bdorf mit der Bahn kostet 10,00,€.“

kann man dann streiten, wenn es von Adorf nach Bdorf keine Bahnverbindung gibt. Wer den Text in dem Sinne liest, daß man mit der Bahn von Adorf nach Bdorf fährt *und* dafür 10 € bezahlt, hält die Aussage für *falsch*. Wird dagegen der Text als *bedingte* Aussage verstanden, so lautet diese:

„*Wenn* man von Adorf nach Bdorf mit der Bahn fährt, *dann* kostet das 10 €.“

Bei dieser Interpretation erhält man nach den Regeln der Aussagenlogik eine *wahre* Aussage, da die Voraussetzung „wenn ...“ falsch ist und alle derartigen Aussagen als wahr gelten (lateinisch: *ex falso quodlibet*).

Wir definieren zur Vermeidung von Unschärfen Beziehungen erst einmal mit Hilfe von Mengen:

Es seien zwei Mengen A, B gegeben. Eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $A \times B$ nennt man eine *Relation zwischen A und B*. Ist $A = B$, so spricht man von einer *Relation in A*. Statt $(a, b) \in R$ schreiben wir kürzer aRb und ersetzen in konkreten Beispielen R durch ein geeignetes Symbol.

Eine Relation R in einer Menge A heißt

— *reflexiv*, wenn aRa für alle $a \in A$,

— *antireflexiv* (oder *irreflexiv*), wenn aRa für *kein* $a \in A$,

— *symmetrisch*, wenn aus aRb stets bRa folgt,

— *antisymmetrisch*, wenn aus aRb *und* bRa stets $a = b$ folgt,

— *transitiv*, wenn aus aRb *und* bRc stets aRc folgt.

Man beachte, dass *anti*reflexiv nicht das logische Gegenteil von reflexiv bedeutet. Die Relation R ist *nicht reflexiv*, wenn aRa *nicht für alle* $a \in A$ gilt. Diese Forderung ist schwächer als die Forderung, aRa solle *für alle* $a \in A$ *nicht* gelten. Entsprechend bedeutet *anti*symmetrisch mehr als nur *nicht symmetrisch.*

Eine Relation R in A, welche

reflexiv, symmetrisch und transitiv

ist, nennt man eine *Äquivalenzrelation* in A.

Für $a \in A$ bezeichnen wir dann mit $[a]_R$ die Menge aller $x \in A$ mit xRa, also

$$[a]_R := \{x \in A \mid xRa\},$$

und nennen $[a]_R$ die *Äquivalenzklasse* von A bezüglich der Äquivalenzrelation R mit dem *Vertreter* a. Die wichtigsten Eigenschaften von Äquivalenzklassen fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 1: Ist A eine nichtleere Menge und R eine Äquivalenzrelation in A, dann gilt für alle $a, b \in A$:

1) $[a]_R \neq \emptyset$
2) $[a]_R = [b]_R \iff aRb$
3) $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ für $[a]_R \neq [b]_R$.
4) Die Vereinigungsmenge aller Klassen $[a]_R$ mit $a \in A$ ist A.

Beweis:

1) *Wegen* aRa *ist* $a \in [a]_R$ *für* $a \in A$.
2) *Ist* $[a]_R = [b]_R$*, dann ist* $a \in [b]_R$*, also* aRb*. Ist andererseits* aRb *und* $x \in [a]_R$*, also* xRa*, dann gilt aufgrund der Transitivität auch* xRb *und damit* $x \in [b]_R$*. Also ist* $[a]_R \subseteq [b]_R$*. Ebenso folgt* $[b]_R \subseteq [a]_R$ *und daher* $[a]_R = [b]_R$.
3) *Ist* $x \in [a]_R \cap [b]_R$*, also* xRa *und* xRb*, so ist aufgrund der Symmetrie und der Transitivität auch* aRb *und damit* $[a]_R = [b]_R$.
4) *Jedes* $a \in A$ *liegt in genau einer Klasse, nämlich in* $[a]_R$.

□

Ist in einer Menge A eine Äquivalenzrelation R gegeben, so zerfällt A also bezüglich R in disjunkte Klassen. Ist umgekehrt eine Menge A in disjunkte Klassen zerlegt, dann wird dadurch eine Äquivalenzrelation R in A definiert: Man setze aRb genau dann, wenn a und b in derselben Klasse liegen. Daher ist eine Klassenzerlegung von A begrifflich dasselbe wie eine Äquivalenzrelation in A.

Wichtige Beispiele für solche Klassenbildungen sind:

a) Die durch $a \equiv b \bmod m \quad :\iff \quad m|b-a$ Kongruenz modulo m ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{Z}$. Die Äquivalenzklassen nennt man *Restklassen* mod m.

b) Die „Differenzengleichheit“ von Paaren natürlicher Zahlen ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{N}^2$. Die Äquivalenzklassen sind *per definitionem* die *ganzen Zahlen.*

c) Die „Quotientengleichheit“ von Paaren natürlicher Zahlen ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{N}^2$. Die Äquivalenzklassen sind *per definitionem* die *Bruchzahlen.*

Eine Relation R in A, welche

reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

ist, nennt man eine *Ordnungsrelation* in A.

Beispiele für Ordnungsrelationen sind:

a) Die Teilbarkeitsrelation $|$ (Ordnungsrelation in $\mathbb{N}$).

b) Die $\leq$ -Relation (Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$).

c) Die Inklusionsrelation $\subseteq$ (Ordnungsrelation in jeder Menge, deren Elemente selbst Mengen sind).

Ersetzt man in der Definition des Begriffs der Ordnungrelation *reflexiv* durch *antireflexiv*, dann erhält man den Begriff der *strengen Ordnungsrelation*. In einer solchen kann nie gleichzeitig aRb *und* bRa gelten, weil dann aus der Transitivität aRa folgen würde. Also kann man eine strenge Ordnungsrelation als eine antireflexive, transitive Relation definieren. Beispiele hierfür sind die *echte* Teilbarkeit, die *echte* Kleinerbeziehung ($<$) und die *echte* Mengeninklusion ($\subset$).

Ist R eine Ordnungsrelation in A und gilt für zwei verschiedene Elemente $a, b \in A$ entweder aRb oder bRa, dann nennt man a, b *vergleichbar* bezüglich R, andernfalls *unvergleichbar*. Sind je zwei Elemente aus A vergleichbar, dann nennt man die Ordungsrelation R *linear*. Die Teilbarkeitsrelation in $\mathbb{N}$ ist nicht linear, die $\leq$ -Relation in $\mathbb{R}$ ist linear.

1.4 Abbildungen

Ordnet man *jedem* Element der Menge A *genau ein* Element der Menge B zu, dann nennt man diese eindeutige Zuordnung eine *Abbildung* von A in B. Als Variable für Abbildungen benutzen wir hier kleine griechische Buchstaben. Ist α eine Abbildung von A in B, so schreiben wir

$$\alpha : A \longrightarrow B.$$

Wird bei dieser Abbildung dem Element $a \in A$ das Element $b \in B$ zugeordnet, dann schreiben wir

$$\alpha : a \mapsto b.$$

Man schreibt dann auch

$$b = \alpha(a) \quad \text{oder} \quad b = a^{\alpha}.$$

In verschiedenen Bereichen der Mathematik benutzt man synonym für *Abbildung* auch die Bezeichnungen *Funktion* oder *Operator*.

Man kann eine Abbildung auch als eine Relation R auffassen, bei der $a\,R\,b$ und $a\,R\,c$ mit $b \neq c$ unmöglich ist und es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $a\,R\,b$ gibt. Dies ist eine Präzisierung des *eindeutigen Zuordnens*.

Bei einer Abbildung $\alpha : A \to B$ nennt man A die *Ausgangsmenge* (oder auch *Definitionsbereich*) und B die *Zielmenge* (oder auch *Wertebereich*) von α.

Das jeweils $a \in A$ unter α zugeordnete Element $\alpha(a) \in B$ wird das *Bild* oder der *Wert* von a genannt.

Ein (nicht notwendig auf A eingeschränktes) Verfahren, mit dem sich zu jedem $a \in A$ das Bild $\alpha(a)$ bestimmen läßt, wird *Zuordnungsvorschrift* der Abbildung genannt und in der Form $\alpha : a \mapsto \alpha(a)$ ebenfalls mit dem Symbol α angegeben. Wendet man die Vorschrift auf alle $a \in A$ an, so erhält man mit

$$\alpha(A) := \{\alpha(a) \mid a \in A\}$$

das sogenannte *Bild der Ausgangsmenge*. Im Zusammenhang damit interessiert man sich für folgende Eigenschaften:

Definition 1.1

Es sei $\alpha : A \to B$ eine Abbildung.

(1) α heißt *injektiv* (oder eineindeutig) von A nach B, wenn für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt: $\alpha(a) \neq \alpha(b)$.

(2) α heißt *surjektiv* (oder Abbildung von A *auf* B), wenn $\alpha(A) = B$ gilt.

(3) α heißt *bijektiv* (oder *eineindeutig von A auf B*), wenn α injektiv und surjektiv ist.

Die Surjektivität einer Abbildung $\alpha : A \to B$ hängt nur davon ab, ob die Zielmenge B von vorneherein klein genug gewählt ist. Ist α nicht injektiv, so kann man zwecks Erzwingung der Injektivität zu einer Abbildung mit kleinerer Ausgangsmenge E übergehen.
Die Injektivität einer Abbildung $\alpha : A \to B$ läßt sich auch so formulieren:

$$\alpha(a) = \alpha(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

Weitere gebräuchliche Bezeichnungen bei einer Abbildung $\alpha : A \to B$ sind:

Ist U eine Teilmenge von A, so heißt

$$\alpha(U) := \{\alpha(u) \mid u \in U\}$$

das *Bild* von U unter α.

Ist V eine Teilmenge von B, so heißt

$$\alpha^{-1}(V) := \{a \in A \mid \alpha(a) \in V\}$$

das *Urbild* von V unter α (die Menge $\alpha^{-1}(V)$ kann leer sein!).

Ist α bijektiv, so heißt die durch

$$\alpha^{-1}(b) := a \text{ mit } \alpha(a) = b$$

definierte Abbildung $\alpha^{-1} : B \to A$ die *Umkehrabbildung* von α.

Beispiel 1: Ordnet man jeder natürlichen Zahl ihre Quersumme zu, dann liegt eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ vor:

$$a \mapsto Q(a) \ (a \in \mathbb{N}).$$

Beispiel 2: Ordnet man jeder natürlichen Zahl ihren Rest bei Division durch 7 zu, dann liegt eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ vor.

Beispiel 3: Die Bildung des Produkts von zwei rationalen Zahlen kann man als eine Abbildung von $\mathbb{Q}^2$ in $\mathbb{Q}$ verstehen:

$$(a, b) \mapsto a \cdot b \quad ((a, b) \in \mathbb{Q}^2).$$

Beispiel 4: Bildet man zu zwei natürlichen Zahlen die Summe ihrer Quadrate, so liegt eine Abbildung von $\mathbb{N}^2$ in $\mathbb{N}$ vor:

$$(a, b) \mapsto a^2 + b^2.$$

Für die Abbildung Q in Beispiel 1 ist

$$\begin{aligned}
Q^{-1}(1) &= \{1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots\},\\
Q^{-1}(2) &= \{2,\ 11,\ 20,\ 101,\ 200,\ 1001,\ 2000,\ \ldots\},\\
Q^{-1}(3) &= \{3,\ 12,\ 21,\ 30,\ 102,\ 111,\ 120,\ 201,\ 210,\ 300,\ \ldots\}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Abbildung in Beispiel 4 mit α, dann ist z. B.

$$\begin{aligned}
&\alpha^{-1}(1) = \emptyset, \quad \alpha^{-1}(2) = \{(1,1)\}, \quad \alpha^{-1}(3) = \emptyset, \quad \alpha^{-1}(4) = \emptyset,\\
&\alpha^{-1}(5) = \{(1,2),(2,1)\}, \ldots, \alpha^{-1}(65) = \{(1,8),(8,1),(4,7),(7,4)\}, \ldots
\end{aligned}$$

Bei einer surjektiven oder bijektiven Abbildung spricht man von einer Abbildung von A *auf* (statt *in*) B.

Keine der Abbildungen in den Beispielen 1 bis 4 ist injektiv. Die Abbildungen in den Beispielen 1 bis 3 sind surjektiv, die Abbildung in Beispiel 4 ist aber nicht surjektiv.

Wir nennen nun einige weitere Beispiele, die uns auch später noch begegnen werden.

Beispiel 5: Mit $\mathcal{S}_n$ bezeichnen wir die Menge aller Bijektionen der Menge $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ auf sich. Eine solche Abbildung α schreibt man in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \ldots & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

Da es sich um eine Bijektion handelt, treten in der unteren Zeile dieses Symbols wieder alle Zahlen von 1 bis n auf, wobei aber im Allgemeinen die Reihenfolge geändert ist. Daher nennt man eine solche Abbildung auch eine *Permutation* der Menge $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$. Es gibt genau

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

(„n Fakultät“) solche Permutationen, denn für $\alpha(1)$ gibt es n Möglichkeiten, für $\alpha(2)$ gibt es dann jeweils noch $n-1$ Möglichkeiten, für $\alpha(3)$ gibt es dann jeweils noch $n-2$ Möglichkeiten usw. Von den Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ist jede die Umkehrabbildung der anderen: Die erste bildet 1 auf 3 ab, die zweite 3 auf 1 usw.

Beispiel 6: Die Funktion $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, deren Graph im Koordinatensystem eine Normalparabel ist, ist weder injektiv noch surjektiv. Wählen wir als Zielmenge aber die Menge $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, dann ist f surjektiv; beschränken wir auch die Ausgangsmenge auf $\mathbb{R}_0^+$, dann ist die Funktion injektiv und damit bijektiv. Ihr Graph ist dann aber nur noch der „rechte Ast“ der Normalparabel.

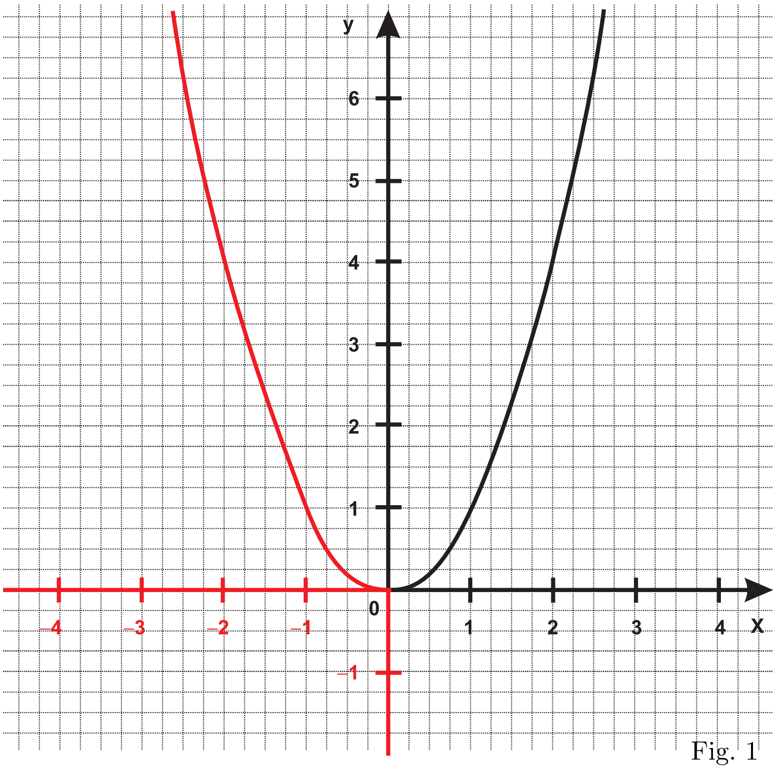


Fig. 1

1.5 Verkettung von Abbildungen

Sind $\alpha : A \longrightarrow B$ und $\beta : B \longrightarrow C$ zwei Abbildungen, dann ist $\gamma : A \longrightarrow C$ mit

$$\gamma(a) = \beta(\alpha(a))$$

eine Abbildung von A in C:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \\
a \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend right, "\beta \circ \alpha"'] & \alpha(a) \arrow[r, "\beta"'] & \beta(\alpha(a))
\end{tikzcd}$$

Man nennt dies die *Hintereinanderschaltung* oder *Verkettung* von α mit β und schreibt dafür $\beta \circ \alpha$ (lies „β nach α“). Es ist also

$$(\beta \circ \alpha)(a) = \beta(\alpha(a)) \text{ für } a \in A.$$

Beispiel 1: Es seien

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

zwei Bijektionen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ auf sich (vgl. Beispiel 5 im vorigen Abschnitt). Dann gilt

$$\alpha \circ \beta : \quad \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 5 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 4 \mapsto 5 \\ 5 \mapsto 3 \mapsto 3 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \beta \circ \alpha : \quad \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \mapsto 5 \\ 2 \mapsto 4 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 5 \mapsto 3 \\ 5 \mapsto 1 \mapsto 1 \end{array} ,$$

also

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2: Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist die Verkettung der Funktion g mit $g(x) = 1 + x^2$ und der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x}$. Es ist $f(x) = h(g(x))$, also $f = h \circ g$. Für die Funktion $g \circ h$ gilt

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 .$$

Die Funktion $g \circ h$ ist im Gegensatz zu $h \circ g$ nur für $x \neq 0$ definiert.

Die Beispiele zeigen deutlich, dass es beim Verketten von Abbildungen auf die Reihenfolge ankommt. Dies ist ohnehin klar, da in den anfangs eingeführten Bezeichnungen zwar $\beta \circ \alpha$ definiert ist, $\alpha \circ \beta$ aber nur, wenn die Zielmenge C von β eine Teilmenge der Ausgangsmenge A von α ist. Das Verketten von Abbildungen ist also i. Allg. nicht kommutativ.

Das Verketten von Abbildungen ist aber assoziativ, d. h., es gilt für drei Abbildungen $\alpha : A \longrightarrow B,\ \beta : B \longrightarrow C,\ \gamma : C \longrightarrow D$ stets

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

Das folgt sofort aus der Definition des Verkettens: Für jedes $a \in A$ gilt

$$\begin{array}{l} ((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)(a) = (\gamma \circ \beta)(\alpha(a)) = \gamma(\beta(\alpha(a))), \\ (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))(a) = \gamma((\beta \circ \alpha)(a)) = \gamma(\beta(\alpha(a))). \end{array}$$

Unter den Abbildungen einer Menge A *in sich* spielt die *identische Abbildung* id_A, die jedes Element von A auf sich selbst abbildet, eine besondere Rolle. Ist α eine Abbildung von A in B, dann gilt offensichtlich $\mathrm{id}_B \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \mathrm{id}_A$.

Ist α eine Bijektion von A auf B und α^{-1} die Umkehrabbildung, dann gilt

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{id}_B \quad \text{und} \quad \alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_A.$$

Man erkennt leicht, dass die Verkettung zweier Injektionen wieder eine Injektion und die Verkettung zweier Surjektionen wieder eine Surjektion ist. Also gilt dies auch für Bijektionen. Sind $\alpha : A \longrightarrow B$ und $\beta : B \longrightarrow C$ Bijektionen, dann gilt für die Verkettung

$$(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}.$$

Die Umkehrung einer Verkettung ist also die Verkettung der Umkehrungen in umgekehrter Reihenfolge. Denn $\beta \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = \mathrm{id}_B$ und $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Aufgaben

1. In welcher Form haben Sie in Ihrer Schulzeit im Mathematikunterricht *Mengenschreibweisen* verwendet? Erinnern Sie sich an das Gleichungslösen und Schreibweisen in der Oberstufenanalysis.

2. Beschreiben Sie drei Rechengesetze für Potenzen
a) mit Worten,
b) formelmäßig mit Hilfe von Variablen.

3. *So ein Grusel (wo steckt der Fehler?):*

$$\begin{array}{rcl}
a & = & 1 \\
 & \Downarrow & \text{beidseitige Addition von } a^2-2 \\
a+(a^2-2) & = & 1+(a^2-2) \\
 & \Downarrow & \text{beidseitiges Zusammenfassen} \\
a-1\,+\,a^2-1 & = & a^2-1 \\
 & \Downarrow & \text{dritte binomische Formel anwenden} \\
a-1\,+\,(a+1)(a-1) & = & (a+1)(a-1) \\
 & \Downarrow & \text{auf beiden Seiten durch } a-1 \text{ dividieren} \\
1\,+\,a+1 & = & a+1 \\
 & \Downarrow & \text{auf beiden Seiten } a+1 \text{ subtrahieren} \\
1 & = & 0 \ \ \text{???????????????}
\end{array}$$

4. Im folgenden Rechenknobel bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es hat nur eine Lösung!

$$\begin{array}{rcccc}
 & \text{S} & \text{I} & \text{E} & \text{L} \\
- & \text{L} & \text{E} & \text{I} & \text{S} \\
\hline
 & \text{I} & \text{L} & \text{S} & \text{E}
\end{array}$$

5. In einem Knobelbuch steht folgende Aufgabe:
„A und B haben zusammen weniger Geld als C und D zusammen,
B und D haben zusammen weniger Geld als A und C zusammen,
A und D haben zusammen weniger Geld als B und C zusammen.
Wer hat dabei das meisten Geld?“
Versuchen Sie diese Aufgabe zu lösen.

6. a) Begründen Sie die Richtigkeit der Aussage „sind die Mengen A und B Teilmengen einer gemeinsamen Obermenge C, so gilt $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$“

a) durch ein Mengendiagramm,

b) mit einer Inzidenztafel.

7. a) Bestimmen Sie alle Mengen X mit $\{1,2\} \subseteq X \subset \{1,2,3,4,5\}$.
b) Begründen Sie, dass $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^n$ aus genau 10^n Elementen besteht.

8. a) Bestimmen Sie die Eigenschaften der Relation $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathcal{E}(x,y)\}$ in $\mathbb{Z}$, wenn $\mathcal{E}(x,y)$ folgende Bedeutung hat:
(1) $|x| \leq |y|$ (2) $|x-y| \leq 100$

b) Es sei
$A = \{$Basel, Stuttgart, Mannheim, Koblenz, Köln$\}$,
$B = \{$Neckar, Main, Mosel, Rhein$\}$.
Geben Sie die Paare der Relation „Stadt x liegt am Fluss y“ an.

9. a) Prüfen Sie, ob eine Ordnungsrelation in einer gegebenen (nichtleeren) Menge erwachsener Bundesbürger vorliegt:
(1) „x ist höchstens ein Jahr älter als y“
(2) „x ist mindestens so alt wie y“

b) Bildet man die Quersumme $Q(n)$ einer natürlichen Zahl n, dann die Quersumme $Q(Q(n))$ von $Q(n)$ usw., dann erhält man schließlich eine einstellige Zahl, welche wir mit $\overline{Q}(n)$ bezeichnen. Die Relation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow \overline{Q}(a) = \overline{Q}(b)$$

ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{N}$.
a) Nennen Sie die drei kleinsten Zahlen aus jeder Äquivalenzklasse.
b) Aus welchen Zahlen besteht die Klasse $\{n \in \mathbb{N} \mid \overline{Q}(n) = 9\}$?

10. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen (mit Mitteln der Schulmathematik) auf Injektivität und Surjektivität.
a) $\alpha : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\alpha(n) := n^2$ b) $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $\alpha(z) := 2z - 5$
c) $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) := 2^x$ d) $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) := x^3 - x$

11. Geben Sie für die Abbildung Q in Beispiel 1 jeweils die fünf kleinsten Zahlen aus den Urbildmengen $Q^{-1}(4)$, $Q^{-1}(5)$ und $Q^{-1}(6)$ an.

12. Geben Sie jeweils zwei Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ an, die (1) injektiv, aber nicht surjektiv (2) surjektiv, aber nicht injektiv (3) bijektiv sind.

13. Es seien

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen der Menge $\{1,2,3,4,5\}$. Bestimmen Sie für diese Permutationen
a) $\alpha \circ \beta$ b) $\beta \circ \alpha$ c) $\beta \circ \alpha \circ \alpha$ d) $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$

2 Algebraische Strukturen

2.1 Gruppen

In der Algebra wird der Abbildungsbegriff unter anderem bei der Definition von „Verknüpfungsoperationen“ in einer Menge A verwendet, da sich jede solche Operation als Abbildung mit Definitionsbereich $A \times A$ auffassen läßt:

Definition 2.1

Ist A eine nichtleere Menge, so heißt jede Abbildung

$$* : A \times A \to A$$

eine (innere) *Verknüpfung* in A. Wird einem Paar (a, b) durch $*$ ein Element $c \in A$ zugeordnet, so schreibt man dafür kurz $c = a * b$.

Ein Paar $(A, *)$ wird genau dann ein *Verknüpfungsgebilde* oder *algebraische Struktur* genannt, wenn A eine nichtleere Menge und $*$ eine Verknüpfung in A ist.

Bei Verknüpfungsgebilden interessiert man sich dafür, ob die Verknüpfung Eigenschaften besitzt, die Analogien zum Rechnen mit Zahlen erlauben:

Definition 2.2

$(G, *)$ heißt genau dann eine *Gruppe*, wenn gilt:

(G0) $(G, *)$ ist ein Verknüpfungsgebilde. (*Abgeschlossenheit bzgl.* $*$)

(G1) $a * (b * c) = (a * b) * c$ gilt für alle $a, b, c \in G$. (*Assoziativität von* $*$)

(G2) Es existiert $e \in G$ mit der Eigenschaft:
$a * e = a$ gilt für alle $a \in G$.
(*Existenz eines* **neutralen Elements** *bzgl.* $*$)

(G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$ mit der Eigenschaft $a * a^{-1} = e$.
(*Existenz aller* **inversen Elemente**)

Gilt sogar $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, so nennt man die Gruppe $(G, *)$ *kommutativ* oder *abelsch*.

Gilt in einer Gruppe $(G, \star)$ das Kommutativgesetz, dann heißt die Gruppe *kommutativ* oder *abelsch*.

Die Bezeichnung „abelsch“ wurde zu Ehren von NIELS HENRIK ABEL (1802 – 1829) gewählt, einem sehr bedeutenden norwegischen Mathematiker. Abel hat mit Hilfe der Gruppentheorie bewiesen, dass eine algebraische Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

im Allgemeinen nicht mit Hilfe von Wurzelausdrücken zu lösen ist, wenn der Grad n größer als 4 ist.

Ist U eine nichtleere Teilmenge von G, welche bezüglich der Verknüpfung $*$ in G selbst ein Verknüpfungsgebilde ist, und ist $(U,*)$ wieder eine Gruppe, dann nennt man sie eine *Untergruppe* von $(G,*)$. Genau dann bildet also die Teilmenge U von G eine Untergruppe von $(G,\star)$, wenn gilt:

(i) $\quad a,b \in U \Longrightarrow a * b \in U,$

(ii) $\quad e \in U,$

(iii) $\quad a \in U \Longrightarrow a^{-1} \in U.$

Dabei ist e das neutrale Element von $(G,*)$, und a^{-1} ist das zu a inverse Element in $(G,*)$. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes in $(U,*)$ ist dadurch gewährleistet, dass es in der umfassenderen Struktur $(G,*)$ gilt. Ist $(G,*)$ kommutativ, dann gilt dies selbstverständlich auch für $(U,*)$.

Man kann die drei Bedingungen (i), (ii), (iii) durch eine einzige ersetzen:

Satz 2.1

Genau dann bildet die nicht-leere Teilmenge U von G eine Untergruppe von $(G,*)$, wenn gilt:

$$(*) \qquad a,b \in U \Longrightarrow a \star b^{-1} \in U.$$

Beweis:

Aus (i) bis (iii) folgt $(*)$, wie man sofort sieht.
Wegen $U \neq \emptyset$ existiert mindestens eine Element $a \in U$.
Aus $(*)$ folgt dann $a * a^{-1} (= e) \in U$, also (ii).
Mit $b \in U$ ist dann nach $(*)$ auch $e * b^{-1} (= b^{-1}) \in U$, also gilt (iii).
Mit $a,b \in U$ liefert $(*)$ dann, dass $a * (b^{-1})^{-1} (= a * b) \in U$, also gilt auch (i).

Beispiel 1: Die Menge der reellen Zahlen bezüglich der Addition bildet die kommutative Gruppe $(\mathbb{R},+)$. Die Menge der rationalen Zahlen bildet bezüglich der Addition die Untergruppe $(\mathbb{Q},+)$ von $(\mathbb{R},+)$. Die Menge der ganzen Zahlen bezüglich der Addition ist die Untergruppe $(\mathbb{Z},+)$ von $(\mathbb{Q},+)$. Die Menge der durch 17 teilbaren ganzen Zahlen bildet wiederum eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$, denn es gilt für $a,b \in \mathbb{Z}$ (vgl. Satz 2.1):

$$17|a \text{ und } 17|b \Longrightarrow 17|a-b.$$

Beispiel 2: Die Menge der reellen Zahlen bildet bezüglich der Multiplikation keine Gruppe, da die Zahl 0 keine Kehrzahl besitzt. Entfernt man aber die Zahl 0, betrachtet also die Menge $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ eine kommutative Gruppe. Diese nennt man zur Unterscheidung von der *additiven Gruppe der reellen Zahlen* ($\mathbb{R}$,+) die *multiplikative Gruppe der reellen Zahlen.* Die Menge $\mathbb{Q}^*$ der von 0 verschiedenen rationalen Zahlen bildet bezüglich der Multiplikation eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der Bruchzahlen bildet ihrerseits eine Untergruppe $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ von $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

Beispiel 3: Für eine natürliche Zahl m wird die Menge der Restklassen modulo m mit R_m und die Addition zweier Restklassen mod$m$ mit „+“ bezeichnet. Dann ist $(R_m, +)$ eine kommutative Gruppe mit genau m Elementen. Neutrales Element ist die Klasse $[0]$, die zu $[a]$ inverse Klasse ist die Klasse $[-a]$.

Beispiel 4: In Beispiel 5 aus Abschnitt 1.4 haben wir mit $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ bezeichnet, also die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich. Die Menge $\mathcal{S}_n$ besitzt genau $n!$ Elemente. Bezüglich der Verkettung $\circ$ bildet $\mathcal{S}_n$ eine Gruppe, welche man die *symmetrische Gruppe von Grad n* nennt. Diese Gruppe ist für $n > 2$ nicht kommutativ.

Weitere *nichtkommutative* Gruppen lassen sich leicht in der Geometrie finden. Die „kleinste“ Gruppe dieser Art enthält nur 6 Elemente und lässt sich als Menge aller Kongruenzabbildungen auffassen, die ein vorgegebenes gleichseitiges Dreieck ABC auf sich selbst abbilden (man nennt solche Abbildungen *Deckabbildungen des Dreiecks*). Als Verknüpfung ist hier die Verkettung $\circ$ von Abbildungen zu wählen.

Man kann zeigen, daß in einer Gruppe $(G, *)$

(1) ein bezüglich e zu a inverses Element a^{-1} stets auch *von links* invers ist (d.h. es gilt stets $a^{-1} * a = e$),

(2) ein neutrales Element e auch *linksneutral* ist (d.h. es gilt stets $e * a = a$),

(3) *genau ein* neutrales Element e und zu jedem $a \in G$ *genau ein* inverses Element existiert.

Wir zeigen hier nur die erste Eigenschaft und gehen dabei von

$$a^{-1} * \underbrace{a * a^{-1}}_{e} = a^{-1}$$

aus. Verknüpft man beide Seiten *von rechts* mit einem inversen Element b von a^{-1}, so ergibt sich

$$a^{-1} * a = e\,.$$

Also ist a^{-1} auch von links invers. Mit Hilfe der ersten Eigenschaft kann man die zweite und dritte leicht nachweisen.

Zur Verkürzung der Argumentation wurde ausgenutzt, daß man in assoziativen Verküpfungsgebilden bei der Verküpfung mehrer Elemente Klammern weglassen darf, da sich öffnende und schließende Klammern im Rahmen der Klammerregeln beliebig setzen lassen. Dies gilt auch bei der Verknüpfung von mehr als drei Elementen und läßt sich mit Hilfe der *vollständigen Induktion* beweisen.

2.2 Größenbereiche

Es gibt Verknüpfungsgebilde, bei denen es um die Addition von *Größen* wie *Längen, Flächeninhalte, Volumina, Gewichte (Massen), Zeitspannen, Geldwerte* usw. geht.

Jede Größenart ist als Eigenschaft von „Repräsentanten“ anzusehen. Dabei werden Repräsentanten entweder *direkt* mit Hilfe einer Äquivalenzrelation $\sim$ und einer (strengen) Ordnungsrelation $\prec$ verglichen („klassischer“ Zugang zu Größen) oder man hat ein Messgerät, das jedem Repräsentanten eine *Maßzahl* zuordnet und vergleicht Repräsentanten nur noch mit Hilfe der Maßzahlen („alternativer“ Zugang).

Beim klassischen Zugang kommt kommt man über so etwas wie das *Zusammenfügen* von Repräsentanten zu *Maßzahlen.* So kann man z.B. Strecken aneinandersetzen, Massen zusammen auf eine Waagschale legen, Vorgänge nacheinander ablaufen lassen, (elementfremde) Mengen vereinigen, ...

Eine Tabelle der in der Grundschule vorkommenden Größenarten ist:

Größenart	*Repräsentanten*	$\sim$	$\prec$
Längen	Strecken (Stäbe, Kanten)	ist so lang wie, deckungsgleich, kongruent	ist kürzer als
Flächeninhalte (Areale)	Flächen	ist stückweise kongruent zu, passt genau hinein, zerlegungsgleich, ergänzungsgleich	hat weniger Fläche als
Volumina	Körper	volumengleich	hat weniger Volumen als
Gewichte (Massen)	Körper	hat dasselbe Gewicht wie (Balkenwaage)	ist leichter als
Zeitspannen	Vorgänge, Abläufe	dauert so lang wie	dauert kürzer als
Geldwerte	Mengen von Geldstücken, -scheinen	ist soviel wert wie	ist weniger wert als
Kardinalzahlen (positive endliche)	Mengen (endliche)	gleichmächtig	hat weniger Elemente als

Später kommen dann noch „abgeleitete Größen“ wie *Geschwindigkeiten*, *Drücke*, ... hinzu.

Größen derselben Art bilden immer algebraisch eine Struktur der folgenden Art:

Definition 2.3

Eine nichtleere Menge $\mathcal{G}$ mit einer Verknüpfung $+$ und einer Relation $<$ heißt **Größenbereich** genau dann, wenn gilt:

(G1)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	für alle $a, b, c \in \mathcal{G}$	*(Ass)*
(G2)	$a + b = b + a$	für alle $a, b \in \mathcal{G}$	*(Komm)*
(G3)	Wie auch immer a und b aus $\mathcal{G}$ gewählt sind, stets trifft genau einer der Fälle $a < b, a = b, b < a$ zu.		*(Trich)*
(G4)	$a + x = b$ ist lösbar mit $x \in \mathcal{G}$ genau dann, wenn $a < b$.		*(Lösb)*

Die Eigenschaft *(Trich)* ist das *Trichotomiegesetz* und *(Lösb)* heißt die *Lösbarkeitsbedingung*. Aus *(Ass)*, *(Trich)* und *(Lösb)* lässt sich folgern, dass $<$ eine strenge lineare Ordnungsrelation in $\mathcal{G}$ ist und es in $(\mathcal{G}, +)$ **kein** neutrales Element gibt.

Beispiele für Größen:

a) Die Zahl '3' ist die gemeinsame Eigenschaft der Mengen, die zu der Menge $A = \{a, b, c\}$ der *Buchstaben* a, b, c gleichmächtig sind.

b) Die Länge '1 Meter' ist die gemeinsame Eigenschaft aller Strecken, für die das Licht im Vakuum genau $1/299\,792\,458$ s vom Anfang bis zum Ende benötigt. Diese Definition stammt aus dem Jahr 1983. Ursprünglich war 1 Meter 1795 von der französischen Nationalversammlung als **der zehnmillionste Teil des Viertelkreises durch Paris vom Nordpol zum Erdäquator** definiert worden. Noch heute befindet sich ein Profilstab aus Platiniridium in einem Pariser Museum, der lange Zeit ein Repräsentant für diese Länge war und daher das *Urmeter* genannt wird (bei Vergleichen musste die Umgebungstemperatur 20°C betragen). Von 1960 bis 1982 war 1 Meter als das 1 650 763,73 - fache einer bestimmten Wellenlänge eines *Kryptonisotops* definiert.

c) Die Masse '1 kg' ist die Gemeinsame Eigenschaft aller Körper, auf einer Balkenwaage zu einem in Paris aufbewarten Zylinder aus Platiniridium (mit etwa 39 mm Durchmesser und Höhe) im Gleichgewicht zu sein. Die Masse dieses Zylinders entspricht der von **1 Liter Wasser bei 4°C Temperatur** (dies war die ursprüngliche Definition der 1795 tagenden französichen Nationalversammmlung).

Der Sachverhalt der Klassenbildung soll abschließend noch einmal am Vergleich von natürlichen Zahlen und Längen verdeutlicht werden:

Beispiel 1:

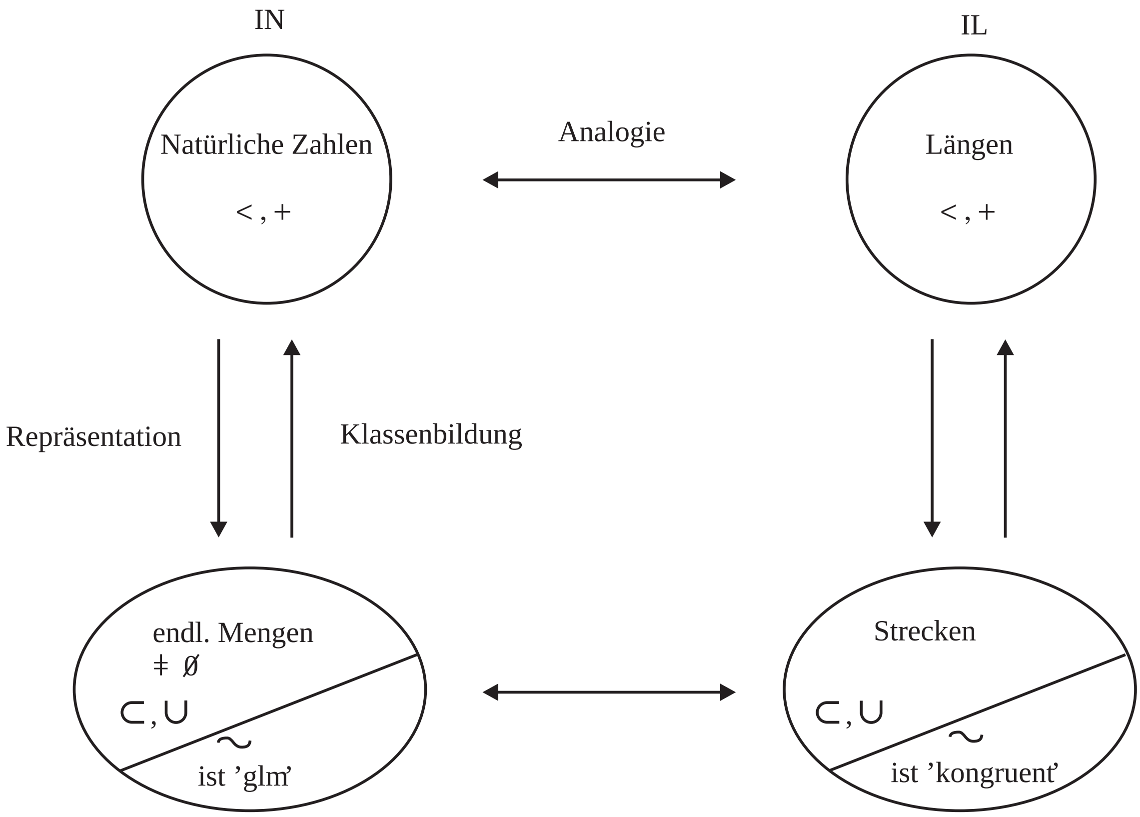


Fig. 1

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen bildet bezüglich der Addition $+$ und der Kleinerbeziehung $<$ einen Größenbereich, bei dem alle Elemente „Vielfache" der Zahl '1' sind. In $\mathbb{N}$ gibt es also ein kleinstes Element.

Die Menge $\mathbb{L}$ der Längen bildet bezüglich der Längenaddition $+$ und der Kleinerbeziehung $<$ zwischen Längen ebenfalls einen Größenbereich. In diesem gibt es **kein** kleinstes Element, da man jede Länge *halbieren, dritteln,* ... kann. Man sagt daher, dass $(\mathbb{L}, +, <)$ ein *divisibler* Größenbereich ist. Die allgemeine Definition lautet:

Definition 2.4

Ein Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ wird **divisibel** genannt (andere Sprechweise: er hat die **Teilbarkeitseigenschaft**) genau dann, wenn es zu jeder Größe $g \in \mathcal{G}$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Größe $b \in \mathcal{G}$ mit $\underbrace{b + \ldots + b}_{n-\text{mal}} = g$ gibt.

Beim „alternativen Zugang zu Größen" geht man von einem Repräsentantenbereich $\mathcal{R}$ aus, der aus *Mengen* von Objekten besteht. Man verlangt, dass die Mengenvereinigung $\cup$ und die Schnittmengenbildung $\cap$ in $\mathcal{R}$ Verknüpfungen sind und nennt $(\mathcal{R}, \cup, \cap)$ bezüglich einer Abbildung f von $\mathcal{R}$ nach $\mathbb{R}$ genau dann einen **Repräsentantenbereich** einer Größe, wenn f folgende Eigenschaften hat:

(M1) $f(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$

(M2) $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(M3) Es gibt $E \in \mathcal{G}$ mit $f(E) = 1$.

(M4) Zu $A, B \in \mathcal{R}$ gibt es stets $B' \in \mathcal{R}$ mit $f(B') = f(B)$ und $A \cap B' = \emptyset$.

Hier ist die Größe eines Repräsentanten A der Wert $f(A)$. Die Relationen $\sim$ und $\prec$ in $\mathcal{R}$ lassen sich definieren in der Form

$$\begin{array}{lcl} A \sim B & :\Longleftrightarrow & f(A) = f(B) \\ A \prec B & :\Longleftrightarrow & f(A) < f(B) \end{array}$$

Sieht man die Menge $\mathcal{G}$ aller Werte zusammen mit der Addition $+$ und Kleinerbeziehung $<$ von Zahlen als Struktur an, so erhält man die gleichen Eigenschaften für $(\mathcal{G}, +, <)$ wie beim klassischen Zugang zu Größen.

Beispiel 2:

Fasst man die Längenmessung als Ablesen auf einer vorgegebenen Skala an, so ist eigentlich eine Abbildung f von der Menge aller Strecken in die Menge $\mathbb{R}$ vorgegeben. Äquivalenz von Strecken bedeutet dann „gleiche Ablesung“.

Beispiel 3:

Der analoge Fall liegt vor, wenn man Gewichte als Werte ansieht, die eine elektronische Waage anzeigt (hier misst man wirklich das *Gewicht* und nicht die *Masse*.)

In allen Größenbereichen ist die *Vervielfachung* mit einer natürlichen Zahl n erklärt durch $nG := \underbrace{G + \ldots + G}_{n \text{ mal}}$.

Die Operation $G \mapsto nG$ heißt **Vervielfachung** mit n.

nG heißt n-faches von G: gelesen als „n mal G“

n heißt der *Vervielfacher* oder *Multiplikator*, G der *Multiplikand*.

Das *Teilen* ist einem Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft erklärt durch:

Definition: $G : n := \frac{1}{n}G$. (*Sprechweise:* „G geteilt durch n“)

Man vereinbart zwecks Klammerersparnis, dass das Vervielfachen und das Teilen stärker als das Addieren bindet:

$nG + H := (nG) + H$ und $\frac{1}{n}G + H := (\frac{1}{n}G) + H$

In einem divisiblen Größenbereich sind die Vervielfachung mit m und das Teilen durch n injektive Abbildungen von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{G}$ mit den Eigenschaften:

(1) $n(G + H) = nG + nH$ für alle $n \in \mathbb{N}; G, H \in \mathcal{G}$.

(2) $(n + m)G = nG + mG$ für alle $n, m \in \mathbb{N}; G \in \mathcal{G}$.

(3) $\frac{1}{n}(G + H) = \frac{1}{n}G + \frac{1}{n}H$ für alle $n \in \mathbb{N}; G, H \in \mathcal{G}$.

Außerdem gelten die *Kürzungsregeln*:
(1) $nG = nH \quad \Rightarrow \quad G = H$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $G, H \in \mathcal{G}$
(2) $nG = mG \quad \Rightarrow \quad n = m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$; $G \in \mathcal{G}$
Man bezeichnet die Herstellung von $\frac{1}{n}G$ im Grundschulunterricht als **Verteilen**.

Vom *Aufteilen* oder *Messen* spricht man, wenn zu gegebenen Größen G und H mit $H \leq G$ eine natürliche Zahl n mit $nH = G$ gesucht wird. Da jede Gleichung $xG = H$ mit $G, H \in \mathcal{G}$ höchstens eine Lösung x in $\mathbb{N}$ hat, kann man hier nur vereinbaren:

Definition: $H/G :=$ dasjenige $x \in \mathbb{N}$, für das $xG = H$ ist, falls x existiert.

2.3 Körper

Bei Mengen mit *zwei* Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ interessiert man sich ebenfalls dafür, ob es Entsprechungen zu Rechengesetzen der Addition und Multiplikation von Zahlen gibt:

Definition 2.5

$(K, \oplus, \odot)$ heißt genau dann ein *Körper*, wenn gilt:

(K1) $(K, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe (ihr neutrales Element sei mit 0 bezeichnet).

(K2) $(K, \odot)$ ist ein Verknüpfungsgebilde und $(K \setminus \{0\}, \odot)$ ist eine kommutative Gruppe (ihr neutrales Element sei mit 1 bezeichnet).

(K3) Für alle $a, b, c \in K$ gilt
$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$. (*Distributivität von* $\odot$ *bzgl.* $\oplus$)

Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir für Körper die bekannte Regel „Punkt vor Strich". Außerdem sollen immer dann für die Körperverknüpfungen die gewohnten Bezeichnungen $+$ und $\cdot$ verwendet werden, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind. Wir bezeichnen das inverse Element von a bezüglich $\oplus$ mit $-a$. Für das inverse Element von a bezüglich $\odot$ schreiben wir a^{-1} (dabei muss natürlich $a \neq 0$ gelten!). Entsprechend wird an Stelle von $a + (-b)$ kürzer $a - b$ und an Stelle von $a \cdot (a^{-1})$ kurz $a : b$ geschrieben. Man kann leicht zeigen, daß für jedes Körperelement a sowohl $0 \cdot a = 0$ als auch $(-1) \cdot a = -a$ gilt.

Bereits bekannte Beispiele für Körper sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Es gibt jedoch auch *endliche* Körper:
Jeder Körper enthält mindestens zwei Elemente, da die neutralen Elemente der beiden Verknüpfungen verschieden sind.

Vereinbart man nun in der zweielementigen Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$0 + 0 := 0,\ 1 + 0 := 1,\ 0 + 1 := 1,\ 1 + 1 := 0,\ 0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1,$$

so ist $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ein Körper mit zwei Elementen.

Versucht man auf ähnliche Weise Körper mit $k = 3, 4, \ldots$ Elementen zu konstruieren, so gelingt dies leicht, wenn k eine Primzahl ist.

Mit Hilfsmitteln der Körpertheorie kann man darüber hinaus beweisen, daß

(1) bei jedem endlichen Körper $(K, +, \cdot)$ die Anzahl der Elemente von K eine *Primzahlpotenz* ist,

(2) es zu jeder Primzahl p und jedem $n \in \mathbb{N}$ einen endlichen Körper mit genau p^n Elementen gibt.

In der Zahlentheorie läßt sich $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ als Menge der sogenannten *Restklassen modulo 2* auffassen, mit denen nach den Regeln der Restklassenaddition und Restklassenmultiplikation zu rechnen ist. Die Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ selbst ist *kein* Körper, da nur 1 und -1 multiplikative Inversen besitzen. Sie ist jedoch als Typ wichtig genug, um die Vereinbarung einer weiteren Bezeichnung zu rechtfertigen:
Wird in der Körperdefinition das Körperaxiom (K2) durch die Forderung ersetzt, daß $(K, \odot)$ ein kommutatives, assoziatives Verküpfungsgebilde mit neutralem Element ist, so heißt $(K, \oplus, \odot)$ ein *kommutativer Ring mit Eins*.

Wir schreiben von nun an die Verknüpfungen in Körpern und Ringen wie gewohnt in der Form $+$ für die „Addition“ und $\cdot$ für die Multiplikation. Die neutralen Elemente bezüglich $+$ und $\cdot$ sollen jeweils mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ bezeichnet werden. Dann gelten in jedem Körper $\mathcal{K}$ für die im Falle $a \neq \mathbf{0}$ in der Form

$$\begin{aligned} a^0 &:= \mathbf{1} \\ a^n &:= \underbrace{a \cdots a}_{n-\text{mal}} \end{aligned}$$

erklärte *Potenzierung* mit einer natürlichen Zahl aus $\mathbb{N}_0$ die *Potenzgesetze*:

$$\begin{array}{llcll} (P1) & a^n \cdot a^m & = & a^{n+m} & \text{für alle } a \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\};\quad n, m \in \mathbb{N}_0 \\ (P2) & (a \cdot b)^n & = & a^n \cdot b^n & \text{für alle } a, b \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\};\quad n \in \mathbb{N}_0 \\ (P3) & a^{(n \cdot m)} & = & (a^n)^m & \text{für alle } a \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\};\quad n, m \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

2.4 Ringe

Wir formulieren die Bemerkung über Ringe etwas ausführlicher und betrachten einige Beispiele von Ringen:

Eine algebraische Struktur $(R, +, \cdot)$ heißt ein *Ring*, wenn gilt:

(i) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe;
(ii) $(R, \cdot)$ ist assoziativ;
(iii) die Verknüpfung $\cdot$ ist distributiv bezüglich der Verknüpfung $+$.

Ist $(R, \cdot)$ kommutativ, dann heißt der Ring ein *kommutativer Ring*.

Das neutrale Element von $(R, +)$ bezeichnen wir mit n und nennen es auch das *Nullelement* der Rings. Das bezüglich $+$ zu a inverse Element (Gegenelement) bezeichnen wir mit $-a$.

Besteht R nicht nur aus dem Nullelement n und besitzt $(R \setminus \{n\}, \cdot)$ ein neutrales Element, dann bezeichnen wir dieses mit e und nennen es das *Einselement* des Rings. Man spricht dann von einem *Ring mit Einselement*. Ist ein Element a eines Rings mit Einselement bezüglich $\cdot$ invertierbar, dann bezeichnen wir das zu a inverse Element (Kehrelement) mit a^{-1}.

Gilt in $(R \setminus \{n\}, \cdot)$ die Kürzungsregel, d. h., folgt aus $a \cdot b = a \cdot c$ und ebenso aus $b \cdot a = c \cdot a$ im Fall $a \neq n$ stets $b = c$, dann heißt die Ring *regulär* oder *nullteilerfrei*. Gilt $a \cdot b = a \cdot c$ mit $a \neq 0$ und $b \neq c$, dann gilt also mit $d = b - c$

$$a \cdot d = n \quad \text{und } a \neq n,\ d \neq n.$$

Elemente a, d mit dieser Eigenschaft nennt man dann *Nullteiler*.

In einem Ring $(R, +, \cdot)$ mit Einselement e kann $(R, \cdot)$ keine Gruppe sein, weil das Nullelement n nicht invertierbar ist: Aus $n = n \cdot n^{-1} = e$ folgt $n = e$, aus $a = a \cdot e = a \cdot n = n$ für alle $a \in R$ ergäbe sich also, dass R nur aus dem einen Element n bestünde. Es kann aber sein, dass $(R \setminus \{n\}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Falls diese kommutativ ist, dann ist der Ring ein Körper.

Von besonderem Interesse sind Ringe mit Einselement, die kommutativ und nullteilerfrei sind. Einen solchen Ring nennt man einen *Integritätsbereich*. Der Name rührt daher, dass die ganzen Zahlen bezüglich der Addition und Multiplikation einen Integritätsbereich (Z Z,+,·) bilden. (Das lateinische Wort *integer* wird in der Mathematik im Sinne von „ganz“ verwendet; im Englischen heißt *integer* ganze Zahl.)

Ist U eine Teilmenge von R, welche bezüglich der Verknüpfungen in R selbst wieder einen Ring bildet, dann nennt man diese einen *Unterring* oder *Teilring* des gegebenen Rings.

Beispiel 1: Das wichtigste Beispiel wurde schon erwähnt, nämlich der Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, welcher sogar ein Integritätsbereich ist. Die einzigen bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente sind 1 und -1. Ist $\mathbb{Z}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der durch n teilbaren ganzen Zahlen, dann ist $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Dieser ist kommutativ und nullteilerfrei, weil sich diese Eigenschaften eines Ringes auf jeden Unterring übertragen. Er besitzt aber kein Einselement, falls $n \neq 1$ ist.

Beispiel 2: Die Menge R_m der Restklassen modulo m bildet bezüglich der Restklassenaddition und -multiplikation einen kommutativen Ring mit dem Einselement [1]. Ist m zusammengesetzt, dann ist dieser Ring nicht nullteilerfrei: Aus $m = ab$ mit $1 < a, b < m$ folgt $[a],\ [b] \neq [0]$, aber

$$[a] \cdot [b] = [ab] = [m] = [0].$$

Ist jedoch $m = p$, wobei p eine Primzahl ist, dann ist der Ring nullteilerfrei (und sogar ein Körper): Aus $[a] \cdot [b] = [0]$ bzw. $ab \equiv 0 \bmod p$ folgt $p|ab$, also $p|a$ oder $p|b$ und damit $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$. Der Ring $(R_m, +, \cdot)$ ist *endlich*, er besteht aus m Elementen.

Beispiel 3: Es sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren eine Addition von Matrizen aus $\mathcal{M}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}.$$

Matrizen werden also *koordinatenweise* addiert. Ferner definieren wir eine Multiplikation von Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Dass $(\mathcal{M}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, folgt sofort aus dem Rechnen mit reellen Zahlen.

Das Nullelement ist die *Nullmatrix* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Das Gegenelement zu einer Matrix entsteht durch Umkehren der Vorzeichen der Koordinaten:

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Die Assoziativität der Multiplikation ist aufgrund obiger Definition sehr mühsam nachzurechnen; sie ergibt sich aber sehr einfach aus der Tasache, dass das Multiplizieren von Matrizen dem Verketten von geometrischen Abbildungen entspricht, und das Verketten eine assoziative Verknüpfung ist. Die Gültigkeit des Distributivgesetzes ergibt sich wieder aus der Gültigkeit dieses Gesetzes in $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Es existiert ein Einselement, nämlich die *Einheitsmatrix* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Insgesamt ergibt sich also, dass $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement ist. Dieser Ring ist nicht kommutativ, denn z.B. ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Matrizenring ist nicht nullteilerfrei, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen untersuchen, unter welcher Bedingung die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezüglich der Multiplikation invertierbar ist, wann also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lösbar ist. Dieser Matrizengleichung entsprechen vier lineare Gleichungen, und zwar zwei für w, y und zwei für x, z:

$$\begin{array}{c} aw + by = 1 \\ cw + dy = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{array}$$

Jedes dieser linearen Gleichungssysteme ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Es ergibt sich dann

$$w = \frac{d}{ad - bc}, \quad x = \frac{-b}{ad - bc}, \quad y = \frac{-c}{ad - bc}, \quad z = \frac{a}{ad - bc}$$

und damit
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Der Faktor vor der letzten Matrix soll bedeuten, dass jede Zahl in der Matrix damit zu multiplizieren ist.

Beispiel 4: Ein *Polynom* über $\mathbb{R}$ in der Variablen x ist ein Term der Form
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
mit $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n \in \mathbb{R}$. Die Zahlen a_i heißen die *Koeffizienten* des Polynoms. Ist $a_n \neq 0$, dann liegt ein Polynom vom *Grad n* vor. Zwei Polynome werden addiert, indem man die Koeffizienten gleicher Potenzen von x addiert. Zwei Polynome werden gemäß den Rechenregeln in $\mathbb{R}$ multipliziert, wobei man die Variable x wie eine reelle Zahl behandelt. Ist etwa
$$p(x) = 2x^2 + x - 5 \quad \text{und} \quad q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 1,$$
dann ist $p(x) + q(x) = 4x^3 - x^2 + 10x - 6$ und
$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) &= (2x^2 + x - 5)\cdot(4x^3 - 3x^2 + 9x - 1) \\ &= \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 8x^5 & - \ 6x^4 & + \ 18x^3 & - \ 2x^2 & & \\ & + \ 4x^4 & - \ 3x^3 & + \ 9x^2 & - \ x & \\ & & - \ 20x^3 & + \ 15x^2 & - \ 45x & + \ 5 \end{array} \right. \\ &= 8x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 22x^2 - 46x + 5. \end{aligned}$$

Mit Polynomen rechnet man also ähnlich wie beim schriftlichen Rechnen mit natürlichen Zahlen im Zehnersystem. Die Menge aller Polynome über $\mathbb{R}$ mit der Variablen x bezeichnet man mit $\mathbb{R}[x]$. Aus den Regeln für das Rechnen in $\mathbb{R}$ folgt, dass $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Das Nullelement ist das *Nullpolynom* (alle Koeffizienten 0), das Gegenpolynom $-p(x)$ eines Polynoms $p(x)$ erhält man, indem man bei allen Koeffizienten das Vorzeichen ändert. Es existiert ein Einselement, nämlich das Polynom 1 ($a_0 = 1$, alle anderen Koeffizienten 0). Die vom Nullpolynom verschiedenen Polynome vom Grad 0 (also die „konstanten“ Polynome) sind invertierbar bezüglich der Multiplikation. Es gibt keine Nullteiler, denn das Produkt eines Polynoms vom Grad m mit einem solchen vom Grad n ist ein Polynom vom Grad $m + n$, also nicht das Nullpolynom. Also ist $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ ein Integritätsbereich. In diesem kann man wie im Integritätsbereich der ganzen Zahlen eine *Division mit Rest* erklären: Zu zwei Polynomen $p(x),\ q(x)$ existieren Polynome $v(x),\ r(x)$ mit
$$p(x) = v(x)q(x) + r(x),$$
wobei der Grad von $r(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist. Wenn $r(x)$ das Nullpolynom ist, dann ist $p(x)$ durch $q(x)$ teilbar und man schreibt $q(x)|p(x)$. Wir wollen die Division mit Rest, die sich ähnlich wie bei natürlichen Zahlen ergibt, an Beispiel $p(x) = 3x^2 + 2x - 1;\ q(x) = 5x - 3$ vorführen:

$$
\begin{array}{lcl}
3x^2+2x-1 & = & (5x-3)\cdot\left(\frac{3}{5}x+\frac{19}{25}\right)+\frac{32}{25} \\
\underline{3x^2-\frac{9}{5}x} & & \\
\quad\frac{19}{5}x-1 & & \\
\quad\underline{\frac{19}{5}x-\frac{57}{25}} & & \\
\qquad\quad\frac{32}{25} & &
\end{array}
$$

Also $\quad p(x)=(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{19}{25})\cdot q(x)+\dfrac{32}{25}$ bzw. $\quad p(x):q(x)=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{19}{25}$ Rest $\dfrac{32}{25}$.

Aufgaben

1. Begründen Sie, dass die Gruppe $(\mathcal{S}_n,\circ)$ der Permutationen von $\{1,2,\ldots,n\}$ für $n\geq 3$ nicht kommutativ ist.

2. Eine endliche Gruppe G kann man vollständig durch ihre *Gruppentafel* beschreiben. Ist

$$G=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}\quad \text{mit } a_1=e,$$

dann ist diese Tafel folgendermaßen aufgebaut:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_j & \ldots & a_n \\
\hline
a_1 & & & & & \vdots & & \\
a_2 & & & & & \vdots & & \\
a_3 & & & & & \vdots & & \\
\vdots & & & & & \vdots & & \\
a_i & \ldots & \ldots & \ldots & & a_i\star a_j & & \\
\vdots & & & & & & & \\
a_n & & & & & & &
\end{array}
$$

In der ersten Zeile und der ersten Spalte stehen wegen $e\star a=a\star e=a$ für alle $a\in G$ wieder die Elemente von G in derselben Reihenfolge wie in der Eingangszeile bzw. -spalte. In *jeder* Zeile und *jeder* Spalte steht jedes Element von G genau einmal!

a) Zeigen Sie, dass die folgenden für $x\neq 0$ definierten Funktionen $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ bezüglich der Verkettung eine Gruppe bilden und geben Sie die Gruppentafel an:

$$f_1: x\mapsto x,\ f_2: x\mapsto -x,\ f_3: x\mapsto \frac{1}{x},\ f_4: x\mapsto -\frac{1}{x}.$$

b) Welche Untergruppen hat diese Gruppe?

3. Welche der folgenden Mengen bilden bezüglich der Addition + und Kleinerbeziehung < einen Größenbereich? Wenn nicht: welche Eigenschaft(en) ist(sind) nicht erfüllt?

a) $\mathbb{N}$ (ohne Null!), b) $\mathbb{N}_0$, c) $\mathbb{Q}^-$, d) $\mathbb{Q}^+$

4. Beweisen Sie die Potenzregeln (P1), (P2) und (P3) (aus Abschnitt 2.3) in Körpern. Verwenden Sie dabei die naive Definition von Summen und Produkten (d.h. verzichten Sie auf eine Präzisierung durch vollständige Induktion).

5. Betrachten Sie folgende Teilmenge der reellen Zahlen und bearbeiten Sie dann die Teilaufgaben a) bis c):
$\mathbb{Q}_{\sqrt{2}}$ sei die Menge aller Zahlen des Typs $a + b\sqrt{2}$ mit rationalem a und b (also z.b. $\frac{3}{2} - 3\sqrt{2}$, $\frac{2}{3} + \frac{9}{5}\sqrt{2}$, ...)
a) Begründen Sie, dass $(\mathbb{Q}_{\sqrt{2}}, +)$ eine kommutative Gruppe ist (warum müssen Sie nur zeigen, dass für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{\sqrt{2}}$ auch $x + y \in \mathbb{Q}_{\sqrt{2}}$ gilt?).
b) Begründen Sie, dass $(\mathbb{Q}_{\sqrt{2}}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist.
c) Warum ist also $(\mathbb{Q}_{\sqrt{2}}, +, \cdot)$ ein Körper?

6. a) Rechnen Sie mit den ganzen Zahlen aus der Menge $\mathbb{Z}_4 := \{0, 1, 2, 3\}$ nach den Regeln

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & x + y & := \text{Rest von } x + y \text{ bei Division durch } 4 \\ \text{(ii)} & x \cdot y & := \text{Rest von } x \cdot y \text{ bei Division durch } 4 \end{array}$$

und stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(\mathbb{Z}_4, +)$ und $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot)$ auf.
b) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ist ein Ring (Sie müssen das nicht prüfen).
Warum ist $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ kein Körper (Begründung(en) angeben!) ?

Teil II

Sachrechnen in den Jahrgangsstufen 1 bis 10

3 Ziele des Sachrechnens

3.1 Aufgaben des Grundschulunterrichts

3.1.1 Allgemeine Ziele

Neben den bereits ganz am Anfang erwähnten allgemeinen Fähigkeiten hinaus sollen die Schüler nach den neuen Grundschulrichtlinien insbesondere folgende Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben:

- die vier Grundrechenarten sicher und flexibel ausführen und anwenden
- über geometrische Grunderfahrungen zu Fläche, Umfang, Symmetrie, Körper verfügen und geometrische Grundfertigkeiten anwenden
- Sachaufgaben in verschiedenen Darstellungsweisen erschließen und bearbeiten.

Die Ausbildung und Anwendung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten setzen einen stetig wachsenden und schließlich sicheren Bestand an Kenntnissen voraus, insbesondere

- grundlegende Zahl- und Operationsvorstellungen
- sichere Beherrschung der Grundaufgaben
- Grundkenntnisse über geometrische Formen und Operationen
- sachrechnerisches Grundwissen und realistische Größenvorstellungen.

Der Mathematikunterricht soll die Schüler in ihrem individuellen Lernen unterstützen, damit sie möglichst folgende *Einstellungen und Haltungen* ausbilden:

- Selbstvertrauen in die eigenen mathematischen Kompetenzen
- Interesse und Neugier an mathematikhaltigen Phänomenen
- Motivation, Ausdauer und Konzentration im Prozess des mathematischen Arbeitens
- ein konstruktiver Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten
- Einsicht in den Nutzen des Gelernten für die Bewältigung von mathematikhaltigen Problemen und Lebenssituationen.

Die Richtlinien machen zum *Lernen und Lehren* folgende Aussagen:

Fachspezifische Lernformen

Im Mittelpunkt steht nicht die Vermittlung von fertigem Wissen an Unwissende, sondern die Vermittlung zwischen Lernenden und Mathematik.
Zentrale Leitideen sind:

- das entdeckende Lernen
- das beziehungsreiche Üben
- das individuelle und das gemeinsame Lernen sowie
- der ausgewogene Gebrauch der verschiedenen Darstellungsformen.

Entdeckendes Lernen

Konzeption: Mathematiklernen durchgängig als konstruktiver, entdeckender Prozess
Fehler gehören zum Lernen. Sie sind häufig Konstruktionsversuche auf der Basis vernünftiger Überlegungen und liefern wertvolle Einsichten in die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler.
Der Unterricht eröffnet möglichst viele Gelegenheiten zum selbstständigen Lernen.
Lehrer als *Lernmoderator*: herausfordernde Sinnzusammenhänge anzubieten, ergiebige Aufgabenstellungen und Arbeitsmittel bereitzustellen und Formen der Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Schülerinnen und Schüler förderlich sind.
Substanzielle Aufgaben haben eine zentrale Bedeutung für guten Unterricht. Sie beinhalten differenzierte Fragestellungen auf unterschiedlichem Niveau, ermöglichen verschiedene Lösungswege und fordern vielfältige Formen des Kreativ-Seins, Mathematisierens, Begründens, Darstellens und Kooperierens.

Beziehungsreiches Üben

Üben sichert, vernetzt und vertieft vorhandenes Verständnis Wissen und Können. Es dient der Geläufigkeit und der Beweglichkeit. Deshalb sind Übungen möglichst problemorientiert, operativ oder anwendungsbezogen angelegt. Viele Inhalte erfordern einen hinreichenden Anteil an anschauungsgestützten Übungen.

Individuelles und gemeinsames Lernen

Damit alle Schüler tragfähige Grundlagen für weiteres Lernen erwerben können, geht der Mathematikunterricht von ihren unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lernmöglichkeiten aus und wird ihnen durch Lernumgebungen gerecht, die eigene Lernwege ermöglichen.
Die mündlichen und schriftlichen Eigenproduktionen der Schüler helfen, ihr Denken und Handeln zu verstehen. Sie liefern wichtige Hinweise für das Weiterlernen.
Das Lernen auf eigenen Wegen wird durch das Lernen voneinander ergänzt. In der Auseinandersetzung mit anderen lernen die Schüler:

- die eigene Sichtweise zu artikulieren

- sich über andere Lösungswege auszutauschen
- sachbezogene Rückmeldungen zu geben und zu nutzen
- über verschiedene Herangehensweisen nachzudenken und sie zu bewerten.

Darstellungsformen

Mathematische Begriffe und Operationen werden in verschiedenen Darstellungsformen repräsentiert: durch Handlungen mit Material, durch Bilder, Sprache und mathematische Symbole.

Die Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen werden insbesondere im Zahlenraum bis 100 immer wieder hergestellt, damit Begriffe und Operationen im Denken der Schüler nicht ausschließlich durch Zahl- und Rechenzeichen, sondern auch durch dynamische Vorstellungen repräsentiert werden.

Die Kommunikation im Unterricht vollzieht sich in der Umgangssprache. In ihr werden auch die meisten mathematischen Lerninhalte ausgedrückt. Die bewusste und stetige Schulung der fachgebundenen Sprache fördert das Verstehen mathematischer Sachverhalte und die wechselseitige Verständigung.

Prinzipien der Unterrichtsgestaltung

Anwendungs- und Strukturorientierung sind zentrale und eng miteinander verknüpfte Unterrichtsprinzipien. Sie verdeutlichen die Beziehungshaltigkeit der Mathematik und zeigen auf, wie diese für vernetzendes Lernen genutzt werden kann.

Anwendungsorientierung meint einerseits, dass mathematische Vorerfahrungen in lebensweltlichen Situationen aufgegriffen und weiterentwickelt werden. Andererseits werden Einsichten über die Realität mit Hilfe mathematischer Methoden neu gewonnen, erweitert oder vertieft.

Das Prinzip der Strukturorientierung unterstreicht, dass mathematische Aktivität häufig im Finden, Beschreiben und Begründen von Mustern besteht. So werden auch Vorgehensweisen wie Ordnen, Verallgemeinern, Spezifizieren oder Übertragen entwickelt und geschult.

Für die Auswahl der Inhalte, der Aufgaben und der Materialien ist eine Konzentration auf Grundideen der Arithmetik, der Geometrie und des Sachrechnens erforderlich. Diese werden, dem Spiralprinzip folgend, vom 1. Schuljahr an kontinuierlich aufgegriffen, in neue Zusammenhänge gestellt und stetig weiterentwickelt.

Mathematik ist auch Schule des Denkens. Daher werden Denkaufgaben und Denkspiele aufgenommen, die den Unterricht bereichern.

Im Mathematikunterricht lernen die Schülerinnen und Schüler auch Lernmöglichkeiten mit elektronischen Medien kennen.

Taschenrechner gehören zum Alltag. Sie ergänzen das mündliche, halbschriftliche und schriftliche Rechnen und unterstützen Prozesse des Entdeckens mit hohem numerischen Aufwand oder die Kontrolle von Rechnungen. Der verständige Gebrauch setzt sichere Kopfrechenfertigkeiten voraus und trägt dazu bei, diese weiterzuentwickeln.

3.1.2 Inhaltsbereiche

Der fachliche Unterrichtsstoff wird unterteilt in

- Arithmetik,
- Geometrie,
- Sachrechnen.

Diesen Bereichen werden Aufgabenschwerpunkte un Unterrichtsgegenstände zugeordnet, die in der unterrichtlichen Realität aufeinander bezogen und miteinander verbunden werden. Dabei sind die Grenzen zwischen Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen fließend. Insgesamt sind jedoch die Bereiche, die Aufgabenschwerpunkte und die Unterrichtsgegenstände verbindlich.
*Wir lassen den Themenbereich **Geometrie** aus und gehen nur auf die Aussagen zu den Bereichen **Arithmetik** und **Sachrechnen** ein:*

Arithmetik

Zentrale Zielsetzung im Bereich Arithmetik:
Ausbildung von Verständnis, Sicherheit und Flexibilität im Umgang mit Zahlen und mit Rechenoperationen.
Zahlenräume (20,100,1.000,1.000.000) stellen keine Beschränkung, sondern einen Orientierungsrahmen für die einzelnen Klassenstufen dar.
Im Verlauf der Grundschulzeit gewinnen die Schülerinnen und Schüler tragfähige und vielfältige Vorstellungen von Zahlen, insbesondere von

- ihrer Repräsentation in verschiedenen Darstellungsformen
- ihren Beziehungen zu anderen Zahlen (Vorgänger - Nachfolger, das Doppelte -die Hälfte,...)
- ihrem Aspektreichtum (Anzahl, Ordnungszahl, Codierungszahl, Rechenzahl, ...)
- ihren Eigenschaften (gerade - ungerade, Quadratzahl, Primzahl,...)
- ihrer Verwendung in der Lebenswelt.

Auf der Grundlage sicherer Operationsvorstellungen können die Kinder die Grundrechenarten sicher ausführen und flexibel anwenden. Die Basis allen Rechnens bilden unmittelbar abrufbare Kenntnisse (wie die Aufgaben des Einspluseins) und schnell ausführbare Fertigkeiten (wie Ergänzen zur nächsten Stufenzahl), die auf anschauungsgestützte Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen aufbauen (schnelles Rechnen).
Auf dieser Grundlage werden verschiedene Strategien des mündlichen und halbschriftlichen Rechnens sowie deren Zwischenformen ausführlich behandelt (Zahlenrechnen). Sie sind als eigenständige und sowohl für die Erfordernisse der Lebenswelt als auch für den weiterführenden Mathematikunterricht zentrale Rechenmethoden anzusehen. Das Durcharbeiten von Zusammenhängen (z. B. Aufgabe und Tauschaufgabe) sowie das Ausnutzen von Rechengesetzen (z. B. beim schrittweisen Rechnen) fördern die Weiterentwicklung der Kompetenzen im Zahlenrechnen.

Die schriftlichen Rechenverfahren (Ziffernrechnen) und ihre Vorformen werden soweit wie möglich zu den mündlichen und halbschriftlichen Vorgehensweisen in Beziehung gesetzt. Dies trägt zum Verständnis der Verfahren bei.

Am Ende der Grundschulzeit können alle Schüler die schriftliche Addition mit mehreren Summanden, die schriftliche Subtraktion mit einem Subtrahenden sowie die schriftliche Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren verstehen, sicher beherrschen und anwenden.

Die Vorgehensweise bei der schriftlichen Subtraktion wird freigestellt. Das Verfahren der schriftlichen Division durch einstellige und wichtige zweistellige Divisoren (z.B. 10, 12, 20, 25, 50) soll verstanden werden. Bei der Division wird generell die Restschreibweise verwendet.

Besondere Bedeutung kommt dem überschlagenden Rechnen zu. Ausgewählte Aufgaben fördern die Einsicht, dass das Ermitteln genauer Ergebnisse in manchen Problemsituationen nicht nötig, nicht möglich oder nicht sinnvoll ist.

Darüber hinaus lernen die Schülerinnen und Schüler, Rechenanforderungen mit dem hinreichenden Maß an Flexibilität zu bewältigen. Sie können für sich begründet entscheiden, ob sie das schriftliche Normalverfahren, eine geeignete Strategie des Zahlenrechnens oder in Einzelfällen auch den Taschenrechner zur Aufgabenlösung heranziehen.

Sachrechnen

Zentrales Anliegen eines sachbezogenen Mathematikunterrichts ist die Erschließung der Lebenswirklichkeit. Das erfordert eine kontinuierliche Auseinandersetzung mit authentischen, herausfordernden Aufgaben.
Sowohl reale als auch simulierte Situationen (angeregt etwa durch einen Sachtext) können für die Schülerinnen und Schüler bedeutsam sein. Projektorientierte und fächerübergreifende Vorgehensweisen eignen sich besonders dann, wenn das Thema mathematisch substanzielle Aufgaben enthält.
Die Schülerinnen und Schüler lernen, Daten zu erheben, selbst in Tabellen oder Diagrammen darzustellen und zu bewerten. Aufgaben, bei denen die Wahrscheinlichkeit einfacher Ereignisse qualitativ einzuschätzen ist, bereichern das Sachrechnen.
Darüber hinaus bearbeiten die Schülerinnen und Schüler realitätsnahe Sachaufgaben in Form von Rechengeschichten, Bildgeschichten, Tabellen und Diagrammen. Die Aufgabenstellungen können vorgegeben oder selbst gewählt sein. Sachaufgaben ermöglichen auch unterschiedliche und weiterführende Fragestellungen sowie individuelle Lösungswege.
In den Größenbereichen Länge, Geld, Zeit, Gewicht und Rauminhalt entwickelt und festigt der Unterricht realistische Größenvorstellungen und sachrechnerische Kompetenzen. Ein Grundbestand an Kenntnissen und Fertigkeiten wird durch regelmäßige Übungen im Kopfsachrechnen gesichert. Dem überschlagenden Rechnen in Alltagskontexten kommt besondere Bedeutung zu.

Es folgen nun Auszüge aus den Stoffverteilungsplänen für die Schuljahresblöcke 1/2 und 3/4. Dabei zitieren wir beim Bereich ***Arithmetik*** *nur die Forderungen zum Einsatz des Taschenrechners für den Schuljahresblock 3/4 an. Dort heißt es unter dem Stichwort* ***flexibles Rechnen****:*

den Taschenrechner als Werkzeug zum Rechnen und zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten kennen lernen, in geeigneten Situationen verwenden und über dessen sinnvollen Einsatz nachdenken.

*Wir geben nun die vollständige Tabelle zum Bereich **Sachrechnen** an:*

Aufgaben-schwerpunkte	Unterrichtsgegenstände in den Klassen 1 und 2	Unterrichtsgegenstände in den Klassen 3 und 4
Sachzusammen-hänge	• Spiel- und Sachsituationen mathematisch erfassen, nachspielen und beschreiben • fächerübergreifende Problemkontexte bearbeiten: Mathematik als Mittel zur Beschreibung und zur Lösung von Sachproblemen erfahren	• Fragestellungen aus gegebenen oder selbst gewählten Spiel- und Sachsituationen ableiten sowie Ergebnisse innerhalb des Sachzusammenhangs mathematisch interpretieren • projektorientierte Problemkontexte bearbeiten: Unterricht inhaltlich und methodisch mitplanen, Mathematik als Mittel zur Beschreibung und zur Lösung von Sachproblemen systematisch einsetzen, Ergebnisse sachangemessen reflektieren
Daten und Häufigkeiten	• Mengen von Dingen aus der Lebenswirklichkeit beschreibend vergleichen, ordnen und sortieren, einfache Tabellen bzw. Diagramme lesen und erstellen	• Daten (auch stichprobenhaft) aus der Lebenswirklichkeit sammeln, den Medien oder didaktisch aufbereiteten Texten (z. B. Sachtexten) entnehmen, Tabellen und Diagramme interpretieren und erstellen, die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen qualitativ einschätzen
Sachaufgaben	• Sachaufgaben als Rechengeschichten oder Bildsachaufgaben stellen, bearbeiten und lösen, aufgabenbezogene Bearbeitungshilfen (wie z. B. Skizzen) kennen lernen und Ergebnisse auf ihre Problemangemessenheit prüfen	• Sachaufgaben, auch mit mehreren Rechenschritten, in verschiedenen Darstellungsweisen (z. B. in Form von Sach- oder Gebrauchstexten) darstellen, bearbeiten, lösen und Ergebnisse auf ihre Problemangemessenheit prüfen

Größenvorstellungen	• Grundvorstellungen zu Geldwerten, Zeitspannen und Längen entwickeln und ausbauen • realistische Bezugsgrößen kennen lernen (Preise, Zeitspannen, Längen	• Grundvorstellungen zu Gewichten und Rauminhalten entwickeln und ausbauen; Grundvorstellungen zu Geldwerten, Zeitspannen und Längen auf den erweiterten Zahlenraum übertragen • zu jedem Größenbereich wichtige realistische Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt kennen und nutzen lernen
Umgang mit Größen	• mit Münzen und Banknoten umgehen (Geldbeträge darstellen, ordnen, wechseln, bezahlen, zurückgeben) • Erfahrungen mit der Zeit, mit der Uhr und mit dem Kalender sammeln (messen, schätzen, vergleichen) • Längen mit standardisierten und mit selbstgewählten Einheiten messen und schätzen • Grundeinheiten dieser Größenbereiche kennen lernen (ct, €; cm, m; Sekunde, Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat, Jahr)	• Kompetenzen im Umgang mit Geldwerten, Längen und Zeit (auch Zeitpunkte und Zeitspannen) im erweiterten Zahlraum anwenden • mit Messgeräten oder passenden Hilfsmitteln messen sowie unter Zuhilfenahme von Bezugsgrößen schätzen und passende Einheiten wählen • die Grundeinheiten der fünf Größenbereiche kennen lernen und zwischen ihnen umwandeln (ct, €; mm, cm, m, km; s, min, h, Tag, Monat, Woche, Jahr; g, kg, t; ml, l) • die Kommaschreibweise bei Geldwerten, Längen, Gewichten und Rauminhalten situationsangemessen verwenden • mit einfachen Brüchen bei Größen umgehen

Da es beim Rechnen mit Größen (d. h. Maßzahlen) auch um arithmetische Aspekte geht, gelten die Ausführungen zum Taschenrechner aus dem Stoffplan ***Arithmetik*** *auch im Bereich* ***Sachrechnen****. So ist der Taschenrechner durchaus im Sachrechnen einsetzbar, wenn Schüler bei einer Aufgabe mit „realen“ Zahlenangaben prinzipiell in der Lage sind, diese Aufgabe mit vereinfachtem Zahlenmaterial zu lösen.*

In einem solchen Fall kann diese Aufgabe ohne Taschenrechner „überschlagsmäßig“ gelöst werden, um sie danach mit den „echten“ Angaben mit dem Taschenrechner zu lösen.

Wenn dann noch Überschlagslösungen mit den tatsächlichen Lösungen verglichen werden oder oder Schüler die Frage diskutieren, ob eine Aufgabe nicht doch ohne Taschenrechner gelöst werden soll, so dürfte ein solches Vorgehen ganz im Sinne der Richtlinien sein!

Die Richtlinien legen noch *verbindliche Anforderungen* am Ende der Klasse 2 und am Ende der Klasse 4 fest *(das Heraussuchen und die Zusammenstellung der Aussagen ist Inhalt der Hausaufgaben!).* So soll am Ende von Klasse 2 jedes Kind die Grundlagen erworben haben, die ein erfolgreiches Weiterlernen in den Klassen 3 und 4 ermöglichen. Am Ende von Klasse 4 über sollen tragfähige Grundlagen im Sinne einer ausgebauten Wissensbasis und verlässlicher Kompetenzen verfügbar sein, die ein erfolgreiches Lernen in weiterführenden Schulen ermöglichen.

3.2 Aufgaben der Sekundarstufe I

3.2.1 Allgemeine Ziele

In den Kernlehrplänen (September 2004) für Haupt-, Real- und Gesamtschulen des Landes NRW heißt es übereinstimmend:
Die Schülerinnen und Schüler sollen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

- Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen und verstehen (*Mathematik als Anwendung*)
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als geistige Schöpfungen verstehen und weiterentwickeln (*Mathematik als Struktur*)
- in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen auch überfachliche Kompetenzen erwerben und einsetzen (*Mathematik als kreatives und intellektuelles Handlungsfeld*). Hierbei erkennen sie, dass Mathematik eine historisch gewachsene Kulturleistung darstellt. Zugleich erleben sie Mathematik als intellektuelle Herausforderung und als Möglichkeit zur individuellen Selbstentfaltung und gesellschaftlichen Teilhabe. Sie entwickeln **personale und soziale Kompetenzen**, indem sie lernen,
- gemeinsam mit anderen mathematisches Wissen zu entwickeln und Probleme zu lösen (*Kooperationsfähigkeit als Voraussetzung für gesellschaftliche Mitgestaltung*).
- Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen und bewusst Lernstrategien einzusetzen (*selbstgesteuertes Lernen als Voraussetzung für lebenslanges Lernen*).

Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger kontextbezogener Probleme einzusetzen und begründete mathematische Urteile abzugeben. Sie beinhaltet insbesondere die Kompetenz des problemlösenden Arbeitens in inner- und außermathematischen Kontexten. Grundlegend dafür ist die Fähigkeit, komplexe Probleme zu strukturieren sowie reale Probleme in geeigneter Weise mathematisch zu beschreiben, also Modelle zu bilden und zu nutzen. Ebenso gehört zur mathematischen Grundbildung die

Fähigkeit, mit anderen über mathematische Fragestellungen zu kommunizieren, d.h. eigene Ideen zu präsentieren und zu begründen sowie die Argumente anderer aufzunehmen.

Diese *Kompetenzen* bilden sich bei der aktiven Auseinandersetzung mit konkreten Fragestellungen aus den Kernbereichen des Faches Mathematik heraus: Die Mathematik erfasst ebene und räumliche Gebilde mit Mitteln der *Geometrie*. Für die Operationen mit Zahlen in der *Arithmetik* hat die Mathematik die Formelsprache der *Algebra* entwickelt, mit der sich Gesetzmäßigkeiten des Zahlenrechnens darstellen und flexibel nutzen lassen. Zu den Leistungen der Mathematik gehört ferner, dass sie sowohl systematische Abhängigkeiten von Zahlen und Größen mit dem Begriff der *Funktion*, aber auch zufällige Ereignisse mit dem Begriff der *Wahrscheinlichkeit* beschreiben kann.

Mathematische Grundbildung zeigt sich also im Zusammenspiel von Kompetenzen, die sich auf mathematische Prozesse beziehen, und solchen, die auf mathematische Inhalte ausgerichtet sind. Prozessbezogene Kompetenzen, wie z.B. das Problemlösen oder das Modellieren werden immer nur bei der Beschäftigung mit konkreten Lerninhalten, also unter Nutzung inhaltsbezogener Kompetenzen, erworben und weiterentwickelt.

Problemlösen oder das Modellieren werden immer nur bei der Beschäftigung mit konkreten Lerninhalten, also unter Nutzung inhaltsbezogener Kompetenzen erworben und weiterentwickelt.

fachbezogene Kompetenzen			
prozessbezogene Kompetenzen		**inhaltsbezogene Kompetenzen**	
Argumentieren/ Kommunizieren	kommunizieren, präsentieren und argumentieren	Arithmetik/ Algebra	mit Zahlen und Symbolen umgehen
Problemlösen	Probleme erfassen, erkunden und lösen	Funktionen	Beziehungen und Veränderung beschreiben und erkunden
Modellieren	Modelle erstellen und nutzen	Geometrie	ebene und räumliche Strukturen nach Maß und Form erfassen
Werkzeuge	Medien und Werkzeuge verwenden	Stochastik	mit Daten und Zufall arbeiten

Die hier genannten Bereiche mathematischer Kompetenzen werden im Folgenden konkretisiert durch eine Beschreibung von Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I (Kapitel 2) sowie durch eine Darstellung von Kompetenzerwartungen am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufen (Kapitel 3). Diese Kernkompetenzen sollen Schülerinnen und Schüler nachhaltig und nachweislich erworben haben.

Die **inhaltliche und methodische** Gestaltung eines Unterrichts, in dem Schülerinnen und Schüler eine solche mathematische Grundbildung erwerben können, ist als Gesamtaufgabe aufzufassen. Inhalte und Methoden des Unterrichts sind eng aufeinander bezogen. Eine einseitig kleinschrittige Methodik, die entlang einer vorgegebenen Stoffsystematik eine Engführung der Lernenden betreibt, ist nicht geeignet, junge Menschen verständnisorientiert in mathematisches Denken einzuführen. Der Unterricht soll Schülerinnen und Schüler bei der Auseinandersetzung mit Mathematik unterstützen. Er soll hierzu eine breite Palette unterschiedlichster

Unterrichtsformen aufweisen, die von einer lehrerbezogenen Wissensvermittlung bis hin zu einer selbstständigen Erarbeitung neuer Inhalte reicht. Zudem darf er sich nicht auf die nachvollziehende Anwendung von Verfahren und Kalkülen beschränken, sondern muss in komplexen Problemkontexten entdeckendes und nacherfindendes Lernen ermöglichen. Er sollte inner- und außermathematische Fragestellungen vernetzen und sich dabei an zentralen mathematischen Ideen (Zahl, Messen, räumliches Strukturieren, Algorithmus, Zufall) orientieren. Dieses Vorgehen erlaubt es auch, sich im Unterricht auf Wesentliches zu konzentrieren, ausgewählte Inhalte zu vertiefen und nach dem Prinzip der integrierenden Wiederholung bereits erworbene Kenntnisse und Fähigkeiten zu festigen und zu vertiefen.

In diesen Ausführungen kommt der Begriff *Sachrechnen* nicht mehr vor und wird durch den *Anwendungsbegriff* ersetzt. Bei der Beschreibung von prozessbezogenen Kompetenzfeldern ist das Sachrechnen vor allem beim *Modellierungsbegriff* angesprochen. In den inhaltlichen Kompetenzfeldern finden sich Bezüge zum Sachrechnen in allen Bereichen.

Die Kernlehrpläne gehen schließlich noch auf Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I und nach den Schuljahren 6 und 8 ein. Wir geben hier nur eine Kompetenzübersicht aus dem Hauptschulkernlehrplan wieder:

	Arithmetik/Algebra	Funktionen	Geometrie	Stochastik
5/6	• Rechnen mit natürlichen Zahlen, endlichen Dezimalzahlen und einfachen Brüchen • Größen • Ordnen, Vergleichen, Runden • Zahlengerade • Rechenvorteile, systematisches Zählen, Teiler und Vielfache	• Tabellen und Diagramme • Maßstab	• ebene Figuren • Umfang und Fläche von Rechtecken • Quader und Würfel	• Ur- und Strichlisten • Häufigkeitstabellen, Säulendiagramme • arithmetisches Mittel
7/8	• Rechnen mit rationalen Zahlen • lineare Gleichungen	• Wertetabellen, Grafen und Terme • proportionale und antiproportionale Zuordnungen • ***lineare Funktionen*** • Prozentrechnung	• Zeichnen von Dreiecken • Umfang und Fläche von Dreiecken und Vierecken • Schrägbilder, Netze, Körpermodelle • Oberfläche und Volumen • ***einfache Winkelsätze*** • ***Kongruenz***	• Planung und Durchführung von Erhebungen • ***Kreisdiagramme*** • ***Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*** • einstufige Zufallsexperimente
9/10	• Potenzieren, Radizieren • Zehnerpotenzschreibweise • ***Termumformungen*** • ***lineare Gleichungssysteme*** • ***quadratische Gleichungen***	• ***quadratische Funktionen*** • ***Sinusfunktion*** • ***lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum (Zinseszins)*** • Zinsrechnung	• Kreisberechnung • ***Dreiecksberechnungen*** • Zylinder, Pyramiden, Kegel, Kugeln • ***Prismen*** • Vergrößern, Verkleinern, Ähnlichkeit • Satz des Pythagoras	• Analyse von grafischen Darstellungen • ***zweistufige Zufallsexperimente*** • ***Pfadregeln*** • ***Boxplots***

Die kursiv und fett gedruckten Kompetenzen beziehen sich am Ende der Jahrgangsstufe 8 auf den Erweiterungskurs, am Ende der Jahrgangsstufe 10 auf den B-Typ.

Fig. 1

3.3 Sachrechnen früher und heute

Das Wort „Sachrechnen“ ist missverständlich: Zu nahe liegt die enge Auffassung, es handele sich dabei in erster Linie um ein Rechnen (mit „Sachen“), also um einen Kalkül, so etwa wie die Bruchrechnung, wo mit Bruchzahlen gerechnet wird. Der früher benutzte Begriff *bürgerliches Rechnen* hatte genau diese Bedeutung. In seiner Folge wurde die Lernorganisation entsprechend eingerichtet: Unterteilung in *Dreisatzrechnung, Verhältnisrechnung,* *Mischungsrechnen, Prozentrechnen, Gewinn- und Verlustrechnung, Zinsrechnung* usw. Dabei wurden diese Teilgebiete weiter unterteilt, jeder Teilabschnitt („Schubladen“) eigens thematisiert und die kanonischen Lösungsschritte durch umfangreiches Üben eingeprägt.

Tatsächlich ist der Aspekt des Rechnens (des Kalkülhaften) ein Aspekt des Sachrechnens, aber - nach allem, was die Erfahrung lehrt - keineswegs der wichtigste, d.h. nicht der Aspekt, der in erster Linie den intellektuellen Anspruch bestimmt, also nicht der Aspekt, mit dem die Schüler die meisten Schwierigkeiten haben. Der entscheidende Punkt (und damit auch die Hauptfehlerquelle) beim Sachrechnen ist der komplexe Prozess der mathematischen Modellbildung (*Mathematisierungsprozess*), der darin besteht, eine Sachsituation mit mathematischen Mitteln zu rekonstruieren und dabei die wechselseitigen Beziehungen zwischen Wirklichkeitsaus- schnitt und mathematischen Begrifflichkeiten im Auge zu haben. Komplex ist dieser Prozess deshalb, weil er nicht nur durch lokale Faktoren (Kenntnisse über den jeweils in Rede stehenden außermathematischen Sachverhalt, Verfügbarkeit über jetzt erforderliche Rechenfertigkeiten usw.) sondern auch von mehr globalen Faktoren bestimmt ist: z.B. Fähigkeit zu sinnerfassendem (adäquate Vorstellungen bildenden) Lesen, Fähigkeit zum nachdenkenden Beobachten und Fragen und vor allem der Fähigkeit zum Erfassen der in der Sachsituation obwaltenden Gesetzmäßigkeit(en).

Um solche Art allgemeiner Fähigkeiten herauszubilden, bedarf es offensichtlich anderer methodisch-didaktischer Vorkehrungen als sie etwa für das Erlernen der schriftlichen Division oder der Multiplikation von Bruchzahlen oder irgendeines anderen Kalküls ausreichen mögen. Insbesondere können solche Fähigkeiten nicht in kurzfristigen Sequenzen erlernt werden. Man kann kurzfristig lernen (und vom Lehrer her gesehen abtesten) wie z.B. Bruchgrößen vervielfacht werden, aber man kann nicht ebenso kurzfristig lernen, wie man Textaufgaben löst, wo das Vervielfachen von Größen eine Rolle spielt; denn es muss ja zuerst einmal erfasst werden, *inwiefern* dem in der Sache obwaltenden Gesetz tatsächlich das Vervielfachen einer Größe entspricht. Und zu diesem Erfassenkönnen gibt es keinen Kalkül; es führt kein Weg daran vorbei, zuerst einmal die Sachsituation zu verstehen, d.h. ihr ein gedankliches Modell aufzuprägen.

Zu welchen „Resultaten“ ein Sachrechenunterricht führen kann, wenn die Betonung auf dem Rechnen und nicht auf dem Mathematisieren liegt, kann folgendes Beispiel zeigen. 1005 Viertklässler von Schulen des Reg,-Bezirks Arnsberg NRW erhielten in einem schriftlichen Test zum Sachrechnen (Juni 1978) u.a. die folgende Aufgabe:

- Die letzten Weihnachtsferien begannen am 23.12.77, das war der erste Ferientag. Die Weihnachtsferien endeten am 8.1.1978, das war der letzte Ferientag. Wie viele Tage dauerten die Weihnachtsferien?

Nur 21,5% der Schüler lösten die Aufgabe korrekt. Häufig wurde gerechnet 31 - 23 = 8, 8 + 8 = 16, also nicht beachtet, dass der 23.12. bereits ein Ferientag war. Die 23 steht doch da, also muss mit dieser Zahl gerechnet werden. Einige Schüler rechneten „einfach“ 23 - 8 = 15. Das obwaltende Gesetz dieser Sachsituation (Kalendersituation) haben viele Schüler offenbar nicht gesehen. Man kann diese durch folgendes Bild ausdrücken (aber dann müssen die Schüler dieses Bild auch „lesen“ können):

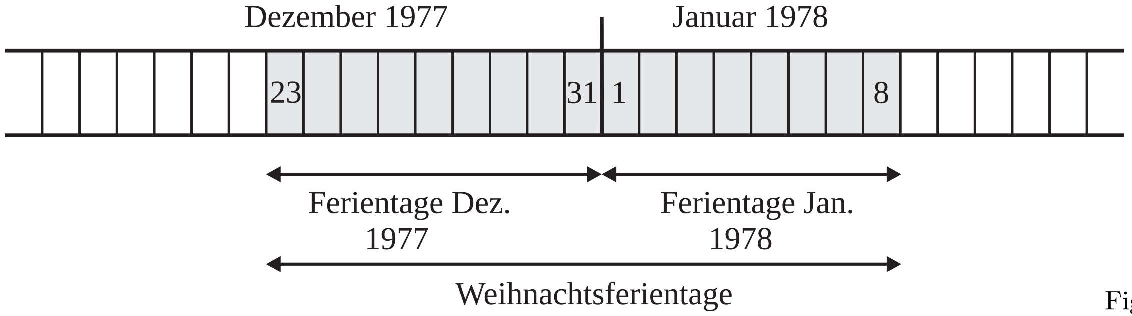


Fig. 1

In einer 7. Hauptschulklasse waren die Ergebnisse nicht wesentlich besser. Für die hier zu führende Diskussion sind zwei weitere Vorkommnisse bemerkenswert:

1. Eine schriftliche Lösung:

$$\begin{array}{rr} & 23.12. \\ - & 8.\ 1. \\ \hline & 15.11. \end{array}$$

   Antwort: Die Ferien dauerten 15 Tage und 11 Stunden.

2. Eine Lehrerin fragte zurück: „ob in dieser Aufgabe wie in der Zinsrechnung zu rechnen sei, nämlich 1 Monat = 30 Tage“.

Bis etwa 1968 war Sachrechnen im wesentlichen *bürgerliches Rechnen*, ein Rechnen mit Maßen und Gewichten. Im Bereich der Grundschule kam Sachrechnen kaum vor, die Domäne des Sachrechnens lag in der Hauptschule (Volksschule), weniger in der Realschule und fast gar nicht im Gymnasium. Der dem Sachrechnen zu Grunde liegende Sachverhalt wurde fast ausschließlich in Form von Textaufgaben vermittelt, so dass Sachrechnen und Lösen von Textaufgaben fast synonym waren.
Die Richtlinien für bayerische Volksschulen von 1955 formulieren schon fast fortschrittlich:

> Der Rechenunterricht geht auf allen Altersstufen von lebensnahen, mathematisch zwingenden und zugleich kindgemäßen Rechensituationen aus, arbeitet den mathematischen Gehalt heraus, schreitet zur Erkenntnisgewinnung sowie zur Pflege angemessener Rechenfertigkeit fort.

Dabei liegt zwar wesentliches Gewicht wieder auf dem Rechnen, allerdings wird das Sachrechnen zugleich als *durchgängiges didaktisch-methodisches Prinzip* herausgestellt. Dieses Prinzip könnte man durch folgende Grafik veranschaulichen:

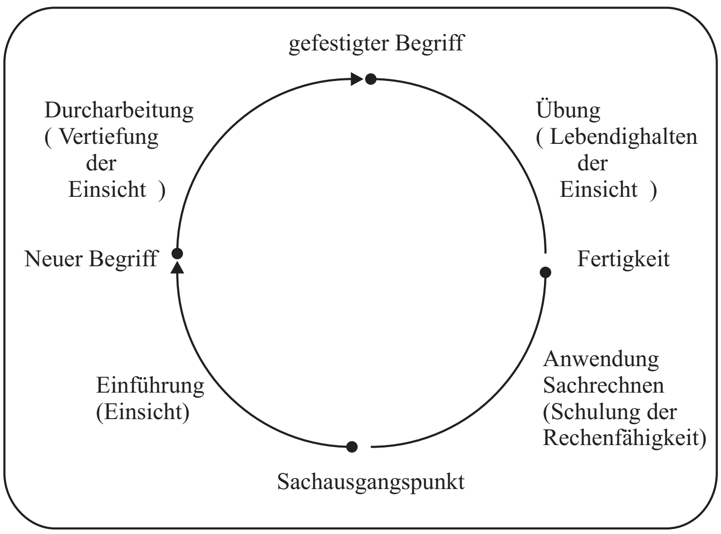


Fig. 1

Mit stärkerer Betonung des mathematischen Aspekts äußern sich die Richtlinien des Landes Nordrhein-Westfalen im Jahr 1968 zu Beginn der einsetzenden Reform des Mathematikunterrichts.

Kritische Einwände zum traditionellen Sachrechnen

Einwände gegen das traditionelle Sachrechnen und die mit ihm verbundene Konzeption eines Rechenunterrichts für Grund- und Hauptschulen lassen sich unter verschiedenen Gesichtspunkten formulieren. Sie beziehen sich sowohl auf den *fachlich mathematischen Aspekt* der behandelten Stoffe als auch auf allgemeinere *fachdidaktische* und *pädagogische Probleme* und nicht zuletzt auf die Frage der Zielsetzungen.

- In fachlicher Hinsicht wurde vor allem hervorgehoben: Es fehlte vielfach eine mathematisch befriedigende Klärung der verwendeten Begriffe und Verfahren.

Dabei denke man an die Unterscheidung zwischen Zahlen und Größen, z.B. an den Begriff *proportional* oder an Formeln und ihre Umformungen in der Prozentrechnung. Mit fehlender begrifflicher Klarheit wird aber dem Schüler die Möglichkeit zu voller Einsicht genommen, und es besteht die Gefahr, dass die gelernten Rechenverfahren nur als unverstandene Mechanismen *blind* gehandhabt werden.

- Gemeinsame Strukturen in verschiedenen Sachbereichen wurden zu wenig beachtet, eine Einordnung in allgemeinere mathematische Begriffsbildungen unterblieb vielfach ganz, und Querverbindungen zu anderen mathematischen Stoffgebieten wurden zu wenig berücksichtigt.

Mit der Klassifikation von Maßen und Gewichten als „benannten Zahlen“ wird z.B. viel weniger ausgesagt als mit der Einsicht, dass gewisse Rechengesetze charakteristisch sind für Größenbereiche und somit für alle Maße und Gewichte gelten müssen. Proportionalitäten sind spezielle Beispiele für monotone Funktionen, die übrigens bei bei den Sachproblemen der Wirklichkeit weitaus häufiger anzutreffen sind (z.B. Telefonrechnung) als die Proportionalitäten selbst, und monotone Funktionen wiederum sind Spezialfälle von Abbildungen usw.

Die Einwände, die sich auf die Zielsetzungen sowie auf allgemeine pädagogische und didaktische Fragen beziehen, überschneiden sich:

- Die tatsächlich auftretenden und nachweisbaren Anwendungen der im traditionellen Sachrechnen erworbenen Kenntnisse sind nur gering.

Der Begriff der *Lebensnähe*, der im Zusammenhang mit dem Sachrechnen immer wieder genannt wird, ist selbst problematisch. Wenn man einmal absieht von sehr speziellen Berufen wie z.B. bis vor einiger Zeit dem des technischen Zeichners und den wenigen Fällen, wo Schulmathematik für jedermann im Alltag auftritt - etwa der Prozentbegriff beim Rabatt -, so weiß man sehr wenig darüber, wo und in welchem Umfang mathematische Kenntnisse außerhalb der Schule überhaupt gebraucht werden. (H.W. Heymann: Sind sieben Jahre Mathematik genug?)

- Aufgaben aus der Welt der Erwachsenen wirken häufig nicht motivierend auf das Kind.

Die üblichen Aufgaben aus der Erwachsenenwelt, z.B. Fragen beim Autokauf sind für das Kind nicht akut, es handelt sich um ein *Lernen auf Vorrat*. Doch zeigt sich hier ein Dilemma: Einerseits ist es Aufgabe der Schule, das Kind auf die Welt der Erwachsenen vorzubereiten, andererseits dürfen seine gegenwärtige Situation, seine Interessen und Bedürfnisse nicht vernachlässigt werden.

- Sachaufgaben haben häufig den Charakter von Einkleidungen vorgegebener mathematischer Zusammenhänge und Verfahrensweisen und stellen sich schon deshalb so nicht im außerschulischen Bereich.

Die entscheidende Frage lautet also: Was ist früher, der jeweilige mathematische Inhalt, ein bestimmtes Rechenverfahren oder das zugehörige Sachproblem?

- Um für den Schüler mit einer mathematischen Bearbeitung zugänglich zu sein, müssen die Sachprobleme oft so vereinfacht werden, dass die *Wirklichkeit* stark verfälscht wird.

Dies gilt zum Teil gerade für Standardprobleme des Sachrechnens: Der Zusammenhang zwischen Warenmenge und Preis ist in den seltensten Fällen wirklich eine lineare Funktion, wie dies in fast allen entsprechenden Aufgaben vorausgesetzt wird, häufig gibt es ja so etwas wie einen Grundpreis (vgl. Telefon) oder eine Rabattstaffelung. Der Preis hängt also von viel mehr Faktoren ab, als dies im Rechenbuch erscheint. Oder: Grundstücke sind nur in den seltensten Fällen rechtwinklig, wie man es bei der Flächenberechnung in der Schule haben möchte (dies trifft sogar auf das üblicherweise benutzte „Klassenzimmer“ oft zu).

- Die durch Sachrechnen vermittelten Inhalte entsprechen vielfach nicht der Umwelt der Schüler und werden bei Konzentration auf den formal rechnerischen Aspekt aus ihrem Zusammenhang gerissen und nicht mehr kritisch gesehen.

Dieser Punkt ist von besonderem Gewicht. Es gab in vielen Schulbüchern den kleinen bäuerlichen Betrieb und den mittelständigen Handwerker in einem Maße, wie es für die Lebensumstände der meisten Schüler schon lange nicht mehr charakteristisch ist, ebensowenig wie die Normalfamilie mit dem gut verdienenden Vater, zwei Kindern, einer Mutter, die den Haushalt führt, und einer märchenerzählenden Großmutter.

Inzwischen bemühen sich die Autoren von Schulbüchern, aktueller zu sein. Aber selbst wenn anhand des letzten Statistischen Jahrbuchs das Jahreseinkommen verschiedener Berufsgruppen verglichen wird, wenn Zahlen über Entwicklungshilfe oder über Mietsteigerungen genannt werden, so ist doch die entscheidende Frage, ob dann nur Unterschiede, Prozentsätze oder Durchschnittswerte berechnet werden, oder ob die Frage nach den Ursachen und Auswirkungen der berechneten Werte auch wirklich diskutiert werden.

Offensichtlich werden damit die traditionellen Grenzen des Faches Mathematik gesprengt, und die Grenzen zu anderen Fächern wie Gemeinschaftskunde, Arbeitslehre, Geographie usw. werden fließend. Man könnte dann zu einem fächerübergreifendem Unterricht kommen (aber welche Lehrer bzw. Kultusminister sind dazu in größerem Maße bereit?). Hält man dies nicht für erforderlich oder mag man es vielleicht um der Mathematik willen nicht hinnehmen, so ist doch folgendes zu bedenken: Die Berechnung einer Differenz oder eines Prozentsatzes gehorcht mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Wird der inhaltliche Hintergrund nicht mitdiskutiert, so besteht die Gefahr, dass das Gesetzmäßige und Notwendige der Rechnung ungewollt auf die Sache selbst übertragen wird und dass der Schüler die Sachverhalte, die den Hintergrund seiner Rechnungen bilden, unkritisch hinnimmt.

Die aufgeführten Einwände gegen das traditionelle Sachrechen enthalten natürlich auch einen positiven Aspekt: Gelingt es nämlich, sie im Unterricht zu berücksichtigen, so kann sich das Sachrechnen gerade dadurch als überaus fruchtbar erweisen.

Umwelterschließung und mathematisches Denken im Sachrechnen - Thesen zu den positiven Aspekten und Möglichkeiten

Nach den bisherigen Überlegungen und Zitaten ist nach einer Synthese zu fragen, nämlich der Möglichkeit mathematisch-struktureller Betrachtungsweisen bei Sachproblemen:

Beim Erarbeiten rein mathematischer Begriffe und Strukturen sollten nicht nur dafür konstruierte mathematische Spiele, Lernmaterialien und dergleichen eingesetzt werden, sondern soweit irgend möglich, sollte man stets auch Beispiele und Modelle aus der Umwelt der Schüler und Schülerinnen heranziehen. Dann nämlich sind eher die Voraussetzungen für einen Transfer des Gelernten gegeben.

Ein elementares Beispiel aus dem Geometrieunterricht: Symmetrieachsen lassen sich nicht nur bei den abstrakten Figuren der Geometrie wie Dreieck, Rechteck oder Raute beobachten, sondern auch bei Möbelstücken, Fahrzeugen und vielem mehr. Dabei sind auch die oben genannten Figuren für die Kinder nicht wirklich abstrakt, sondern werden von diesen als durch das Bild real verkörpert angesehen. Was hindert uns dann, von realen Gegenständen in der Umwelt der Kinder auszugehen?

H. Winter und P. Bender haben auf solche Beispiele und die mit ihnen gegebene Möglichkeit einer Erschließung der Umwelt durch Mathematik hingewiesen:

Beim Umgang mit Sachproblemen und dem Stoff des traditionellen Sachrechnens muss stärker als bisher auf die zugrundeliegenden Strukturen und Begriffe hingearbeitet werden. Dabei geht es jedoch nicht nur um bessere Einsicht in die benutzten rechnerischen Verfahrensweisen - ein solches Postulat war ja in den Äußerungen der älteren Volksschulrichtlinien zum Sachrechnen immer schon enthalten - sondern es geht durchaus um die Entwicklung und Schulung mathematischen Denkens.

Bei einem konsequenten derartigen Vorgehen wirkt sich das Transferproblem weniger aus; denn logisches Denken, Strukturerfassen usw. werden von denjenigen Inhalten her aufgebaut, auf die sie angewendet werden sollen. Man muss dabei jedoch in Kauf nehmen, dass die zu diskutierenden Begriffe und Strukturen unter Umständen andere sind als diejenigen, die von der Mathematik als Wissenschaft her als besonders einfach und grundlegend erscheinen. Es ist in dieser Sichtweise fast zwingend, dass inzwischen bei der Diskussion um die Zielsetzungen des Mathematikunterrichts nicht mehr nur einerseits mathematisches Denken und andererseits Anwenden von Mathematik einander gegenübergestellt werden, sondern dass der Begriff der *Mathematisierung von Umweltsituationen* mehr und mehr in den Vordergrund tritt.

Diese Mathematisierungsprozesse können auch in Materialien für Lehrer nur skizzenhaft beschrieben werden und gehören - wenn sie wirklich vom Schüler geleistet werden - zum fruchtbarsten, aber vielleicht auch schwierigsten Arbeiten innerhalb des Mathematikunterrichts. Sie sind ja auch nicht ein für allemal planbar, sondern müssen sich in kleinen und größeren Unterrichtsprojekten immer wieder neu aus der konkreten Situation der Klasse ergeben.

Nun könnte man den beiden Begriffen der *Anwendung von Mathematik* und der *Mathematisierung* vielleicht allen Mathematikunterricht schlechthin unterordnen. Dem steht die Einschränkung auf den numerischen - vielleicht sollte man sogar enger sagen: *arithmetischen* - Aspekt eines Problems entgegen. So nimmt z.B. die beschreibende Statistik im

neuen Sachrechnen eine zentrale Stellung ein, während eher theoretische Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zum Sachrechnen zu zählen sind.
Im folgenden sollen nun den Einwänden gegen das traditionelle Sachrechnen positive Gesichtspunkte und Möglichkeiten gegenübergestellt werden. Sie sind nicht allein schon durch eine andere und verbesserte Stoffauswahl gewährleistet, sondern es sind zugleich Ziele, die auch die Art und Weise betreffen, wie Mathematik unterrichtet wird, und die vielleicht auch nicht immer einfach zu realisieren sind.

1. Die im Sachrechnen auftretenden mathematischen Begriffe und Strukturen sind mathematisch relevant und stehen in engen Wechselbeziehungen nicht nur untereinander, sondern auch zu vielen anderen, scheinbar rein mathematischen Begriffen, die in der Schule thematisiert werden.

2. Das Sachrechnen zwingt zu einer Auseinandersetzung mit der Umgangssprache. Die Aufgabe heißt insbesondere: Erkennen mathematischer Operationen oder Zusammenhänge und ihrer logischen Abfolge und Verkettung in einem durch Text vermittelten Sachverhalt.

3. Beim Sachrechnen kann das Problemlösen im Vordergrund stehen im Gegensatz zu einer gewissen Überbetonung des Begriffslernens.

4. Sachrechnen bietet Möglichkeiten zu fächerübergreifenden Unterrichtsprojekten; besonders zu Fächern wie Gemeinschaftskunde oder Arbeitslehre hin sind vielfältige Querverbindungen zu beachten. Vor allem dadurch kann einer „Blindheit gegenüber Inhalten“ begegnet werden.

4 Sachrechnen im Unterricht

4.1 Funktionen des Sachrechnens

Nach dem Versuch der Begriffsklärung „Sachrechnen“ , der im letzten Kapitel im wesentlichen von der historischen Entwicklung ausging, soll nun eine Begriffsbestimmung angegeben werden, die aus einer Beschreibung der didaktischen Funktionen des Sachrechnens hervorgeht.
Man kann im *Grundschulunterricht* die drei folgenden - allerdings nicht streng voneinander trennbaren - didaktischen Sinngebungen unterscheiden (vgl. H. Winter: Sachrechnen in der Grundschule):

- Sachrechnen als Lernstoff
- Sachrechnen als Lernprinzip
- Sachrechnen als Lernziel: Befähigung zur Erschließung der Umwelt

Bei der Funktion *Sachrechnen als Lernstoff* geht es darum, Wissen über Größen und Fertigkeiten im Umgang mit Größen aufzubauen. Diese Bemühungen machen nur dann Sinn, wenn sie eingebettet werden in die Zielvorstellung, sachrechnerische Fähigkeiten im Rahmen eines Beitrags zur Denkentwicklung der Schüler und zur Erschließung ihrer Umwelt anzustreben.
Bei der Funktion *Sachrechnen als Lernprinzip* geht es darum, den Bezug auf die reale Umwelt und den praktischen Erfahrungsbereich der Schüler für die Entwicklung und Entfaltung mathematischer Fähigkeitenkann zu nutzen. Dies kann auf dreifache Weise geschehen:

- Sachaufgaben als Ausgangspunkte (Einstiege) von Lernprozessen
- Verlebendigung, Verdeutlichung, Veranschaulichung von mathematischen Begriffen durch ihre Verkörperung in Sachsituationen
- Sachaufgaben als Feld der Einübung mathematischer Begriffe und Verfahren

Das *Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung* ist die umfassendste Funktion des Sachrechnens, sie schließt Sachrechnen als Lernstoff und als Lernprinzip ein.
Entscheidend ist dabei der *Primat der Sache*: Sachsituationen sind nicht nur Mittel zur Anregung, Verkörperung oder Übung, sondern selbst der Stoff, den es zu bearbeiten gilt. Sachrechnen ist damit *auch* Sachkunde. Die Schüler sollen befähigt werden, umweltliche Situationen durch mathematisches Modellieren klarer, bewusster, auch kritischer zu sehen. Dabei sollen sie auch erfahren, dass die mathematischen Modelle lediglich Entwürfe, Konstruktionen darstellen, die nur gewisse Aspekte der Realität erfassen und andere mehr

oder weniger vollständig ausschließen. Insofern bedarf die mathematisch orientierte Erschließung der Umwelt immer noch anderer Weisen der Interaktion zwischen Mensch und Welt.

In der *Sekundarstufe I* sind die beiden ersten Ziele eher unter dem Aspekt der *Strukturorientierung* zu sehen, da es hier neben dem Ausbau der Größenlehre sehr stark um die Einführung mathematischer Hilfsmittel aus der Algebra und Funktionenlehre geht.

Dabei hinsichtlich der *Einführung* weiterer Größenarten nicht mehr viel zu tun, da nur noch der *Flächeninhaltsbegriff* und der *Volumenbegriff* im Rahmen des Geometrieunterrichts abschließend geklärt werden.

Zum Lernstoff gehören nun jedoch zunehmend auch *algebraische* Unterrichtsinhalte wie die Berechnungsformel

$$A = a \cdot b$$

für den Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b und

$$V = a \cdot b \cdot c$$

für das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c.

Außerdem muss z. B. der *Verhältnisbegriff* für Größen eingeführt werden, damit Längenberechnungen in Strahlensatzfiguren möglich werden und am Ende der Sekundarstufe I die Trigonometrie behandelt wqerden kann.

Das dritte Ziel wird in den Schuljahren 5 bis 10 unter dem Aspekt der *Anwendungsorientierung* angesprochen und gilt als wesentlicher Bestandteil von *mathematischer Grundbildung.*

4.2 Beispiele für die drei Funktionen des Sachrechnens

Sachrechnen als Lernstoff

Es gibt einen allgemeinen Konsens darüber, daß der sachrechnerische Stoff in jedem Fall die „bürgerlichen Größen" Stückzahlen, Geldbeträge, Längen, Zeitspannen, Gewichte, Temperaturen (dies sind eigentlich **keine** Größen im Sinne der Definition aus 1.2) und (einführend) Flächen- und Rauminhalte umfassen soll. Das ist seit langem kanonischer Inhalt in der Grundschule. In neuerer Zeit dringen elementare Verfahren und Begriffe der Statistik in die Grundschule (siehe Richtlinien von 1985). Diese sollen die Inhalte des „bürgerlichen Rechnens" nicht ersetzen sondern ergänzen. Dies geschieht vor allem im Hinblick auf die sich wandelnde Umwelt, in der die Kinder leben.

Im Vordergrund der Größenlehre und Statistik in der Grundschule stehen

- Zählen, Messen, Schätzen als Methoden zum *Gewinnen von Daten*
(als Meßwerte und Größen)
- Kennenlernen der Maßsysteme und Verankern von Stützpunktwissen über Größen
- Modellieren, Zeichnen, Symbolisieren als Methoden des *Darstellens von Daten* (hierher gehört auch die „Sortenumwandlung")
- Sortieren, Anordnen von Daten, Rechnen mit Größen (auch Mittelwerte bestimmen) als Formen der *Verarbeitung von Daten.*

Zählen ist die erste und fundamentale mathematische Auseinandersetzung des Kindes mit der Welt. *Zählaufgaben* im Schulanfang gibt es in vielfältiger Art:

> Sind mehr Mädchen als Jungen in der Klasse?
> In welcher Straße wohnen die meisten Kinder?
> Wie viele Kinder kommen mit dem Bus?
> Welches ist das Lieblingsgetränk der Kinder?

Das praktische Zählen muss auch in den weiteren Schuljahren immer wieder geübt werden:

> Wie viele Schultage hat das Schuljahr/Kalenderjahr? Warum gibt es einen Unterschied?
> Wie viele Körner sind in einer Weizenähre?
> Wie viele Ziegel liegen auf dem Dach?
> Wie viele Nägel sind in einer Tüte?

Von besonderem Interesse sind *strukturiertes Zählen*, *indirektes Zählen* (über Hilfsmaßnahmen) und Auszählen von Möglichkeiten (also von nicht vorhandenen realen Dingen). Beim strukturierten Zählen werden Gesetzmäßigkeiten oder Muster der Situation genutzt, z.B. beim Auszählen der Fenster eines Hochhauses beachtet man die Gliederung der Stockwerke. Beim Auszählen von Geldbeträgen nutzt man die Sorteneinteilung der Münzen/Scheine. Indirektes Zählen ist erforderlich, wenn man an die Gegenstände gar nicht oder nur mühsam herankommt oder wenn es sehr viele Gegenstände sind und evtl. ein Schätzwert genügt (Stichprobenverfahren, Beispiel „Erbsen in der Konservendose“).

> Wie viele Telefonanschlüsse gibt es in Wuppertal? (Diskussion)

Das Auszählen von Möglichkeiten wird vermutlich in der Schule am wenigsten praktiziert, dabei ist es von besonderem Vorteil für das Verstehen von Wirklichkeit („Simulation“).

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Eis mit 3 Bällchen auszuwählen, wenn 4 Sorten zur Verfügung stehen?
Vorschnelles Rechnen führt wohl zu falschen Ergebnissen, es ist ad hoc eine Zählstrategie aus der Situation zu entwickeln:

Es gibt die Sorten Erdbeere E, Himbeere H, Schokolade S und Zitrone Z. Ein Dreier-Eis kann dann z.B. sein EES, EHZ, SSS oder ...

Alle Möglichkeiten findet man durch planvolles Vorgehen, z.B.

EEE	EEH	EHH		HHH	HHS	HSS		SSS	SSZ		ZZZ			
	EES	EHS			HHZ	HSZ			SZZ					
	EEZ	EHZ				HZZ								
		ESS												
		ESZ												
		EZZ												
	10		+			6	+	3		+	1	=	20	

Ein weiterer Abzählplan geht von der Idee aus, daß es genau drei Arten von Möglichkeiten gibt: 1 Sorte Eis, 2 Sorten Eis, 3 Sorten Eis. Diese Klasseneinteilung ist ein Beispiel für einen Heurismus der Modularität: *Teile eine Aufgabe nach Möglichkeit in Teilaufgaben auf*. Die folgende Veranschaulichung des Abzählplans übersetzt diesen nicht nur in eine geometrische Darstellung, sondern ist eine analoge Übersetzung des kombinatorischen Problems in ein durchaus anspruchsvolles und interessantes geometrisches Problem:

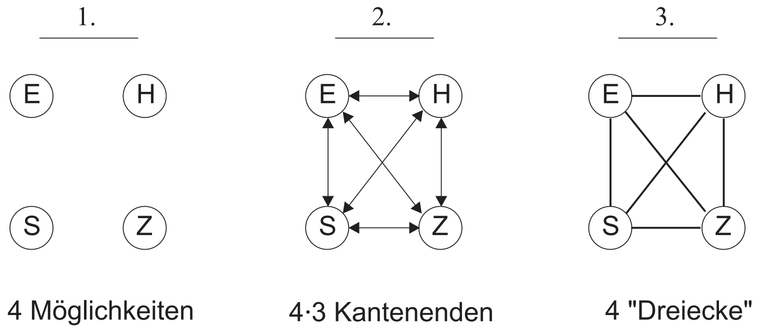
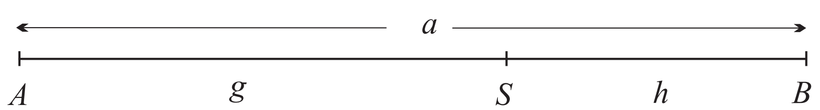


Fig. 1

Und wie viele Möglichkeiten gäbe es bei 5 Sorten und 3 Bällchen, bei 2 Sorten und 3 Bällchen, bei 4 Sorten und 4 Bällchen? Die letzte Darstellung läßt sich wohl recht gut verallgemeinern.

Messen ist die wichtigste Aktivität beim Aufbau von Vorstellungen über Größen. Das praktische Messen mit „Gliedermaßstäben“ , Uhren, Waagen, Messbechern usw. darf nicht zu kurz kommen oder dem Sachunterricht überantwortet werden (wo es dann doch nicht hinreichend geschieht). Wichtig hierbei ist, daß die Schüler mit ihren Sinnen beteiligt sind (sehen, hören, tasten, heben,...) und die Messobjekte interessant erscheinen.

Was kann man z.B. (mit dem Schneidermaß) an sich selbst bzw. an Mitschülern messen? Körpergröße, Halsweite, Armlänge, Schulterbreite, Beinlänge, Schrittlänge, Hüftweite, Wadenweite, Fußlänge, Fingerbreite, Fingerdicke, usw. Dabei können Proportionen bewußt gemacht werden:

> Wo ist die „Mitte“ des Körpers?
> Der Bauchnabel teilt die Körpergröße eines erwachsenen Menschen (etwa) im Verhältnis des „Goldenen Schnitts“ :
>
> *Goldener Schnitt*: Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke der Länge a. Ein Punkt S von $\overline{AB}$ teilt diese Strecke im Verhältnis des *goldenen Schnitts*, wenn für die Länge g der größeren Teilstrecke und die Länge h der kürzeren Teilstrecke $\frac{a}{g} = \frac{g}{h}$ gilt:
>
> 
>
>
> Fig. 1
>
> Wieviel mal ist die Kopfgröße in der Körpergröße enthalten?

Andere Größen sollen ebenfalls von den Kindern „erfahren“ werden:

Zeitspannen z.B. durch lautes Zählen, durch Zählen der Pulsschläge, von Atemzügen.

Gewichte durch Heben und vergleichendes „Hebeln“ von Gegenständen mit den Armen.

Geldbeträge durch Verkaufsspiele mit Rechengeld.

Flächeninhalte durch Ermitteln der Größe des benötigten Hemdenstoffs (Papierhemd anfertigen!) oder durch Ausmessen von Flächen mit der Handfläche.

Rauminhalte durch Ermitteln des täglichen Ess- und Trinkvolumens: „ Wie viele Liter trinke ich?“

Welche Vorstellung haben Sie (die Studierenden und LeserInnen) von großen Zahlen, von z.B. großen Größen? Können Sie sich einen Kubikkilometer vorstellen?
Um wieviel höher steht das Wasser in einem kleinen Teich, wenn bei einem Gewitter 10 Liter/m^2 Regen fallen?

Mit dem Messen lernen die Kinder gleichzeitig passende Messgeräte kennen und handhaben. Das können selbst angefertigte Geräte oder offizielle sein. Dabei muss herauskommen, dass Messen immer ein multiplikatives Vergleichen von zwei Größen derselben Art ist, wobei eine davon als Bezugsgröße, als *Einheit*, gewählt wird. So ist die Aussage „Länge des Schulhofes = 50 mal die Länge eines Schrittes von Heidi“ ebenso die Mitteilung eines Messresultats wie „Länge des Schulhofes = 40m“ . Allerdings ist es nicht sinnvoll, in der Schule das Messen gemäß der geschichtlichen Genese zu entwickeln: die Kinder bringen schon wesentliche Erfahrungen zu den Grundeinheiten der Größenbereiche mit. Allerdings wird in vielen Schulbüchern eine entsprechende Unterrichtsreihe immer noch vorgeschlagen:

Beispiel Längenmessen: Messen mit Körpermaßen (Elle, Daumen, Fuß,...) dann erst offizielle Maßeinheiten: m, cm. Häufig wird noch der Übergang zu den offiziellen Einheiten damit begründet, dass das Messen mit den „alten“ Einheiten (zu) *ungenau* sei.

Will man an die Vorerfahrungen der Kinder anknüpfen, so ist der umgekehrte Weg sinnvoll: das Messen mit Körpermaßen wird dann erst nach der Klärung von Ablesungen an Messgeräten behandelt (z.B. unter dem Stichwort: „wie kann man sich helfen, wenn man kein Messgerät zur Verfügung hat?“). Verzichten darf man auf das Messen durch wiederholtes Abtragen keinesfalls, das es als Erfahrung für das mentale Operieren beim *Schätzen* wichtig ist.
Beim praktischen Messen sollen die Kinder auch erfahren, dass die Bezugsgröße, die Vergleichseinheit passend zu wählen ist. Es ist nicht sinnvoll, den Durchmesser einer Münze in km und die Entfernung zweier Städte in cm zu messen und den Kindern muss auch klar werden, warum das so ist: Gemessene Größe und Bezugsgröße sollen in einem möglichst übersichtlichen Verhältnis zueinander stehen, zu große Zahlen führen zu Problemen bei der Vorstellung. Damit hängt auch die Frage der wünschenswerten und möglichen Messgenauigkeit zusammen. Wie genau soll man, wie genau kann man messen? Wenn die Körperlänge gemessen wird, so reicht im Allgemeinen Zentimetergenauigkeit (warum?). Wenn das Kind 1,37 m groß ist, kann man keinesfalls schließen, dass es 1370 mm groß ist, dies ist eine ganz andere Messmitteilung. Daraus folgt, dass man Messergebnisse nicht naiv in kleinere (oder größere) Sorten umwandeln kann.

Eine besondere Rolle spielen Geldwerte. Hier ist die Erfahrung unbedingt notwendig, dass der Geldwert eines Objektes nicht so gemessen werden kann wie etwa das Gewicht oder der Rauminhalt. Vielmehr wird der Geldwert einer Ware oder Dienstleistung unter Menschen vereinbart oder ausgehandelt.

Geldwerte eines Objektes können in der Zeit erheblich schwanken (gibt es *einen* Gegenstand mehrfach, Qualität, Nachfolgemodell). Geldwerte spielen im Sachrechnen zu Recht eine überragende Rolle, aber in welchem Schulbuch bzw. Unterricht wird dem Gedanken der gesellschaftlichen Bestimmtheit Rechnung getragen? Es gibt viele Aufgaben über das

Fallen und Steigen von Löhnen und Preisen, aber es wird nicht bewusst gemacht, dass dies Menschenwerk ist. Im Gegensatz dazu liegen Gewichte, Längen usw. in der Natur fest.

Wie beim Zählen gibt es auch beim Messen indirekte Methoden.

Zeitspannen - Zeiträume sind von allen Größen am schwersten zu erfassen! - messen wir über die Anzahl regelmäßig wiederkehrender Ereignisse (bei Pendelschläge ist dies klar, wie ist jedoch die Sonnen- bzw. Sanduhr einzuordnen?).

Die Länge von Strecken wird häufig über die Zeitspanne gemessen, die man (bei fester Geschwindigkeit) benötigt, um die Strecke zurückzulegen: „Ich wohne 5 min von der Uni entfernt."

Der Messbecher ersetzt in der Küche das aufwendige Wiegen.

Oft reichen Messinstrumente nicht aus:

Wie dick ist eine Postkarte?
Lege (am Postschalter) 50 Stück übereinander und miss die Dicke dieses Stapels.

Wie viele (normale DIN A4) Blätter darf man in einem Normalbrief versenden, ohne dass der Empfänger Nachporto bezahlen muss? (in den meisten Haushalten existiert keine Briefwaage).

1 m^2 80 g - Papier ergibt 16 Blätter, also wiegt ein Blatt 5g, der Brief darf also 3 Blätter (und den Umschlag) enthalten.

Schätzen ist eine Tätigkeit, die in der Schulpraxis bisher kaum in ihrer Bedeutung gewürdigt worden ist, sogar auch nicht im traditionellen Sachrechnen, das sich im wesentlichen dem „sachrechnerischen Prinzip" verpflichtet fühlte. Dies liegt wohl an einer „Genauigkeitsideologie" (die auch noch unmathematisch ist), wonach nur ziffernmäßig richtige Resultate von Belang sind, und an der Komplexität des Schätzvorgangs, der sich nicht auf rezeptartiges Vorgehen reduzieren lässt.

Ein (scheinbar) einfaches Beispiel: Schätzen des Gewichts einer Banane.

„Hier ist eine Banane. Schätze, wie schwer sie ist!"

Um die Aufgabe zu lösen, muss der Schüler auf Vorerfahrungen zurückgreifen (falls er in diesen Bereich fallende hat), sein Langzeitgedächtnis bemühen. Findet er keine passenden Vergleichsobjekte, kann er nur schweigen (was er aber nicht tun wird) oder raten. Schätzen jedoch ist kein (blindes) Raten. Der Schüler muss die Banane (bzw. ihr Gewicht) mit Gegenständen vergleichen, deren Gewicht er kennt. Er könnte z.B. wissen, dass ein Paket Zucker 1 kg wiegt, und er kann durch vorgestelltes Vergleichen zu dem Schluss (!) kommen, dass etwa 4 - 5 Bananen so schwer wie ein Paket Zucker sind, eine Banane also 200 g bis 250 g wiegt. Auch die Schätzung, weniger als 1 kg und mehr als 100 g (Tafel Schokolade) ist vernünftig.

Eine (komplexere) Schätzaufgabe: „Wie viele Mathematikstunden hast Du in einem Schuljahr?"

Dies führt wohl zu einer „Überschlagsaufgabe" : Jahr 52 Wochen, Ferien: Herbst, Weihnachten, Ostern, Sommer: 1+3+3+7=14. Es verbleiben 38 Wochen. Sind in der Woche

4(5) Mathestunden, so erhält man ca. 140 (180) Stunden, da durch Feiertage und z.B. Konferenzen noch einige Stunden ausfallen.

Man kann weiter überlegen: Wie viele Aufgaben rechnest Du im Jahr?

Wie viele Aufgaben rechnest Du in Deiner Schulzeit?

Schätzen (und nicht Raten) besteht aus einem komplizierten Zusammenspiel von Wahrnehmen, Erinnern, Inbeziehungsetzen, Runden bzw. Überschlagen und Rechnen. Dabei steht das Rechnen keineswegs im Vordergrund. Im Alltag ist Schätzenkönnen äußerst wertvoll und häufig auf die Zukunft bezogen (Prognosen): Wieviel Arbeit kann ich mir vornehmen? Wann muss ich losfahren, um einen bestimmten Termin wahrzunehmen?

Allmählich soll sich bei den Schülern ein Urteilsvermögen darüber bilden, wann mehr oder weniger grobe Schätzungen und wann exakte Werte sinnvoll sind. Der Eismann vor dem Schulgebäude interessiert sich nur für die Größenordnung der Schülerzahl, wenn er disponiert; der Schulleiter dagegen für die genaue Zahl, u.U. ist ein Schüler mehr oder weniger wichtig für die Besetzung einer Stelle oder Teilung bzw. Zusammenlegung von Klassen.

Beim *Kennenlernen der Maßsysteme* ist eines der wichtigsten Teilziele, *realistische Größenvorstellungen* aufzubauen:
In einer Befragung von 388 Viertklässlern (14 Schulklassen) im Jahr 1976 konnten nur rd. 60% die Körpergröße eines erwachsenen Mannes zutreffend einschätzen, es gab Werte von 26 cm bis 1840 cm, 40% der Schüler schätzten die Länge eines Pkw-Parkplatzes auf „unter 3 m“ ein (auch 3 cm, 4 cm, 10 cm!), 60% meinten ein Brötchen wiege weniger als 10 g, 32% erkannten das Stop-Schild als sechseckig, 97% wussten nicht, wie viele Wochen zwischen Ostern und Pfingsten desselben Jahres liegen.
Damit (und aus anderen Gründen) darf man annehmen, dass zur Zeit dieser Untersuchung in der Grundschule der Realitätsbezug im Rahmen der Größenlehre zu schwach entwickelt war.
Es muss ein Repertoire von Stützpunktvorstellungen regelrecht gedächtnismäßig eingeübt werden, das dann immer wieder beim Lösen von Sachaufgaben herangezogen werden muss.

Beispiele für Längen:

1 cm	Fingernagelbreite, Lesebuchdicke, Spielwürfelhöhe
10 cm	Daumen-Zeigefinger-Spanne, Breite einer Postkarte
1 m	großer Kinderschritt, Höhe der Wandtafel
10 m	4 mal Zimmerhöhe, Höhe eines Hauses, Länge von zwei Parkplätzen hintereinander
100 m	Länge eines Fußballfeldes, doppelte Länge des Schwimmbeckens im Freibad
1 km	Weg, für den ich 20 min brauche, zweieinhalb Stadionrunden

Wenn Größen wechselseitig aufeinander bezogen werden, so kann diese Vernetzung das Vorstellen und Behalten stützen. Realistische Vorstellungen von 1000 € können z.B. entstehen, wenn erfasst wird, dass man dafür fast 2 Jahre lang sparen müsste bei wöchentlich 10 € Spargeld, dass die Strecke fast $200 \cdot 120$ mm $= 24$ m lang (= Länge des Flures vor dem Klassenzimmer) wäre, wenn man 1000 € in 5 €-Scheinen (Länge 119,5 mm) hintereinander auslegte, dass man dafür zwei Fernsehgeräte oder die Mathematikbücher für vier Klassen kaufen könnte.

Das *Darstellen von Größen* dient dazu, sie dem denkenden Wahrnehmen zugänglicher zu machen, was umso wichtiger ist, je sperriger, größer und zahlreicher die Werte sind.

Beispiel: Einwohnerzahl von Städten.
Turmmodell (Aufeinanderlegen von Steinen des Damespiels oder Bauen mit Legosteinen), geeignetes Runden der Einwohnerzahlen.
Die Turmhöhen lassen sich gut vergleichen und damit werden die Daten dem vergleichenden Erfassen leicht zugänglich. Für zeichnerische Darstellungen eignet sich das Kästchenpapier des Rechenheftes, bei höheren Ansprüchen benutzt man Millimeterpapier. Piktogramme und Illustrationen können - wegen der Vernetzung mit Alltagsvorstellungen - ausgezeichnete Vorstellungsstützen sein.

Anregungen findet man z.B. in Zeitungen und Zeitschriften. Es erhöht die sachrechnerische Kompetenz in hohem Maße, wenn die Schüler einfache Diagramme (Balkendiagramme, Zahlenstrahl, Punktbilder) anfertigen und lesen (interpretieren) lernen. Die wichtigste Darstellung von Größen ist die symbolische in Ziffern und Zeichen. Sie ist aber auch die anspruchsvollste beim Ent- und Verschlüsseln der darin enthaltenen Informationen. Formales Sortenumwandeln, so notwendig dies auch ist, reicht nicht aus, wenn der Informationsgehalt einer Größenangabe erfasst werden soll, was ja in Sach- aufgaben unabdingbar ist. Die meisten Maßsysteme sind dezimal, so dass die Entwicklung von Größenvorstellungen und der Aufbau des Zahlenraumes Hand in Hand gehen können und sollten. Es empfiehlt sich, die Entschlüsselung und Sortenumwandlung mit einem (gedanklichen, idealen) Messprozess zu verknüpfen:

365 m:

100 m	3 mal, Rest mehr als Hälfte
10 m	36 mal, Rest Hälfte
10 cm	3650 mal
1 cm	36 500 mal

Sind Größenangaben über einem Wirklichkeitsbereich bekannt, so kann man diese Informationen auf verschiedene Arten weiterverarbeiten.

Beispiel: Weitsprung (Klasse 4)

Schüler	Weite in m	Schülerin	Weite in m
Stefan	2,63	Stefanie	2,58
Joachim	2,55	Verena	2,82
Roland	3,36	Iris	2,74
Jörg	2,87	Sandra	2,58
Markus	2,95	Juliane	3,10
André	3,28	Miriam	2,75
Arno	3,40	Judith	2,40
Marco	3,22	Tanja1	2,48
Sascha	3,15	Sabine	2,90
Rüdiger	3,28	Marina	3,02
Maik	3,47	Tanja2	2,36
		Anne	2,95
		Nicola	2,50
		Andrea	3,32
		Heike	2,70
		Karin	2,46

Es bieten sich u.a. folgende Fragestellungen/Aktivitäten an:

Welches ist der weiteste/kürzeste Sprung der Jungen/Mädchen/Kinder? Dazu müssen alle Werte vergleichend durchlaufen werden (Übung im dezimalen Entschlüsseln!)

	Jungen	Mädchen	Kinder
Kürzester Sprung	2,55 m	2,36 m	2,36 m
Weitester Sprung	3,47 m	3,32 m	3,47 m

Wie viele Jungen/Mädchen/Kinder sprangen weiter als 2,80 m und weniger weit als 3,40 m?
Welchen Wert erreichte der Junge / das Mädchen / das Kind, der/die/das in der Mitte stünde, wenn wir die Jungen/Mädchen/Kinder ihrer Weite nach in der Reihe aufstellten? (Zentralwert, Median)

Die Listen sind umzuordnen, eine aufwendige, aber lohnende Aktivität:

Joachim	2,55	Tanja2	2,36	Tanja2	2,36
Stefan	2,63	Judith	2,40	Judith	2,40
Jörg	2,87	Karin	2,46	Karin	2,46
Markus	2,95	Tanja1	2,48	Tanja1	2,48
Sascha	3,15	Nicola	2,50	Nicola	2,50
Marco	**3,22**	Stefanie	2,58	Joachim	2,55
André	3,28	Sandra	2,58	Stefanie	2,58
Rüdiger	3,28	Heike	2,70	Sandra	2,58
Roland	3,36		**2,72**	Stefan	2,63
Arno	3,40	Iris	2,74	Heike	2,70
Maik	3,47	Miriam	2,75	Iris	2,74
		Verena	2,82	Miriam	2,75
		Sabine	2,90	Verena	2,82
		Anne	2,95	Jörg	**2,87**
		Marina	3,02	Sabine	2,90
		Juliane	3,10	Markus	2,95
		Andrea	3,32	Anne	2,95
				Marina	3,02
				Juliane	3,10
				Sascha	3,15
				Marco	3,22
				André	3,28
				Rüdiger	3,28
				Andrea	3,32
				Roland	3,36
				Arno	3,40
				Maik	3,47

Aus den geordneten Listen kann man zahlreiche weitere Aussagen entnehmen und wird zu Fragen angeregt:

- Der Zentralwert bei den Jungen ist 50 cm höher als bei den Mädchen!
- In der „schlechteren Hälfte" aller Kinder sind nur zwei Jungen, aber Andrea sprang weiter als acht der elf Jungen.
- Wo liegen die meisten Werte der Kinder? Suche einen Abschnitt (z.B. 30 cm lang), in den die meisten Kinder sprangen!

- Wie weit sprangen die Jungen/Mädchen/Kinder im Durchschnitt?
  Der *Durchschnitt* ist ein gedachter Ausgleichswert: Welchen Wert bekommen wir, wenn wir die Werte auf einen einzigen Wert ausgleichen, die hohen Werte also niedriger und die niedrigen höher machen? Addiere alle Werte und teile durch die Anzahl der Kinder! (Wieso führt diese Idee zum Ziel?)

Jungen	34,16 m	:	11	=	3,11 m
Mädchen	43,66 m	:	16	=	2,73 m
Kinder	77,82 m	:	27	=	2,88 m

- Vergleich der Zentralwerte mit den Durchschnittswerten: Warum gibt es einen Unterschied (bei den Jungen)? Die niedrigen Werte weichen stark von der Masse ab und ziehen damit den Durchschnitt herunter!

Eine „klassische" Verarbeitung von Daten liegt beim *Dreisatz* vor. Hier genügt die Angabe einer Größe, etwa der Preis pro Stück einer Ware, und man kann daraus weitere Daten produzieren, allerdings mit der oft nicht genügend geklärten Unterstellung, dass „Preis pro Stück" bedeutet: Für jedes gekaufte Stück dieser Ware muss dieser bestimmte Preis bezahlt werden. Nur so funktioniert das Schließen der Schlussrechnung. Es besteht kein logischer Zwang, für 10 Eier 2 € zu bezahlen, wenn für ein Ei 20 Ct verlangt werden. Die Praxis sieht ja häufig anders aus!
Erst durch die ausdrückliche Vereinbarung „Für jedes Ei muss ..." wird erzwungen, dass man für das Doppelte, . . . , Zehnfache der Ware auch den doppelten, . . ., zehnfachen Preis bezahlen muss.

Es gibt zahllose weitere Möglichkeiten, aus gegebenen Daten neue Daten zu erzeugen. Der wesentliche Punkt in der Schule ist aber, die neuen Daten als Antworten auf situationsorientierte Fragen aus den gegebenen Daten einsichtig zu entwickeln. Die folgende Tabelle enthält einige wichtige Situationstypen für die Verarbeitung von Größen.

Situationstyp	*Operation*	*Beispiel*
Wachsen von a um b.	$a + b = x$	Der Urlaub sollte 17 Tage dauern. Er wurde um 5 Tage verlängert.
Wachsen von a auf b.	$a + x = b$ $x = b - a$	Im August hatten wir 315 Kinder in der Schule. Am 1. Dezember waren es 329.
Wachsen um a auf b.	$x + a = b$ $x = b - a$	Das Sparguthaben von Jörg stieg im vergangenen. Jahr um 128 € auf jetzt 753 €
Vergleichen von a mit b.	$a - b = x$ $b - a = y$	Der Feldberg im Schwarzwald ist 1493 m hoch, die Zugspitze 2962 m.
Verkleinern (verändern) von a auf den b-ten Teil. Messen von a mit b.	$a : b = x$ $a : b = x$	Unser Klassenraum ist 6,40 m breit. Wir zeichnen im Maßstab 1 : 10. 200 Flaschen Sprudel sollen auf Kästen zu je 20 aufgeteilt werden.
Verteilen von a an b.	$a : b = x$	Marinas Schulweg beträgt 1350 m. Sie brauchte heute 15 min.
Vermehren (verändern) der Summe von a und b auf das c-fache.	$(a + b) \cdot c = x$	Petras Vater arbeitet täglich 8 Stunden. Für Hin- und Rückweg braucht er zusammen 1 h 20 min. Wie lange ist er in einer Woche mit 5 Arbeitstagen von zu Hause weg?

Sachrechnen als Lernprinzip

Wo immer es sich anbietet, scheint es sinnvoll, einen Lernprozess mit der Beobachtung eines *umweltlichen Phänomens* einzuleiten. Man hofft hierdurch die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass eine größere Zahl von Schülern sich angesprochen (betroffen, weil es ihre Welt ist) und kundig fühlt.

Worüber man etwas weiß, darüber möchte man am liebsten auch sprechen, vor allem dann, wenn man auch selbst noch als „Gesprächsgegenstand“ fungiert. Phänomene als Ausgangspunkte von Lernprozessen mischen auch die Karten wieder neu: schwächere Schüler erhalten die Chance eines neuen Zugriffs. Lernen ist zudem nur als *Weiterlernen* denkbar (Vermehren, Vertiefen, Umordnen vorhandenen Wissens; Trainieren vorhandener Fertigkeiten usw.) und erscheint um so erfolgversprechender, je umfangreicher und besser organisiert die bisherigen Erfahrungen sind, und diese dürften bei den Schülern vornehmlich auf ihre Lebenswelt bezogen sein. Auf der anderen Seite darf man durch einen umweltbezogenen Einstieg keinen Automatismus in der Motivation erwarten, da die angebotene Situation auf eine bestimmte Art betrachtet und damit anders (eben mathematisch) gesehen wird, indem ein mathematisches Modell entwickelt wird.

Ein Einstieg erscheint um so wirkungsvoller, je mehr er den Schülern einerseits vertraut, aber andererseits auch wieder in irgendeiner Form rätselhaft und befragenswert erscheint, je mehr er zum Handeln herausfordert und Handlungsspielraum gewährt und je tragfähiger er als Erfahrungsbereich des intendierten mathematischen Lerninhalts dienlich erscheint.

Kurz: Der Einstieg soll möglichst vielen Schülern möglichst starke Anreize zum selbsttätigen, entdeckenden Lernen bieten.

Der Schritt vom Phänomen, von der Sachsituation zum mathematischen Modell ist jedoch keineswegs einfach, selbstverständlich, glatt oder gar zwangsläufig. Jedes Kind muss ihn alleine tun. Was dagegen in der Hand der Lehrerin liegt, ist das Auswählen eines möglichst passenden Einstieges und die Anregung zu Handlungen und Fragen und das Bereitstellen von Material.

Es ist fast immer möglich, einen begrifflichen Zusammenhang der Schulmathematik in *realen Situationen* zu verkörpern, sei es in alltäglichen, sei es in begrifflich schon teilweise vorstrukturierten Situationen.

Der Eigenschaftsbegriff „Primzahl“ erscheint z.B. verkörpert in Situationen mit Gruppen (Mengen) von Kindern, die sich nicht „richtig“ in gleichstarke Grüppchen, Riegen (Teilmengen) zerlegen lassen.

Der wesentlich komplexere Begriff „Stellenwertsystem“ kann in Verpackungssituationen dargestellt werden.

Auch Sachverhalte (Gesetze, Sätze) lassen sich in Alltagssituationen repräsentieren:
Gesetz von der *wiederholten Subtraktion*: $a - b - c = a - (b + c)$.
Situation: Geldausgeben beim Einkauf.

Die Verkörperung von begrifflichen Zusammenhängen in konkreten Alltagssituationen ist nicht etwa eine Veranschaulichung in dem vordergründigen Sinn als vorübergehende oder nur für lernschwächere Schüler notwendige Verständniskrücke. Vielmehr muss der offenkundigen Tatsache Rechnung getragen werden, dass Verstehen immer an spezifisches Vorstellungsmaterial gebunden ist und nicht in einem freien abstrakten Raum operiert. Wenn dem aber so ist, so erscheint es didaktisch sinnvoll, begriffliche Zusammenhänge möglichst in solchen Situationen darzustellen, die den Schülern aus zahlreichen früheren Alltagserfahrungen vertraut sind. Man darf dann ein höheres Maß an emotionaler Beteiligung (Motivation), an Einsicht und nicht zuletzt an gedächtnismäßiger Verankerung erwarten. Allerdings ist das Verhältnis *Begriff - Repräsentation des Begriffs* keineswegs von einfacher Natur. Eine Alltagssituation ist nicht von sich aus schon eine Verkörperung eines Begriffs, sie wird es erst, wenn man sie im Licht des Begriffes sieht und interpretiert.

Beispiel: von einem Tablett fallen Gläser herunter

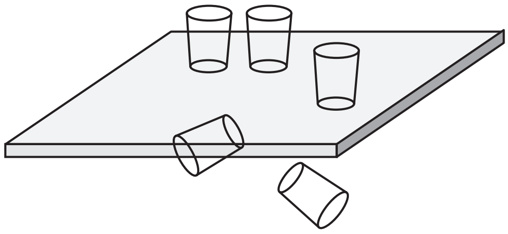


Fig. 1

Damit diese Situation als Subtraktionssatz 5 - 2 = 3 gedeutet werden kann, muss nicht nur die Alltagssituation verstanden werden, sondern es muss schon vorhandenes arithmetisches Wissen eingebracht, in die Situation *hineingesehen* werden.

Eine Alltagssituation ist in diesem Zusammenhang um so besser als Verkörperung von mathematischen Inhalten, je mehr sie begrifflich ausgebeutet werden kann und nicht nur eine eng umgrenzte, singuläre und unbewegliche Vorstellung abgibt. Die obige Subtraktionssituation lässt eine Fülle wichtiger Subtraktionserfahrungen zu: Je mehr Gläser herunterfallen, um so weniger bleiben stehen. Stellt man für jedes heruntergefallene Glas ein neues aufs Tablett, dann sind es wieder so viele wie vorher (Umkehraufgabe, Zusammenhang von Addition und Subtraktion).

Häufig wird im Unterricht die(eine) angestrebte Repräsentation eines Begriffes als Einstiegssituation gewählt. Geschieht die Entwicklung eines neuen Begriffs durch die Aufarbeitung und Neudeutung einer hinreichend tragfähigen Situation, so spricht man von *exemplarischem* oder *paradigmatischem Lernen* (nach Wagenschein).

In der heutigen Schulpraxis ist Sachrechnen häufig noch als *Übungsrechnen* verbreitet: Zum Zweck der Einübung eines Begriffes oder - vor allem - eines rechnerischen Verfahrens werden sogenannte *eingekleidete Aufgaben* aus den verschiedensten Gebieten gelöst, und das ist keineswegs auf die Grundschule beschränkt. Meist gibt es eine Zweiteilung des Lernprozesses: In der ersten Phase wird die Theorie (der Begriff, das Rechenverfahren) entwickelt, die in der zweiten Phase geübt wird. Die meisten Schulbücher bieten hierzu ganze *Aufgabenplantagen* an, oft noch nach Schwierigkeitsgrad oder Sachgebieten sortiert. Diese Zweiphasigkeit ist lokal und global ausgeprägt.

Lokal : Nach der Behandlung eines eng umgrenzten arithmetischen Inhalts (z.B. Addition reiner Zehner in Klasse 2) erfolgt sofort ein sachrechnerisches Üben (z.B. Aufgaben mit Briefmarken, Preisen in 10 Ct-Münzen, Dezimetern).

Global : An die Durcharbeitung eines umfangreicheren Stoffgebietes (z.B. schriftliches Dividieren) werden zur Einprägung längerfristige Übungen mit eingekleideten Aufgaben angeschlossen.

Diese nachgereichte Anwendung dient nur bedingt der Förderung sachrechnerischer Fähigkeiten, ein solcher Anspruch wird auch häufig nicht erhoben. Aber wozu macht man es dann? Die Schüler sollen in erster Linie Sicherheit und Geläufigkeit in arithmetischen Fertigkeiten erlangen, die sachliche *Verkleidung* soll dieses Üben abwechslungsreicher und farbiger machen. Die Sachthemen beschränken sich auf alltägliche Situationen, damit vor dem Rechnen nicht erst noch viel geklärt werden muss, sie wiederholen sich sehr stark und sind untereinander weitgehend austauschbar. Die Entschlüsselung des Textes erfordert keine ernsthafte Auseinandersetzung mit der geschilderten Situation. Wichtig ist allein die zahlenmäßige Lösung, eine Rückinterpretation in die Situation findet nicht statt.

Beispiele:
a) Bericht aus dem Praktikum SS 1996:
Thema Division Klasse 4:
Sonderangebot: Zwei Wochen Mallorca kosten für zwei Personen DM 1250. Was kostet die Reise für eine Person?
b) Bericht in der WZ vom 5. Juni 1996:
Ein thailändisches Berufungsgericht hat einem Verurteilten Recht gegeben, der gegen eine Haftstrafe von 4220 Jahren Berufung eingelegt hatte. Die Strafe des Beamten, der wegen Veruntreuung von Spendengeldern verurteilt worden war, wurde (auf 2110 Jahre) halbiert.

Wenn das Sachrechnen nahezu ausschließlich ein solches reproduktives Einübungsrechnen ist, ist die Gefahr besonders groß, dass Schüler Textaufgaben nur als Rechenaufgaben deuten und sich um das Verständnis der Sache erst gar nicht bemühen. Ein solches Übungssachrechnen könnte aber (neben dem Übungseffekt für das Zahlenrechnen, der nicht unterschätzt werden soll) doch auch einen bescheidenen Beitrag zur Förderung der eigentlichen sachrechnerischen Kompetenz darstellen, wenn es stärker als Übung im *Transferieren* betrieben würde, wenn dem Schüler das Anwenden mehr zum Bewusstsein käme. Möglichkeiten in dieser Richtung wären:

- Der Schüler soll selbst eine Frage stellen (auch wenn dadurch Schwierigkeiten beim Kontrollieren und Bewerten entstehen).

- Es sollen Aufgaben bewusst und im einzelnen miteinander verglichen werden. Wie passen z.B. die folgenden Texte zueinander?
„Die Brotverkäuferin hatte um 10 Uhr 118 € in ihrer Kasse. Eine Stunde später, um 11 Uhr, zählte sie 143 €.“
„Am 1. Januar 1984 wog der Vater von Rosi 73 kg, und am 1. Januar 85 wog er 81 kg.“

- Es werden Aufgaben eingestreut, die nicht zum Typ passen, vielleicht sogar *Kapitänsaufgaben*.

- Vor allem: Die Schüler sollen selbst Aufgabentexte herstellen, z.B.:
Erzählt eine Verteilungsgeschichte mit Gewichten.
Erzählt eine Unterschiedsgeschichte zum Lebensalter von Menschen.
Erzählt eine Geschichte über das Abfüllen von Milch.

Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung

Der eigentliche Inhalt des Sachrechnens im Dienste der Umwelterschließung besteht darin, zu umweltlichen Bereichen mathematische Modelle aufzubauen, man kann dies als *Situationen mathematisieren* bezeichnen.
Wir verwenden hier das Wort *Modell* als Bezeichnung für einen innermathematischen (in der Regel arithmetischen) Zusammenhang, der seinerseits in Worten, Symbolen, Grafiken dargestellt ist und der als eine Interpretation, als ein (mathematisches) Deutungsmuster eines realen Phänomenbereiches dient. So ist die Zahlenreihe 1, 2, 3, ... mit der Prozedur des Zählens ein Modell für Situationen, in denen Gegenstände voneinander unterschieden werden können, die also wenigstens eine Zeitlang konstant bleiben. Dieses Modell passt zu Situationen wie „Schüler im Klassenzimmer“ , „Autos auf einem Parkplatz“ , nicht aber zu Situationen wie „Wolken am Himmel“ oder „Milchtropfen in der Tasse“ . Das Modell erlaubt es, Mächtigkeitsfragen („Wie viele ...?“) und Rangfragen („Der wievielte ...?“) zu stellen und zu beantworten. Dabei werden die gezählten Gegenstände als Individuen ohne Eigenschaften, als statistische Einheiten, als Zähleinheiten angesehen. In der Feststellung „Im Wartezimmer warten z.Z. 8 Patienten“ werden die Patienten als untereinander austauschbar angesehen, weitere Merkmale (Alter, Geschlecht, Einkommen, Beruf, Aussehen, Religion usw.) sind ausgeblendet.

Oft ist die *Modellierung* ein äußerst kompliziertes Unternehmen. Das Modell springt nicht einfach durch Beobachtungen aus der Situation heraus ins Auge, insofern ist Modellbildung ein konstruktiver, kreativer Akt. Der Beobachter muss schon über Begriffe, Symbole, Verfahren usw. verfügen, aus denen er - zunächst versuchsweise - ein Modell bildet. Somit ist Modellierung immer auch an Vorwissen als Material gebunden. Mit dem Vorwissen wird ja bereits die Situation beobachtet; das Vorwissen diktiert in starkem Maße mit, was überhaupt wahrgenommen wird. Kurz: Die Modellbildung ist keine Einbahnstraße von der Situation zur begrifflichen Aufarbeitung, sondern viel eher ein Wechselspiel aus Wahrnehmen und Hineindeuten.
In idealtypischer Weise kann man die Mathematisierung einer Sachsituation als Prozess darstellen, in dem verschiedene Stufen mit zunehmendem Komplexitätsgrad durchlaufen werden (Müller/Wittmann: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe):

1. Situation wahrnehmen, Muster erkennen, Fragen entwickeln
2. Modell (oder mehrere alternative Modelle) entwerfen, evtl. weitere Daten beschaffen
3. im Modell Informationen verarbeiten, Fragen im Modell lösen
4. gewonnene Modelllösung auf die Situation zurück übertragen und bewerten, Tragweite des Modells erkunden (Transfers versuchen)

Aus den noch vorzustellenden Unterrichtsbeispielen (bzw. Inhalten) wird zu erkennen sein, wie unterschiedlich das Mathematisieren im einzelnen gestaltet sein kann. Wichtig, ist, dass die Schüler auf allen Stufen eines Mathematisierungsprozesses die Möglichkeit zur *Selbsttätigkeit* haben.

In der Stufe 1. ist die Entwicklung von Fragen besonders bedeutungsvoll. „Welche Aufgaben, welche Fragen könntest du hier stellen? Was fällt auf? Hast du eine Erklärung?“ Kühnel hat bereits 1922 gefordert: „... dass nichts so wichtig ist für alle intellektuelle und ethische Bildung, als dass das Kind sich selbst Aufgaben stellen, selbst Probleme suchen, finden, formulieren und zerlegen lerne.“ Die Sensibilisierung für Wahrnehmen, Teilhaben, Fragen dürfte heute eher noch notwendiger sein als zu Kühnels Zeiten.

Die Stufe 2. ist sozusagen per definitionem eine schöpferische Stufe: „Was ist hier die Hauptsache? Wie hängen die Sachen untereinander zusammen? Wie kannst du dir den Zusammenhang klar machen? Wie kannst du die Sache darstellen?“ Dies sind einige allgemeine Impulse, die zur Modellbildung anregen können.

Die Stufe 3. ist stärker reproduktiv, häufig werden bereits gelernte Rechenverfahren angewendet. Es ergibt sich aber nicht selten das Bedürfnis oder die Notwendigkeit, neue Rechenprozeduren zu entwickeln oder bekannte abzuändern. „Wie kannst du möglichst geschickt das Ergebnis, die Ergebnisse abschätzen/bestimmen/ausrechnen/zeichnen/ darstellen ...?“

In der Stufe 4. ist das Bemühen um das Übertragen des Modells auf neue Situationen das eigentlich kreative Moment. „Wo gibt es etwas Ähnliches? Wo kannst du das Gelernte auch noch benutzen? Was kannst du jetzt auch besser verstehen?“ sind hier mögliche Schlüsselfragen.

Mathematisierungsprozesse sind also Problemlöseprozesse mit der zusätzlichen Komponente, dass die Probleme weniger von außen (Lehrer, Schulbuch) gegeben, als bei der Analyse der Situation entwickelt werden. Beim Mathematisieren sollen die Schüler nicht nur etwas Sachkundliches und nicht nur etwas Mathematisches lernen, von ebensolcher Bedeutung ist der Erwerb von allgemeinen Problemlösefähigkeiten, also von Heurismen, wie:

- Texte mit eigenen (anderen) Worten wiedergeben
- Texte gliedern
- verdeutlichende Skizzen anlegen, Skizzen deuten
- Tabellen herstellen und lesen
- eine Sache von einer anderen Seite her sehen
- eine Situation umdeuten
- eine Vermutung testen
- ein Ergebnis abschätzen usw.

Welche Situationen für eine Mathematisierung lohnenswert und ergiebig erscheinen, kann kaum griffig und scharf formuliert werden, es ist auch eine Frage der regionalen und lokalen Verhältnisse und der besonderen Interessen der Lehrerin. Es gibt eine unerschöpfliche Fülle von Möglichkeiten. Eine kleine Zusammenstellung:

- Häusliches Leben: Eine neue Wohnung wird gesucht.
- Geschwister: Yvonne hat ein Brüderchen bekommen
- Schulleben: Schulwege - wo wohnst du?

- Spielen: Pfeile werfen - wer trifft ins Schwarze?
- Sport: Bundesjugendspiele
- Freizeit: Anja wünscht sich einen Hund.
- Post: Ein Brief nach München oder Remscheid.
- Fliegen: Wie groß ist ein Jumbo-Jet?
- Eisenbahn: Wir fahren nach Bonn.
- Fahrrad: Wie schnell, noch schneller?
- Telefonieren: Kleingeld gefragt.
- Einkaufen: Angebote in der Zeitung.
- Sparen: Bei welcher Bank oder Sparkasse?
- Verkehr: Der Bus hat Verspätung.
- Wasser: Wieviel Wasser verbrauchen wir?
- Ferien: Nach Mallorca oder in den Schwarzwald?
- Bauernhof: Hennen und Eier.
- Hotel: Schon ausgebucht.
- Fabrikarbeit: Arbeit und Verdienst - früher und heute.
- Theater: Gute Plätze - teure Plätze.

Von Natur aus ist umwelterschließendes Sachrechnen *fächerübergreifend*, und es kann nur überzeugend unterrichtet werden, wenn die Lehrerin weit über den Rechenzaun blicken kann und ihr Allgemeinwissen ständig erweitert.

Als überzeugendste Organisation ist für diese umwelterschließende Sachrechnen der *Projektunterricht* anzusehen. Alle Aktivitäten der Schüler (und Lehrerin) sind auf ein Thema, auf eine Aufgabenstellung konzentriert. Er ist eine Art Gesamtunterricht oder Epochenunterricht, der in der Grundschule eine lange Tradition hat, allerdings auch oft umstritten war und ist, der von allen Reformströmungen in verschiedener Ausprägung immer wieder gefordert wurde. Ist Projektunterricht im eigentlichen Sinne nicht durchzuführen, so ist es jedoch in der Regel gut möglich, im Mathematikunterricht zusammen mit dem Sach- und Sprachunterricht in weiten zeitlichen und thematischen Grenzen *projektartig* zu unterrichten. Dies kann zumindest in dem Sinne geschehen, dass in einem möglichst überzeugendem Maße die Sachsituation als originär und authentisch erlebt werden kann.

Beispiele aus MÜLLER/WITTMAN: Der MU in der Primarstufe („Blaue Bibel“):

- Einrichten eines Aquariums
- Entwurf einer Ampelanlage

- Von Dortmund nach Nürnberg
- Schulmilchtüten
- Nägel schätzen
- Mini-Gruppen-Karte der DB

Auch in ausländischen Mathematikkursen gibt es Beispiele für Projekte zur Umwelterschließung, z. B. im englischen Nuffield-Programm. Die weit verbreitete Sorge, dass die vom mathematischen Stoff geforderte Systematik zu kurz kommt ist zum einen nicht aus innermathematischen Gründen für die Grundschule begründbar, zum anderen auch nicht stichhaltig: Es wird nicht gefordert, dass der *gesamte Mathematikunterricht* aus einer Serie von Anwendungsprojekten bestehen soll. Außerdem ist das Lernen weitaus weniger systematisch als üblicherweise unterstellt wird. Systematischer Unterrichtsaufbau einerseits und Erkenntnisgewinn und Fähigkeitsertüchtigung im Kopf der Kinder andererseits verlaufen oft nicht parallel. Mathematisierungsprojekte können zu Pfeilern des Verständnisses werden, auf denen das Gebäude des mehr systematisch organisierten Mathematikwissens beruht, was sich freilich aber nicht von selbst ergibt.

Die sachkundlichen Ausgangssituationen lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten unterscheiden. Die wichtigsten sind

- Authentizität (von „unmittelbar aus dem Leben gegriffen“ bis zu „fingiert/frisiert“)
- Zugänglichkeit (von „direkt beobachtbar“ bis „durch Medien vermittelt“)
- Reichhaltigkeit gegenüber Problemstellungen (von „offen für viele verschiedene Fragestellungen“ bis „eingeengt auf eine Frage“)
- Praxisnähe der Problemstellung (von „direkt im Leben verwertbar“ bis „von eher theoretischem Interesse“)
- Schwierigkeit bei der Modellbildung (von „erfordert mehrere Umstrukturierungen“ bis zu „lässt sich unmittelbar auf Routinefall reduzieren“)

Hiermit ist - wenn man noch die unerschöpfliche Vielfalt im Thematischen hinzunimmt - eine enorme Variabilität gegeben, die es ermöglicht, sehr unterschiedlichen Gegebenheiten und Zielvorstellungen gerecht zu werden. Nicht zuletzt finden sich hier Ansatzpunkte für die Differenzierung im Unterricht.

Insgesamt ist das umwelterschließende Sachrechnen nicht ein nachgeordnetes methodisches Detail, sondern ein anspruchsvolles, voraussetzungsreiches didaktisches Programm, in das tiefere Dimensionen pädagogischen Arbeitens eingehen: die übergeordneten Ziele des Mathematikunterrichts (sein möglicher Beitrag zur Entfaltung der Kreativität und zur Sensibilisierung für die Probleme unserer Welt) und das Bild, das man vom Menschen und vom menschlichen Lernen hat. Von diesem Konzept darf man dann aber auch eine Steigerung der Sachrechenfähigkeit erwarten.

4.3 Beispiele zu Zielen der Sekundarstufe I

Prozent- und Zinsrechnung

Früher sah man die Prozent- und Zinsrechnung als reine Anwendung der Bruchrechnung an und behandelte ihre Grundaufgaben auf Realschulen in manchen Bundesländern hauptsächlich mit dem *Dreisatz*.

Dies war insofern nahe liegend, als man in der Prozentrechnung den *Prozentwert* P als *Anteil* $\frac{p}{100}$ des *Grundwerts* G ansehen kann und damit schon einmal die Grundaufgabe „bestimme den Prozentwert P zum Grundwert G bei gegebenem *Prozentsatz* p“ in der Form

Berechne $\dfrac{1}{100}$ von G und multipliziere das Ergebnis mit p

lösen konnte.

Aus dem Dreisatzschema

$$\begin{array}{ccc} G & - & P \\ 100 & - & p \\ \hline \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} P & - & G \\ p & - & 100 \\ \hline \end{array}$$

kann man auf die beiden anderen Grundaufgaben schließen, indem man den jeweils gesuchten Wert mit x bezeichnet:

$$\begin{array}{ccc} p & - & 100 \\ P & - & x \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} G & - & P \\ 100 & - & x \\ \hline \end{array}$$

Es leuchtet ein, dass so etwas auf Schüler mit Verständnisproblemen wegen der formal unterschiedlichen Schreibweisen und Argumentationen „abschreckend“ wirkt.

Nutzt man dagegen den eingangs erwähnten Zusammenhang zwischen Prozentwert und Grundwert im Sinne des *Zuordnungsgedankens* aus, so erhält man als Schema

$$G \xrightarrow{\frac{p}{100}} P$$

und kann schon einmal die Bestimmung des Grundwerts bei gegebenem Prozentwert und Prozentsatz mit der Darstellung

$$x \xrightarrow{\frac{p}{100}} P$$

in der Form $G = \dfrac{100}{p} \cdot P$ motivieren.

Ein Beispiel aus dem Alltag für diese Grundaufgabe ist die Ausweisung der Mehrwertsteuer auf Rechnungen, wenn bei einem Händler eingekauft wurde, der in seinem Katalog grundsätzlich die Endverkaufspreise angibt, weil er hauptsächlich private Endverbraucher als Kunden hat. So könnte eine etwas „komplexere“ Aufgabenstellung so lauten:

> Auf einer Rechnung steht am Ende:
>
> **Summe: 1 241,00 €**
>
> 16,00% MwSt aus 1 241,00 €: 171,17€ Netto=1 069,83€
>
> Wie und in welcher Reihenfolge wurden wohl die Beträge in der letzten Rechnungszeile bestimmt?

Wer hier nicht den Zusammenhang

$$\text{Nettobetrag} \xrightarrow{\cdot 1{,}16} \text{Summe}$$

sieht, dürfte große Schwierigkeiten im Nachvollziehen der Berechnung haben!
Zieht man analoge Situationen aus dem Bereich der Zinsrechnung heran, so erkennt man, dass immer wieder eine Struktur zu Grunde liegt, bei der eine Größe G bei gegebenem Faktor $q \in \mathbb{Q}^+$ in die Größe $q \cdot G$ überführt wird.
In der kaufmännischen Ausbildung werden solche Faktoren häufig noch separat behandelt und heißen dann je nach Anwendungsgebiet „Zinsfaktor“, „Kalkulationsfaktor“, ... Da hier die „technischen“ Probleme im Vordergrung stehen, werden strukturelle Gemeinsamkeiten nur von wenigen Lernern gesehen.
Die „Operatorsichtweise“

$$\text{Grundgröße } G \xrightarrow{\cdot q} \text{Endgröße } H$$

mag allerdings auch die Ursache dafür sein, dass heute Schülerinnen und Schülern die Bestimmung von q aus G und H etwas schwerer fällt, als die eingangs angesprochene Berechnung von G aus H und q. Als Beleg für diese Auffälligkeit mag ein Vergleich von PISA-Testaufgaben dienen:

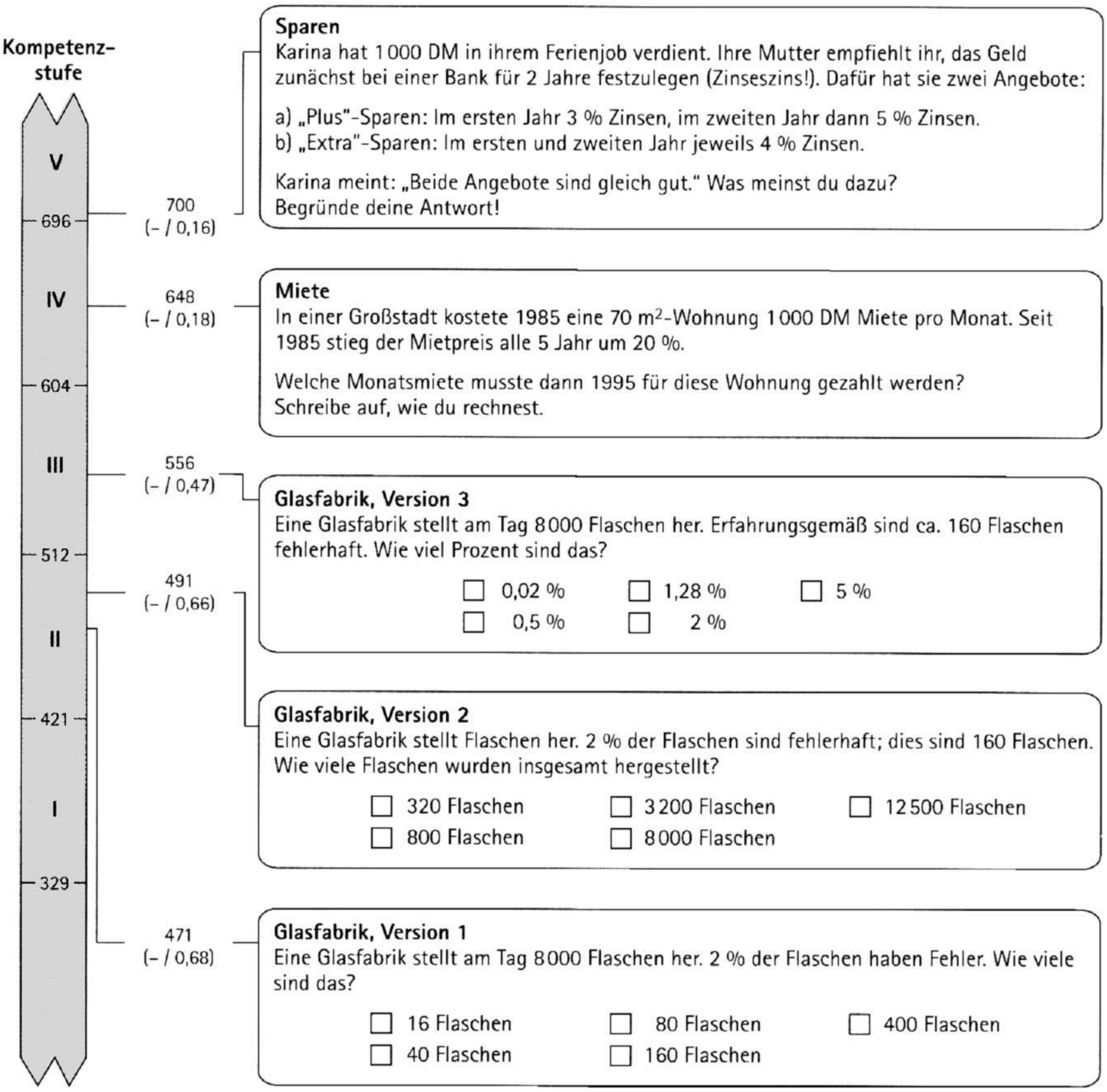


Fig. 1

Hier sind links in Klammer die Lösungsquoten der jeweiligen Aufgaben in der Population aller deutschen 15jährigen angegeben. Die drei Aufgaben „Glasfabrik“ stützen die Behauptung, dass die Bestimmung des Prozentwerts am leichtesten fällt, die Bestimmung des Grundwerts aus Prozentsatz und Prozentwert kaum schwerer fällt, und bei der Bestimmung des Prozentsatzes aus Prozentwert und Grundwert deutlich mehr Fehler gemacht werden.

Zuordnungen (Funktionen)

Die im vorigen Abschnitt angesprochenen Beziehungen werden in der S I immer wieder zum Anlass genommen, die Funktionenlehre auszubauen. Der krönende Abschluss des sachrechnerisch geprägten Abschnitts ist die wiederholte Anwendung proportionaler Funktionen des Typs

$$x \mapsto q \cdot x$$

auf eine „Anfangsgröße“ a nach dem Schema

$$a \to q \cdot a \to q \cdot q \cdot a \to q \cdot q \cdot q \cdot a \to \dots$$

und der Vergleich des *exponentiellen* Wachstums mit dem *linearen* Wachstum.

Dieses Schema liegt schon der *Zinseszinsrechnung* zu Grunde und führt dort zu der bekannten Formel $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ für die Verzinsung eines Anfangskapitals K_0 zum konstanten Jahreszinssatz $p\%$ mit Zuschlagung der jährlichen Zinsen über n Jahre.

Es bildet später die Grundlage für die Behandlung von Wachstumsfragen. Sehr lehrreich sind in diesem Zusammenhang Fragestellungen, wie sie sich z.B. als Variante der „Wasserlinsenaufgabe“ in Schulbüchern finden:

Auf einem Fischteich schwimmen einige Wasserlinsen. Sie bedecken insgesamt $\frac{1}{10\,000}$ der Wasserfläche. Jeden Tag verdoppelt sich ihre Anzahl.
a) Welcher Anteil der Wasserfläche ist nach 1, 2, 3, 4 Tagen bedeckt?
b) Nach wie vielen Tagen ist die Wasseroberfläche halb bedeckt?
c) Nach wie vielen Tagen ist die Teichoberfläche total grün?

Würde an jedem Tag nur eine feste Anzahl von Wasserlinsen dazu kommen, so würde das Wachstum „kurz vor der Katastrophe“ viel weniger spektakulär verlaufen.

Zum Modellierungsbegriff in der S I

An sich könnten wir es mit den Aussagen im Grundschulkabschnitt bewenden lassen. Wir gehen trotzdem noch einmal auf das Modellieren ein, weil dieses sich jetzt auf umfangreicheres mathematisches Wissen gründen kann. So werden zwar nach wie vor manche Modellierungen nur den Rückgriff auf bereits behandelte Standardverfahren verlangen, eine Beschränkung auf ein solches Repertoire ist jedoch nicht vertretbar (man denke hier an Forderungen, wie sich an lebenslanges Lernen und das „Nichtweglaufen vor Problemen“ zu gewöhnen!).

Der *Modellierungskreislauf*, wie er bereits vor der PISA-Diskussion in Schupp, H. (1988) und Blum, W. (1996) angesprochen wurde, lässt sich grafisch wie folgt charakterisieren:

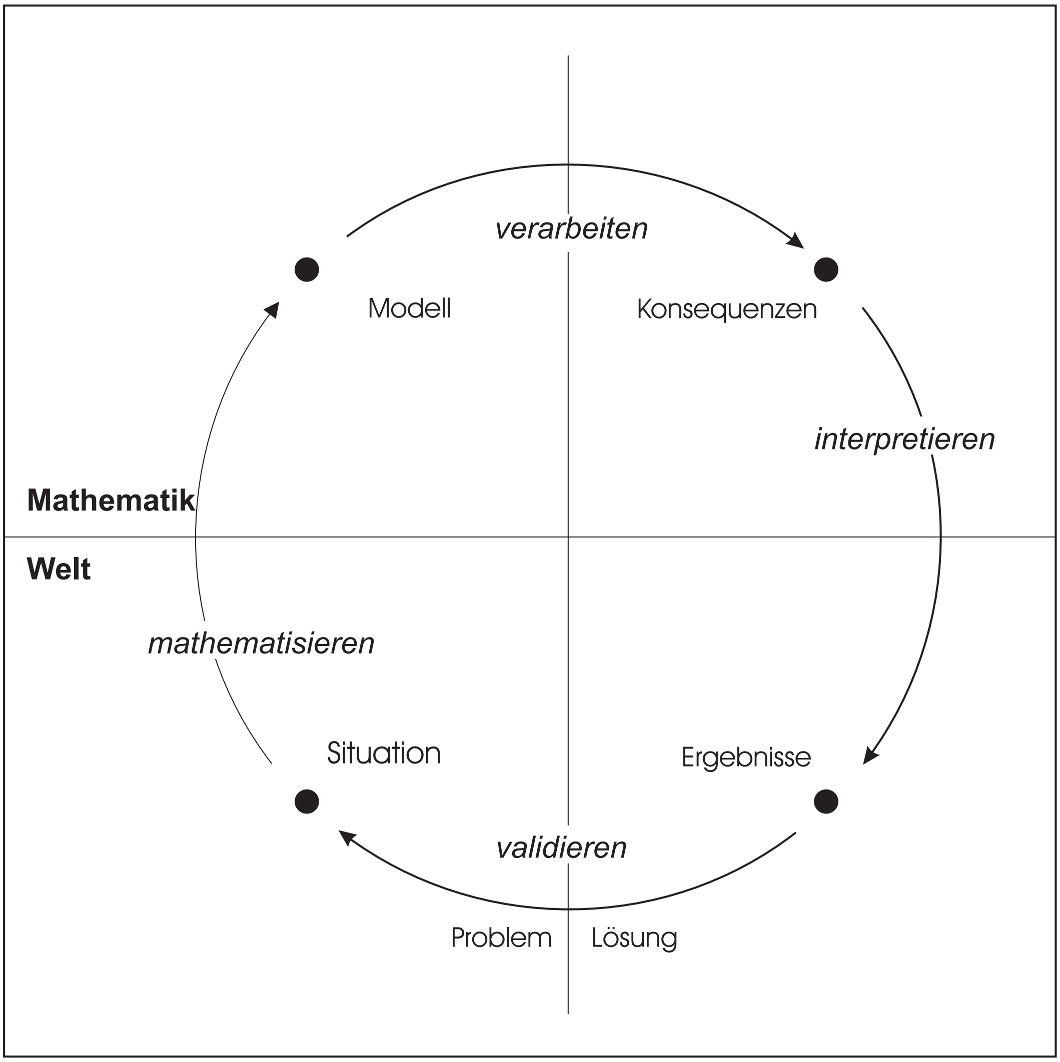


Fig. 1

Hier wird deutlich, dass man

- von einer (problemhaltigen)Situation in der „Welt“ ausgeht,
- diese (möglichst „gut“) mit mathematischen Mitteln beschreibt,
- das so gewonnene mathematische *Modell* verabeitet, z.B. Gleichungen löst,
- die mathematischen Resultate auf die Situation bezieht und dort interpretiert,
- das Modell im Licht der vorherigen Schritte auf *Angemessenheit* bzw. *Gültigkeit* überprüft.

Eventuell wird nach einer solchen Analyse im letzten Schritt der ganze Kreislauf mit einem „verbesserten“ Modell noch einmal durchlaufen.
In Schulbüchern und im Unterricht kommen bei „Standardaufgaben“ der vierte und fünfte Schritt oft nur sehr verkürzt vor, da man bei diesen unhinterfragt von der „Richtigkeit“ des zu wählenden Modells ausgeht!

4.4 Textaufgaben

Allgemeine Gesichtspunkte:

Sachaufgaben werden im weit überwiegenden Maße durch *Texte* vermittelt. Die Schüler haben häufig Schwierigkeiten beim Erfassen des Sachverhalts, so dass die sprachliche Gestaltung einer Aufgabe von entscheidender Bedeutung sein kann. Im folgenden sollen zuerst allgemeine Gesichtspunkte zur Bedeutung und sprachlichen Gestaltung von Textaufgaben gesammelt werden. Da ein wesentlicher Teil aller Sachaufgaben an mathematischen Mitteln nicht mehr als die sogenannten Grundrechenarten voraussetzt, wird dann näher auf die sprachlichen Wendungen eingegangen, die auf solche Rechenoperationen hinweisen und die - obwohl sie nicht immer eindeutig sind - vom Schüler richtig erfaßt werden müssen. Schließlich gehört zum Lösen elementarer Sachaufgaben auch die richtige Verkettung der einzelnen Rechenoperationen. Das *Simplex-Komplex-Verfahren* und die *Rechenbäume* bieten sich hier als methodisches Hilfsmittel an und ermöglichen zugleich eine Analyse der Struktur der jeweiligen Aufgabe (genauere Erläuterungen zu diesen Hilfsmitteln folgen später).

Das Anwenden von Mathematik und mathematisches Denken im außerschulischen Bereich vollzieht sich vielfach in Problemsituationen, die kaum auf eine bestimmte Zielfrage hin eingegrenzt sind, und oft tritt eine solche Zielfrage oder überhaupt eine Verbalisierung des Problems gar nicht auf. Man könnte deshalb fragen, ob es noch sinnvoll ist, Textaufgaben zu stellen, wie sie von jeher die Rechen- und Mathematikbücher durchziehen. Die Alternative wäre, sich im Mathematikunterricht ganz auf solche Fragestellungen und Probleme zu beschränken, die

- dem Schüler in seiner Umwelt (Lebenswelt) unmittelbar begegnen
- oder sich in einer Spielsituation im Unterricht stellen lassen
- oder die im Rahmen eines umfassenderen, evtl. mehrere Unterrichtsfächer übergreifenden Projekts erarbeitet werden.

All dies würde der Kritik am traditionellen Sachrechnen Rechnung tragen. Doch auch wenn man diese Kritik ernst nimmt, gibt es wichtige Gründe für das Arbeiten mit Textaufgaben:

> Es gibt Sachbereiche und Sachprobleme, die für den Schüler wichtig sind, die sich aber nur über sprachliche Vermittlung zum Unterrichtsgegenstand machen lassen. Textaufgaben können einen Anstoß geben, einen solchen Sachbereich zu analysieren, und zwar sowohl in Bezug auf die dabei auftretenden mathematischen Verfahrensweisen als auch in Bezug auf die inhaltlichen Zusammenhänge.

Es ist denkbar, dass eine Textaufgabe, so verstanden, oftmals nur den Ausgangspunkt bildet für ein kleineres oder größeres Unterrichtsprojekt.

> Mathematische Begriffsbildungen und Techniken müssen durch Übungen gefestigt werden. Zu üben ist aber in vielen Fällen nicht ein Rechenverfahren als solches, sondern seine immer wieder neue und andere Anwendung auf verschiedene Sachprobleme, Werkstatt, Tankstelle, Sparkassenschalter, Bastelarbeit, eine Vielzahl von Situationen, auf die mathematische Kenntnisse und Verfahrensweisen anzuwenden sind, werden immer wieder durch Sprache vermittelt.

Für die Stellung eines Problems und zur Motivation kann man auch andere Medien heranziehen, z.B. Filme, Bilder, Spielsituationen oder (physische) Modelle. Aber auch dann sind die Situationen von der Lehrperson vermittelt und nicht unmittelbar vom Schüler erfahren. Das Medium *Sprache* ist jedoch so wichtig, dass man im Mathematikunterricht nicht auf die Möglichkeit verzichten sollte, das Vorstellungsvermögen der Schüler in Bezug auf sprachlich repräsentierte Sachverhalte zu schulen. Nicht nur global in Bezug auf die Vorstellung einer Situation, sondern auch in Bezug auf die Einzelheiten eines Textes gilt:

> Ein sinnvoller Weg zur Lösung eines mit dem Text gegebenen Problems wird sicherlich nur dann gefunden, wenn der Schüler die auftretenden Begriffe und Ausdrücke genau erfaßt und wenn er ihre Beziehungen sowohl untereinander als auch zu evtl. anwendbaren mathematischen Mitteln durchschaut. Das Lösen von Textaufgaben zwingt also zu einem bewußteren Umgang mit der Sprache. Der Schüler soll lernen, einen Text daraufhin zu überprüfen, was er über ein Sachproblem aussagt, und er soll lernen, die gegebenen Informationen genau zu erfassen und zu ordnen.

Typen von Textaufgaben:

Den verschiedenen Zielsetzungen bei Textaufgaben entsprechend wird mitunter auch terminologisch zwischen verschiedenen Aufgabentypen unterschieden, so z.B. zwischen *Sachaufgaben, Textaufgaben* und *Einkleidungen* von Rechenoperationen.
Bei *Sachaufgaben* geht es vor allem um Einsicht in den *Sachzusammenhang*. Rechenoperationen und sonstige mathematische Methoden sind Hilfsmittel dazu. Die Aufgabenstellung kann z.B. in einem Arbeitsauftrag bestehen: „Vergleiche die Einwohnerzahlen der Großstädte in NRW." Sie könnte auch durch die Bereitstellung von geeignetem Material wie Zeitungsausschnitten, Tabellen oder anderen Objekten erfolgen.
Den Gegenpol zu den Sachaufgaben bilden *eingekleidete Aufgaben*. Das Erkennen und Üben einer Rechenoperation bzw. eines Lösungsverfahrens steht ganz im Vordergrund und der jeweilige Sachzusammenhang ist austauschbar und fast ohne Bedeutung. Gelegentlich kommt dies schon in der Aufgabenstellung zum Ausdruck:

- 5 kg einer Ware kosten 8,50 €. Wieviel kosten 7 kg?

Unter „einer Ware" kann man sich alles oder nichts vorstellen. Das Rechnen allein ist hier wesentlich. Solche Aufgaben erfüllen durchaus ihren Zweck, das Erkennen von Rechenoperationen und Verfahren im Text zu üben, beim obigen Beispiel also etwa die Schlussrechnung. Wenn aber in dieser Weise für eine anonyme Ware Ein- und Verkaufspreise, Preissteigerungen, Gewinnspannen usw. berechnet werden, so ist die Gefahr der Blindheit gegenüber Inhalten besonders groß.
Von einer *Textaufgabe* ist erst dann zu sprechen, wenn der Sachzusammenhang mitdiskutiert wird, so dass ein ausgewogenes Verhältnis zwischen rechnerisch mathematischem Aspekt und Erörterung eines Sachverhaltes entsteht.
Die Grenzen zwischen den Aufgabentypen sind fließend. Entscheidend ist vor allem, in welcher Weise die Aufgaben jeweils behandelt und mit welcher Zielsetzung sie eingesetzt werden. So könnte in der Sekundarstufe I eine Aufgabe zur Prozentrechnung lauten:

> Eine Ware kostet beim Großhändler 6,50 € und wird beim Einzelhändler 2 € teurer verkauft. Wie hoch ist die Handelsspanne?

Hier ist lediglich die Berechnung eines Prozentsatzes eingekleidet, doch es entsteht sofort eine interessante Sachaufgabe, wenn man nur einige Zusatzfragen stellt (bzw. von den Schülern finden lässt), z.B.

- Ist die Handelsspanne nicht sehr hoch?
- Um was für eine Ware könnte es sich handeln?
- Wie hoch sind die Handelsspannen in verschiedenen Branchen?
- Woher kommen diese Unterschiede und sind sie gerechtfertigt?
- Welche Funktion hat der Großhandel in unserer Wirtschaft?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Umsatzhöhe und Handelsspanne?

Eine große Zahl scheinbar belangloser Textaufgaben gewinnt durch solche Zusatzfragen den Charakter kleinerer Umterrichtsprojekte. Umgekehrt wäre eine derartige Ausweitung der Aufgaben nur eine Belastung, wenn es darum geht, ein gerade kennengelerntes Rechenverfahren zu üben. Das Erkennen des Lösungsweges aus dem Text heraus und das Umgehen mit den für verschiedene Sachbereiche charakteristischen Größen müssen bis zu einer gewissen Sicherheit entwickelt werden, und dies ist ohne Übung anhand einfacher Textaufgaben kaum möglich. Nur selten dürfte es möglich sein, gewissermaßen abstrakt das mathematische Instrumentarium bereitzustellen, um dann unmittelbar „richtige Sachprobleme“ in Angriff zu nehmen.

Zur Gestaltung von Aufgabentexten:

Durch Arbeitsweise und Zielsetzung bei der Behandlung von Textaufgaben werden auch die in Bezug auf ihre sprachliche Gestaltung meist gestellten Fragen relativiert. Diese Forderungen lassen sich unter den Stichworten *Vollständigkeit, Eindeutigkeit* und *Verständlichkeit* des Textes zusammenfassen.

Die Forderung nach *Vollständigkeit* betrifft vornehmlich die für die Bearbeitung eines Sachproblems erforderlichen Angaben und Daten, die ja die Voraussetzung für die weitere Arbeit der Schüler bilden.

Beispiel:

> Bei Familie Hermann soll das 28 m^2 große Wohnzimmer renoviert werden. Die Wände sollen neu tapeziert werden, die Decke soll gestrichen und der Fußboden soll mit Teppichfliesen ausgelegt werden. Welche Kosten sind ungefähr zu erwarten?

Hier wären noch zahlreiche weitere Angaben notwendig: Welche?

Man kann den Text aber auch als Aufforderung an die Schüler verstehen, all diesen Fragen selbständig nachzugehen, die Raumhöhe in einem Wohnhaus im Vergleich zum Klassenzimmer zu schätzen, Preise für verschiedene Materialien zu erkunden oder - bei mehr mathematischer Akzentsetzung - um zu erfahren, dass der Flächeninhalt der Seitenflächen durch den des Fußbodens und die Raumhöhe durchaus noch nicht festgelegt ist, dass man aber zeigen kann, welchen Umfang das Zimmer mindestens haben muss, usw.

Nach Breidenbach gehört zur Vollständigkeit eines Aufgabentextes auch, dass er die Frage mit enthält. Man könnte dem vielleicht zustimmen, wenn es z.B. bei Hausaufgaben um Übungen zur Berechnung einzelner ganz bestimmter Größen geht, obwohl auch hier der Hinweis von W. Oehl gilt, dass bei vielen Aufgaben die Fragestellung eindeutig aus dem geschilderten Text hervorgeht und dass der Schüler zielempfindlich werden soll, dass er lernen soll, zu erfassen, worauf es ankommt. Bei einer Sachaufgabe im Sinne der obigen Erklärung könnte eine Frage nach einer einzelnen Größe eher schaden, indem die Betrachtungen von vornherein auf dieses Einzelergebnis fixiert sind, so dass die den Gegenstandsbereich erschließenden Fragen gar nicht mehr gestellt werden. Ob es sinnvoll ist, eine Aufgabenstellung mit einer klaren Fragestellung abzuschließen, kann man also keinesfalls einheitlich beantworten, sondern dies hängt vom jeweiligen Ziel und der jeweiligen Aufgabenstellung ab.

Verzichtet die Lehrerin auf die Frage, so muss sie allerdings bereit sein, auch Fragen und Lösungen zu akzeptieren, die vom Erfahrungshintergrund eines Kindes her Sinn machen. So hielt z.B. vor 20 Jahren eine Lehrerin bei der Aufgabenstellung

- Eine Wäscherei hat zwei ihrer Autos in der Autowerkstatt zur Inspektion gehabt. Beim ersten waren 470 DM an die Werkstatt zu zahlen, beim zweiten waren es 650 DM.

in einer Klassenarbeit (!) nur die Frage „Wie viel DM sind insgesamt zu zahlen?“ für sinnvoll und „richtig“. Es gab allerdings eine Schülerin, deren Lösung nicht in dieses Konzept passte:

- Frage: Wie viel DM war die Rechnung beim zweiten Auto höher?
- Rechnung: 650 DM − 470 DM = 180 DM.
- Antwort: Für das zweite Auto waren 180 DM mehr zu zahlen.

Würden Sie auch für die Frage und die Antwort wegen „Unsinnigkeit“ 0 Punkte geben und nur die richtige Rechnung werten? (Das Kind kam aus einem Elternhaus, in dem in Gesprächen der Eltern öfters festgestellt wurde, dass der kleinere Zweitwagen bei Inspektionen teurer wegkam als das grosse Familienauto!)

Die Forderung nach *Eindeutigkeit* des Textes ist weniger problematisch. Die scheinbar eindeutige Arbeitsanweisung „vergleiche Einkaufs- und Verkaufspreis“ kann mindestens auf dreierlei Weise ausgeführt werden: Man kann den Differenzbetrag bestimmen, man kann das Verhältnis der beiden Beträge bilden, oder man kann den Preiszuschlag in Prozent des Einkaufspreises berechnen. Um eindeutig zu sein, müsste es z.B. heißen:

> Um welchen Betrag ist die Ware teurer geworden?
> Bestimme das Verhältnis von Einkaufs- und Verkaufspreis!
> Um wieviel Prozent des Einkaufspreises verteuert sich die Ware?

Und doch kann das mehrdeutige „vergleiche“ seine Berechtigung haben, nämlich dann, wenn die verschiedenen Möglichkeiten des Vergleichens selbst zur Diskussion gestellt werden sollen.

Was schließlich die *Verständlichkeit* eines Textes betrifft, so sind vor allem die folgenden Kriterien zu beachten:

> *Vertrautheit* des Schülers mit den auftretenden Begriffen,
> einfache Syntax
> und nach Möglichkeit eine Übereinstimmung der für die Aufgabenlösung notwendigen Rechenschritte mit der Reihenfolge, in der die betreffenden Daten im Text erwähnt werden.

Im Einzelnen: Neue Begriffe müssen erklärt werden, und komplizierte Satzgebilde sollten durch eine Kette einfacher Hauptsätze ersetzt werden, in denen die benötigten Rechenoperationen in der *richtigen* Reihenfolge vorkommen. Man wird sich dieser Forderung nach einer einfachen Sprache kaum verschließen können, doch bleibt Folgendes zu bedenken: Die Sprache der Aufgaben sollte auch ihrer syntaktischen Kompliziertheit nach altersgemäß sein. Wenn Schüler z.B. mit Konditionalsätzen nicht richtig umgehen können, so müssen sie dies gerade im Mathematikunterricht nach und nach lernen, und es wäre töricht, grundsätzlich alle Konditionalsätze in Sachaufgaben meiden zu wollen. Die folgende Textaufgabe verstößt z.B. gegen einige der oben genannten Forderungen zur Textgestaltung :

> Herr Maurer hat 5500,- € Schulden und verkauft ein gebrauchtes Auto. Er überlegt: Ich bekomme ja noch 500,- € Nachzahlung für Überstunden seit Januar. Wenn ich die zusammen mit dem Geld für das Auto zur Tilgung verwende, bleibt nur noch eine Restschuld von 3000,- €.
>
> Welchen Preis erwartet er für sein Auto ?

Man wird zugeben müssen, dass der Konditionalsatz hier nicht willkürlich verwendet wird und dass es auch sinnvoll ist, die Schuld, die den Ansatzpunkt der Überlegung bildet, als erste Größe zu nennen, obwohl dies *nicht* dem Vorgehen bei der Lösung entspricht.

Umgangssprache und mathematische Operationen bei Sachaufgaben

Die mathematischen Kenntnisse und Methoden, die schon dem Grundschüler bei der Bewältigung einfachster Sachaufgaben zur Verfügung stehen, sind sehr begrenzt. Funktionale Zusammenhänge wie der zwischen Seitenlänge und Umfang oder Flächeninhalt eines Quadrats treten nur in Einzelfällen auf. Kompliziertere Formeln, etwa die für die Volumina verschiedener Körper kommen in der Grundschule nicht vor. Die Proportionalitäten, als spezielle lineare Funktionen, werden in der Regel erst im 7. Schuljahr behandelt, nicht-lineare Funktionen, wie sie schon für einfache physikalische Zusammenhänge, etwa bei den Fallgesetzen, wichtig werden, noch später.

Im Wesentlichen bildet also eine Anwendung der sogenannten vier Grundrechenarten den mathematischen Kern der elementaren Text- bzw. Sachaufgaben, wie sie dem Grundschüler überhaupt nur zugänglich sind, wie sie aber auch weit in die Sekundarstufe I

hinein immer wieder auftreten. Das Lösen einer solchen Aufgabe reduziert sich - theoretisch gesehen - auf zwei Probleme: das Erkennen der benötigten Rechenoperationen und das Auffinden der richtigen Verkettung der einzelnen Operationen, im wesentlichen also das Auffinden einer zweckmäßigen Reihenfolge für ihre Anwendung.
Dass nach aller Erfahrung die Schwierigkeiten der Schüler bei der Bearbeitung einfacher Textaufgaben ganz erheblich sind, mag in manchen Fällen an fehlender Motivation liegen, es dürfte aber auch in der Sache selbst begründet sein:

1. Den vier Grundrechenarten und ihrer Verkettung auf der einen Seite steht auf der anderen Seite eine riesige FüIle von Sachbereichen gegenüber, die in den Aufgaben angesprochen werden, und ebenso ist die Vielfalt der umgangssprachlichen Wendungen fast unübersehbar, hinter denen sich ein Hinweis auf die benötigten Rechenoperationen verbergen kann, die aber ebenso auch irreführend sein können. Der Schüler hat also jeweils neu einen Abstraktionsprozess vom im Text gegebenen Sachverhalt zur nüchternen Rechnung zu leisten.

2. Die Kombination oder Verkettung der verschiedenen Rechenoperationen, die für die Lösung benötigt werden, gehorcht keinen festen Gesetzmäßigkeiten und ist oft nicht einmal eindeutig festgelegt. Die Anwendung einer mathematisch durchaus anspruchsvollen Volumenformel ist so gesehen meist einfacher als der variantenreiche Umgang mit den Grundrechenarten.

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst den Übersetzungs- bzw. Abstraktionsprozess vom im Aufgabentext umgangssprachlich wiedergegebenen Sachverhalt zur Rechenoperation näher verfolgen, wobei wir auf die typischen sprachlichen Wendungen und die bei Textaufgaben damit verbundenen Schwierigkeiten eingehen wollen. Dies kann allerdings nicht vollständig sein.

Als sprachliche Hinweise auf eine *Addition* können auftreten:

- und (in einer Aufzählung),
- zusammen, insgesamt (nach einer Aufzählung),
- anwachsen um ..., vermehren um ...;
- hinzunehmen, hinzubekommen, gewinnen,
- Zuwachs, Zuschlag, Gewinn, Anstieg.

Ein sprachlicher Hinweis kann auch ganz fehlen, so dass die Rechenoperationen allein der beschriebenen Sachsituation zu entnehmen sind:

> Peter ist unordentlich. Er hat in seiner rechten Hosentasche zwei 1 €-Münzen, in der linken fünf 10 Ct-Münzen, in der Jacke eine 2 €-Münze. Kann er sich einen Schiffsbausatz zu 6,75 € leisten?

Bei dieser Aufgabe sind - von der nachfolgenden Differenzbildung abgesehen - die verschiedenen zu addierenden Posten gewissermaßen räumlich nebeneinander gegeben. Es gibt jedoch auch Aufgaben, in denen das zeitliche Nacheinander vorkommt:

Jemand kauft ..., dann ..., dann ... und schließlich noch ... . Reicht ein Guthaben von 200,- € auf der Geldkarte dafür aus?

Weit verwirrender und für den Schüler schwerer zu erfassen sind die sprachlichen Wendungen, die im Zusammenhang mit der Subtraktion verwendet worden können. Dabei ist interessant, dass der mathematische Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion ein deutliches Analogon in der Umgangssprache besitzt:

1. Die *Subtraktion* ist die Umkehroperation der Addition. In einem rein mathematischen Aufbau des Zahlensystems wird in der Regel definiert:

   $$b = c - a \quad \Longleftrightarrow \quad a + b = c$$

   Umgangssprachlich:
   Der Wasserspiegel von 3,0 m ist um 1,2 m angestiegen. Welchen Pegelstand hat man jetzt? (Addition)
   Der Wasserspiegel ist von 3,0 m auf 4.2 m angestiegen. Wie groß war der Anstieg? (Subtraktion)
   Der Wasserstand ist um 1,2 m auf 4.2 m angestiegen. Welches war der vorhergehende Pegelstand ? (Subtraktion)
   Das Formulierung "angestiegen" , die auf eine Addition hinzuweisen scheint, beschreibt hier im wesentlichen also nur die Gleichung

   alter Pegelstand + Anstieg = neuer Pegelstand.

   Ob zu addieren oder zu subtrahieren ist, hängt allein davon ab, nach welcher der drei Größen gefragt ist.

2. Wie das obige Beispiel gezeigt hat, ergeben sich aus $a + b = c$ die beiden Differenzbildungen $b = c - a$ und $a = c - b$. Es gilt

   $$c - b = a \quad \Longleftrightarrow \quad c - a = b.$$

   Auch dies kommt in der Umgangssprache zum Ausdruck, wobei dann das benutzte Verb auf eine Differenzbildung hinweist:

   absinken von ... auf ...
   absinken um ...,

   In der Gleichung

   alter Wasserstand − Abnahme = neuer Wasserstand

   kann einmal nach dem neuen Wasserstand (der Differenz) und einmal nach der Abnahme (dem Subtrahenden) gefragt werden. Eine solche Gleichung beschreibt also den zugrunde liegenden Sachverhalt eigentlich deutlicher als der ursprüngliche Aufgabentext und kann deshalb auch als Zwischenglied auf dem Weg vom Lesen einer Textaufgabe zu ihrer rechnerischen Lösung eine wichtige Hilfe sein.

Vielfach wird auch mit dem Modell

Zustand	–	Handlung (oder Vorgang)	–	Zustand
(alter Wasserstand)	–	(Abnahme)	–	(neuer Wasserstand)

gearbeitet. Wenn man eine feste Abnahme als Operator (Abbildung) auffasst, durch den jedem Anfangszustand ein bestimmter Endzustand zugeordnet wird, so ergibt sich das Schema:

$$c \xrightarrow{\quad -b \quad} a$$

Die psychologische Genese der Rechenoperation von Handlungen her ist dabei noch deutlich, doch muss man beachten, dass die Äquivalenz

$$c - b = a \iff c - a = b$$

dann nicht trivial ist, da einmal ein Zustand und einmal ein Operator erfragt wird.

Wir geben in Stichworten noch einige weitere sprachliche Wendungen zur Subtraktion an:

- Ein Schüler erreicht in einem Test fünf Punkte weniger als ...
- Um wieviel ist ... größer als ...?
- übrig bleiben,
- wegnehmen, verlieren, ausgeben,
- Rest, Unterschied,
- Vergleiche ... und, ...!

Überprüfen Sie selbst, welche dieser Stichworte eindeutig auf eine Subtraktion hinweisen, welche sowohl bei der Subtraktion und Addition auftreten können und wie sie verwendet werden, wenn nach der Differenz, nach dem Subtrahenden oder nach dem Minuenden gefragt ist. Überlegen Sie sich auch Beispiele, in denen ein direkter Hinweis auf die Subtraktion ganz fehlt.
Für die *Multiplikation* und *Division* gelten die bisherigen Überlegungen ganz analog. Insbesondere hat man bei der Multiplikation die Möglichkeit der räumlichen und zeitlichen Vorstellung.

> Räumlich: Im Regal standen fünf Kisten mit je sechs Flaschen.
>
> Zeitlich: Er ging fünfmal in den Keller und holte jedesmal sechs Flaschen.

Operation und Umkehroperation sind auch hier sprachlich eng aufeinander bezogen, z.B.:

> Es ist zu befürchten, dass sich der Brotpreis von gegenwärtig 2,50 € pro kg in den kommenden zwanzig Jahren verdreifachen wird. Wie hoch wird er sein? (Multiplikation)

Schließlich gibt es zwei Möglichkeiten, die Multiplikation umzukehren:

Teilen oder *Verteilen* einerseits und *Aufteilen*, *Einteilen* oder *Messen* andererseits:

> Ein Kaufmann hinterlässt ein Vermögen von 150 000,- €. Er hat vier gleichberechtigte Erben. Wieviel erhält jeder? (*Verteilen*, nämlich Verteilen der Erbschaft an vier Erben, gefragt ist nach einer Größe)

> Ein Grundstück von 42 m Breite und 30 m Tiefe soll mit Reihenhäusern zu 7 m Breite bebaut werden. Wie viele Häuser kann man unterbringen, wenn jedes 10 m tief ist? (*Aufteilen*, nämlich Aufteilen der Länge 42 m in Längen von 7 m bzw. Messen einer Strecke von 42 m Länge mit einer 7 m langen Strecke als Maßeinheit, gefragt ist nach einer (nat.) Zahl)

Bei beiden Beispielen fehlt übrigens ein sprachlicher Hinweis auf die Rechenoperation! Insgesamt sind die sprachlichen Hinweise auf Multiplikation und Division aber weniger vielfältig und verwirrend als bei der Addition und Subtraktion. Fast immer finden sich Ausdrücke wie

> je, jeweils, jeder,..., -mal,..., -fach,

und wo solche Hinweise ganz fehlen, ist die Situation fast immer dadurch gekennzeichnet, dass

> derselbe Vorgang mehrfach wiederholt wird,
>
> eine Anzahl gleicher Teile vorkommt,
>
> gleich starke Gruppen zu bilden sind usw.

Dies erklärt unter Umständen auch, dass bei Untersuchungen zur Erstellung eines Lernprogramms zum Lösen einfacher Sachaufgaben die Multiplikation sich als die am einfachsten zu erkennende Rechenoperation erwies.

Struktur einfacher Textaufgaben: Simplexverfahren und Rechenbäume

Bei der Analogie zwischen umgangssprachlichen Wendungen und Eigenschaften der Subtraktion wurde bereits auf die Bedeutung der dabei auftretenden Größentripel, z.B.

> alter Wasserstand – Abnahme – neuer Wasserstand

hingewiesen. Dass solche Tripel von Größen bei allen Sachaufgaben auftreten, die mit Hilfe der elementaren Rechenoperationen gelöst werden können, liegt in der Natur der Sache. Eine Rechenoperation lässt sich als dreistellige Relation auffassen, wie es z.B. in der Formulierung

> „z ist Summe von x und y“

zum Ausdruck kommt. Es ist deshalb naheliegend, die in Sachaufgaben auftretenden *Größentripel* hervorzuheben, und zwar unter mehreren Gesichtspunkten, nämlich

1. für den Schüler als Hilfe bei der Analyse des Sachverhalts und für das Erkennen der jeweiligen Rechenoperationen,

2. zur Verdeutlichung der Verkettung und Abfolge mehrerer Rechenoperationen beim Lösen der Aufgabe,

3. für den Lehrer als Hilfe bei der Analyse von Aufgaben im Bezug auf ihre Komplexität und den Schwierigkeitsgrad.

Nach Breidenbach wird ein derartiges Größentripel als *Simplex* bezeichnet und schematisch wie im folgenden Aufgabenbeispiel dargestellt:

Herr Meister kauft 7 Beutel Kartoffeln. Jeder Beutel enthält 5 kg Kartoffeln. Wie schwer sind die Kartoffeln insgesamt?

Anzahl der Beutel	Gewicht pro Beutel	Gesamt-Gewicht

Oder unter Verwendung der speziellen Größen:

7	5 kg	35 kg

Abstrahiert man wie in der ersten Darstellung von den speziellen Maßeinheiten und Maßen der Größen in den einzelnen Aufgaben, so erhält man Modelle wichtiger Sachzusammenhänge, die sich unter Einschluss der jeweils zugehörigen Rechenoperation dem Schüler nach und nach einprägen und die dann gewissermaßen als Bausteine für komplexere Sachprobleme dienen können:

Nettogewicht	$+$	Verpackungsgewicht	$=$	Gesamtgewicht
Geldbetrag	$-$	Preis der Ware	$=$	Restbetrag
Stückzahl	$\cdot$	Gewicht des Einzelstücks	$=$	Gesamtgewicht
Gesamtkosten	$:$	Stückzahl	$=$	Stückpreis
Anzahl d. Liter	$\cdot$	Literpreis	$=$	Gesamtpreis
Gesamtverbrauch	$:$	Anzahl der Tage	$=$	Tagesbedarf
Geschwindigkeit	$\cdot$	Fahrzeit	$=$	zurückgelegte Wegstrecke
usw.				

Bei den letzten Beispielen fällt auf, dass die zu einem Simplex gehörenden Größen, z.B. Wegstrecken (Längen), Fahrzeiten (Zeitspannen) und Geschwindigkeiten, verschiedenen Größenbereichen angehören. Der begriffliche Hintergrund für Ausdrücke wie „Wegstrecke pro Zeiteinheit“ , „€ je Liter“ , bei denen man auch von abgeleiteten oder zusammengesetzten Größen, von Größenverhältnissen oder bei geeigneter Interpretation auch von Quotienten verschiedener Größen sprechen kann, ist durchaus nicht leicht zu erfassen. In Bezug auf das elementare Sachrechnen ist jedoch festzuhalten: Dies abgeleiteten Größen sind für den Schüler selbständige Größen. In der Tat gelten für sie die Gesetze des Größenbereichs, und ihr Zusammenhang mit anderen Größen, wie er in einem Simplex zum Ausdruck kommt, wird vom Schüler der Erfahrung entnommen und intuitiv erfasst.

Was die Zusammenfassung oder Verkettung von mehr als einem Simplex zu einer komplexeren Teilaufgabe betrifft - man spricht kurz von einem *Komplex* - soll an einem Beispiel erläutert werden:

Für vier Bären hat der Tierpfleger 48 kg Fleisch gekauft. Jeder Bär frisst täglich 2 kg Fleisch. Wie lange reicht der Vorrat?

R Tagesration eines Bären	A Anzahl der Bären	B Tagesbedarf insgesamt

V Gesamt-vorrat	B Tagesbedarf insgesamt	T Anzahl der Tage

Hier sind im ersten Simplex zwei von drei Größen bekannt, die dritte ist berechenbar. Der Tagesbedarf insgesamt (B) tritt als Hilfsgröße oder Zwischenlösung auf, und damit sind auch im zweiten Simplex zwei von drei Größen bekannt, die dritte ist berechenbar.

Wie aber erkennt der Schüler die zweckmäßige Reihenfolge der Simplexe, die wir von vornherein gewählt haben? Das Problem wird noch deutlicher, wenn die Aufgabe etwas umfangreicher ist:

> Ein Tierpfleger hat vier Bären und sechs Tiger zu versorgen. Jeder Bär frisst täglich 2 kg, jeder Tiger 2,5 kg Fleisch. Wie lange reicht ein Fleischvorrat von 115 kg?

Gesamtvorrat	Tagesbedarf insgesamt	Anzahl der Tage
Tagesration eines Bären	Anzahl der Bären	Tagesbedarf für die Bären
Tagesration eines Tigers	Anzahl der Tiger	Tagesbedarf für die Tiger
Tagesbedarf für die Bären	Tagesbedarf für die Tiger	Tagesbedarf insgesamt

Hier sind die Simplexe willkürlich angeordnet und die zu benutzende Reihenfolge ist nicht vorgegeben. Außerdem ist sie nicht eindeutig.

Wir gehen noch einmal zum ersten der beiden Beispiele zurück, um mit anderen Lösungswegen zu vergleichen. Statt den Tagesbedarf für vier Bären (B) und dann die erfragte Anzahl der Tage zu berechnen, könnte man aus dem Gesamtvorrat (V) und Anzahl der Bären (A) im ersten Schritt auch den Vorrat pro Bär ($\mathrm{V_B}$) bestimmen, also

$$\mathrm{V : A = V_B}$$

und aus diesem und der Ration eines Bären (R) dann die Anzahl der Tage, also

$$\mathrm{V_B : R = T.}$$

Diese Lösungsmöglichkeit ist in der obigen Darstellung nicht zu erkennen, ein Nachteil, der bei einer von H. Bauersfeld vorgeschlagenen Variante des Simplexverfahrens wegfällt:

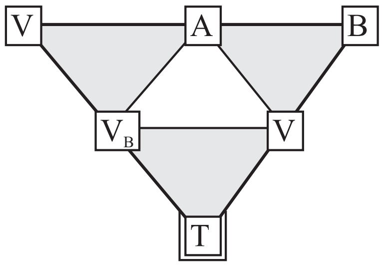


Fig. 1

Die drei Ecken eines Simplex bilden jeweils die Ecken eines Dreiecks. Jedoch nicht alle Tripel bilden ein sinnvolles Simplex, sondern nur die an den Ecken der gefärbten Dreiecke stehenden. Schließlich bilden auch die drei „äußeren Ecken“ mit V, B und T ein Simplex.

Die Figur ist also noch zu vervollständigen:

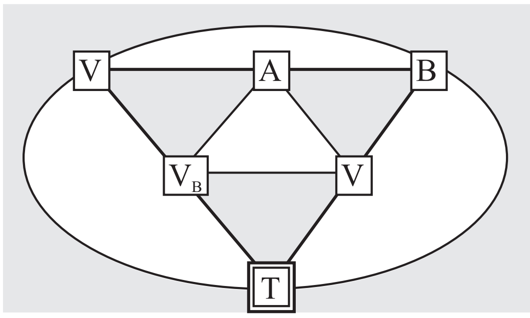


Fig. 3

Damit sind alle Beziehungen zwischen den in der Aufgabe auftretenden Größen erfasst. Der Lösungsweg ist beliebig, es kommt nur darauf an, bei einem Simplex zu beginnen, von dem zwei der drei Größen bekannt sind. Die symmetrische Struktur dieser einfachen Aufgabe wird besonders deutlich, wenn man sich das entstandene Netz räumlich, etwa über eine Kugel gespannt vorstellt.

Hierbei fällt auf, dass die verschiedenen Simplexe immer nur an den Ecken zusammenstoßen, und man könnte daher vermuten, dass sich zwei Größen - wenn überhaupt - mit Hilfe der elementaren Rechenoperationen nur auf eine einzige Weise zu einer dritten verknüpfen lassen. Dass dies nicht so ist, kann man jedoch bei den Größen Länge, Fläche und Volumen eines Körpers erkennen:

> Ein Quader hat eine Grundfläche (F) von 32 cm^2 und eine Länge (L) von 8 cm. Er ist ebenso breit wie hoch (H). Man bestimme sein Volumen (V).

Man erhält folgende Simplexdarstellung:

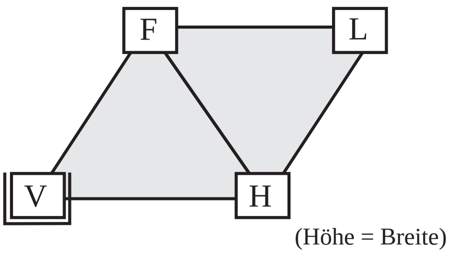


Fig. 1

In der Simplexdarstellung, gleich welcher Variante, ist die jeweilige Rechenoperation nicht zu erkennen. Man kann dies positiv sehen: Für ein und dasselbe Größentripel kommt ja mit einer Rechenoperation stets auch ihre Umkehrung in Frage, je nachdem, welche der drei Größen zu bestimmen ist. Andererseits wird auch nicht deutlich, ob es sich um eine additive oder multiplikative Verknüpfung handelt.

Bei den sogenannten *Rechenbäumen*, wie sie vor allem von H. Winter und T. Ziegler empfohlen wurden, wird auch die jeweilige Rechenoperation im grafischen Schema einer Sachaufgabe angegeben. Im Gegensatz zur Simplexdarstellung gehören dann allerdings zu verschiedenen Lösungswegen ein und derselben Aufgabe stets auch verschiedene Rechenbäume. Für das obige Beispiel der Bärenfütterung sieht dies so aus:

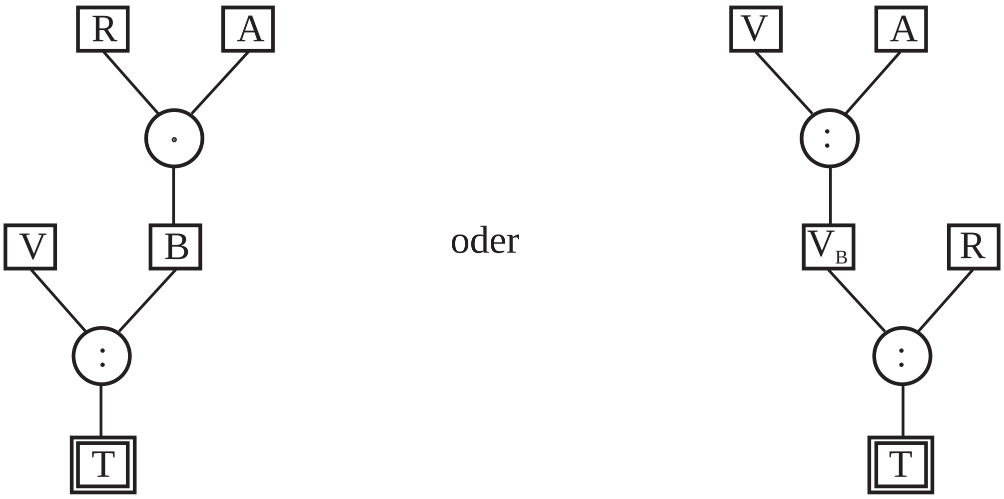


Fig. 2

In Bezug auf Subtraktion und Division muss man sich dabei an die Vereinbarung halten, dass das Schema zeilenweise von links nach rechts zu lesen ist, also

$$\begin{array}{ccccccccccccc} R & \cdot & A & = & B & \quad \text{und} \quad & V & : & B & = & T & \text{bzw.} \\ V & : & B & = & V_B & \quad \text{und} \quad & V_B & : & R & = & T. & \end{array}$$

Von Vorteil ist, dass sich die Rechenbäume auch bei Aufgaben anwenden lassen, die nicht mehr streng in das Simplex-Komplex-Schema passen:

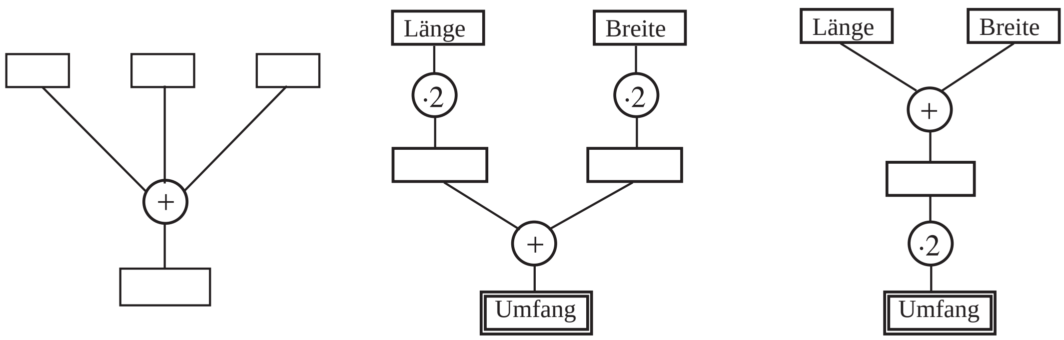


Fig. 1

Dies gilt für die dargestellte Addition mehrerer Posten, für einfachste funktionale Zusammenhänge, wie der Verdoppelung der Seiten eines Rechtecks bei der Berechnung des Umfangs, und insbesondere für Aufgaben (wie die bereits vorgestellte Schuldenaufgabe), die auf eine Bestimmungsgleichung führen:

> Herr Maurer hat 5500,- € Schulden (S) und verkauft ein gebrauchtes Auto. Er überlegt: Ich bekomme ja noch 500,- € Nachzahlung (N) für Überstunden seit Januar. Wenn ich die zusammen mit dem Geld für das Auto zur Tilgung (T) verwende, bleibt nur noch eine Restschuld (R) von 3000,- €.
>
> Welchen Preis erwartet er für sein Auto ?

Die Gleichung aus der P zu bestimmen wäre, lautet:

$$S - (N + P) = R,$$

also ist

$$P = S - R - N.$$

Der Rechenbaum unterscheidet sich von den vorhergehenden Beispielen nur dadurch, dass die erfragte Größe am Anfang, also am Ende eines „Zweiges“ steht, so dass der Lösungsweg bei der „Wurzel“ des Baumes beginnend von unten nach oben führt. Dabei ist allerdings folgendes zu beachten:

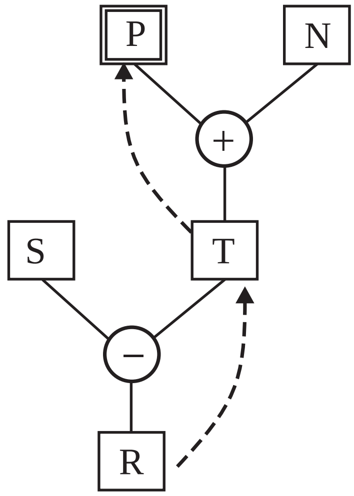


Fig. 2

An die Stelle von Addition und Multiplikation tritt die jeweilige Umkehroperation, bei Subtraktion und Division jedoch nur dann, wenn der Minuend bzw. der Dividend zu bestimmen sind.

Bei Simplex-Darstellungen ebenso wie bei Rechenbäumen stellt sich schließlich die Frage, ob in die Schemata jeweils Begriffe wie „Tagesbedarf“ , Größenangaben bzw. -einheiten wie kg, km usw. oder nur deren Maßzahlen eingesetzt werden sollten:

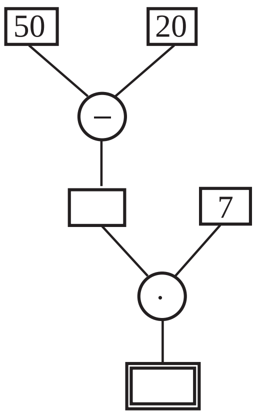


Fig. 1

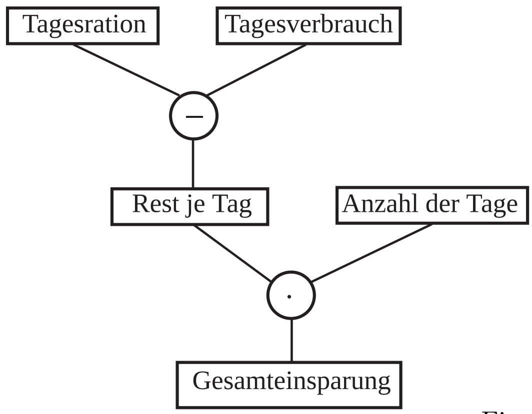


Fig. 2

Ein Rechenbaum zu einer Sachaufgabe wie in Fig. 1 führt zwar ganz unmittelbar auf den für die Lösung benötigten Rechenausdruck (Term) $(50 - 20) \cdot 7$, doch dürfte im allgemeinen die Fixierung eines Sachzusammenhangs wie Fig. 2 wichtiger sein.

Eine solche Darstellung kann trotz aller Kürze und Schematisierung dem Schüler immer noch eine Vorstellung des konkreten Sachverhalts vermitteln, während schon bei einer Beschränkung auf die Angabe der Maßeinheiten nach Art der Dimensionsgleichungen in der Physik jeweils eine Fülle verschiedener Sachsituationen auf dasselbe Schema passen würde.

Nach unseren Überlegungen dürfte eine Angabe von Stichworten vorzuziehen sein, und zwar auch dann, wenn das betreffende Stichwort im Text nicht direkt vorkommt, sondern von Schüler erst gesucht werden muss. Allerdings fällt den Schülern die Formulierung von Begriffen, die nicht explizit im Text vorkommen, oft schwer.

Eine Untersuchung von A. Mitschka über Schülerleistungen zu Beginn der Hauptschule erbrachte nicht zuletzt in Bezug auf den Test zum Lösen elementarer Sachaufgaben erschreckend schlechte Ergebnisse. Neben der besonderen Schwierigkeit beim Erkennen der Division zeigte sich dabei vor allem ein sprunghaftes Ansteigen der Fehlerquote beim Übergang von eingliedrigen zu mehrgliedrigen Aufgaben, also vom Simplex zum Komplex. Gerade dieses Ergebnis legt ein Arbeiten mit den hier besprochenen Verfahren zur Darstellung der Struktur einer Sachaufgabe nahe.
Sowohl bei den Rechenbäumen als auch in Bezug auf das Simplex-Komplex-Verfahren lässt sich einwenden, dass man die Struktur einer Aufgabe in dieser Weise nur sichtbar machen kann, wenn man die Zusammenhänge bereits durchschaut hat, dass also die eigentliche Lösung vorausgehen muss und dass somit die geschilderten Verfahren für den Schüler nur eine geringe Hilfe beim Lösen von Sachaufgaben sein können. Der Einwand ist durchaus berechtigt. Darüber hinaus überzeugt man sich leicht davon, dass es z.B. bei der von Bauersfeld vorgeschlagenen Simplexdarstellung für etwas umfangreichere Aufgaben gelegentlich schwer sein kann, die Eckpunkte der Simplexe so anzuordnen, dass das entstehende Netz überhaupt noch zu überschauen ist. Trotzdem können Simplexdarstellungen und Rechenbäume wertvolle Hilfsmittel beim *Rückblick* auf Lösungswege sein. Wir fassen daher die bereits genannten Gesichtspunkte, die für eine Beschäftigung mit den genannten Schemata sprechen, noch einmal zusammen:

1. Bei umfangreicheren Aufgaben kann insbesondere die einfacher Darstellung nach Breidenbach für den Schüler eine erste Hilfe sein, Übersicht über den Sachverhalt zu gewinnen und zu behalten. Die Probleme der Verkettung mehrerer Rechenoperationen spielen bei der Aufstellung eines solchen Schemas, das ja schon als Gedächtnisstütze von großem Wert ist, keine Rolle.

2. Die Simplexdarstellungen in der von Bauersfeld vorgeschlagenen Form oder die Rechenbäume können auch für den Schüler *gemeinsame Strukturen* bei *verschiedenen* Aufgaben sichtbar machen. Bei solchen Betrachtungen wird auch bei ganz elementaren Sachaufgaben das allgemeine Lernziel Strukturerfassen mit angesprochen. Werden gleiche oder analoge Lösungswege bei Aufgaben aus verschiedenen Sachbereichen dem Schüler bewusst gemacht, z.B. dadurch, dass man die Problemstellung umkehrt und den Schüler zu gegebenen Simplexkonstellationen oder Rechenbäumen selbst „Geschichten“ erfinden lässt, so trägt dies unter Umständen zur Lösung der einzelnen Aufgabe nur wenig bei. Unabhängig davon, ob ein Transfer zu später zu lösenden Aufgaben stattfindet oder nicht, ist jedoch anzunehmen, dass hier schon bei ganz bescheidenen Problemen deutlich wird, wie anwendungsorientiertes Sachrechnen und abstrakte mathematische Betrachtungsweisen integriert werden können.

3. Für die Lehrperson ist - neben anderen Kriterien - die Zahl der Rechenoperationen, die für die Lösung einer Aufgabe benötigt werden, also die Anzahl der Simplexe und die Art ihrer Verkettung ein wichtiges Maß für den Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung. Dass die Analyse einer Aufgabe für den erfahrenen Lehrer auch im Kopf erfolgen kann, mindert nicht grundsätzlich die Bedeutung der Erfassung der Aufgabenstruktur mit Hilfe der angegebenen Schemata. Dass die Analyse einer Aufgabe für die erfahrene Lehrerin auch im Kopf erfolgen kann, mindert nicht grundsätzlich die Bedeutung der Erfassung der Aufgabenstruktur mit Hilfe der angegebenen Schemata.

4.5 Grafische Darstellungen im Sachrechnen

Zur Rolle von Veranschaulichungen

Bei den Überlegungen eines Lehrers zur Vorbereitung von Mathematikunterricht oder allgemeiner in der Mathematikdidaktik bei der Entwicklung neuer Curricula lassen sich zwei entgegengesetzte Ansatzpunkte unterscheiden, die sich jedoch wechselseitig bedingen: Man kann von einem Begriff oder Sachverhalt ausgehen, dessen Relevanz unbestritten ist, und kann versuchen, ihn in Mathematikunterricht zu übersetzen, d.h., ihn auf der Ebene der Auffassungsmöglichkeiten der Schüler zu *veranschaulichen*, ein geeignetes *Modell* zu konstruieren oder *anschauliche Beispiele* zu finden. Umgekehrt kann man von einem in der Umwelt gegebenen Sachverhalt ausgehen und versuchen, ihn mit mathematischen Mitteln zu beschreiben, zu ordnen, durchschaubar zu machen und ein mit ihm gegebenes Problem zu *mathematisieren*.

Gerade vom Ansatz des Sachrechnens her könnte man die These vertreten, dass grundsätzlich alles Lernen von Mathematik ein vom anschaulich gegebenen Sachverhalt ausgehender Mathematisierungsprozess sein sollte. Aber selbst dann, wenn sich dieser Ansatz auch in der Praxis konsequent durchhalten ließe, wären Schemata und Skizzen - also Veranschaulichungen - unentbehrliche Hilfsmittel, um die Ergebnisse oder Zwischenergebnisse eines Mathematisierungsprozesses zu klären und zu fixieren.

Veranschaulichungen spielen also in jeder Hinsicht eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht. Daher sollen zuerst die Begriffe *Veranschaulichung, Modellbildung* und *Anschaulichkeit* voneinander abgegrenzt werden, um so für die große Vielfalt der im Zusammenhang mit dem Sachrechnen auftretenden Darstellungen ordnende Gesichtspunkte zu gewinnen.

Anschaulichkeit und Veranschaulichungen im Mathematikunterricht

Unter einer *Veranschaulichung* eines mathematischen Sachverhalts wollen wir eine Darstellung verstehen, die einerseits alle wesentlichen Begriffs- und Strukturmerkmale enthält und so den mathematischen Sachverhalt *unmittelbar sichtbar* macht, die aber andererseits möglichst frei von Inhalten ist, die für den zu klärenden Begriff oder Sachverhalt nicht charakteristisch sind. In dem Maße wie diese beiden Kriterien erfüllt sind, kann eine Veranschaulichung ihrem Gegenstand mehr oder weniger *angemessen* sein.

Veranschaulichungen mathematischer Begriffe sind häufig grafische Schemata wie *Venn-Diagramme* oder *Pfeildiagramme*. Aber auch die etwas abstrakteren Darstellungen im Koordinatensystem können ebenso der Veranschaulichung dienen wie andererseits die zur Darstellung von Zahlen benutzten Holzstäbe (*Cuisenaire*-Stäbe) oder ein konkretes Legemodell für den Satz des Pythagoras, mit denen der Schüler hantieren kann. Es ist also nicht so, dass der Begriff der Veranschaulichung oder die Angemessenheit einer Veranschaulichung an eine bestimmte Darstellungsebene im Sinne BRUNERS gebunden wäre.

Bei BRUNER wird in Bezug auf die Repräsentation eines Sachverhalts im Intellekt des Betrachters unterschieden zwischen einer *enaktiven* Ebene der Darstellung (hervorgerufen durch Handlungen, z.B. an konkreten Objekten wie Lernmaterialien), einer *ikonischen*

Ebene (hier wird die Darstellung durch Bilder oder Schemata hervorgerufen), und einer *symbolischen* Ebene der Darstellung des Sachverhalts durch Zeichen, Sprache usw.

Es erscheint wichtig, auf der ikonischen Ebene zwischen *bildhaften* und *schematischen* Darstellungen zu trennen. Als Beispiel für diese Unterscheidung denke man einerseits an die bildhafte Darstellung von Mengen in 20 Jahre alten Grundschulbüchern, wo die einzelnen Elemente zeichnerisch oder sogar fotografisch wiedergegeben sind, während andererseits ein Venn-Diagramm schematisch nicht diese Objekte selbst, sondern ihre Zusammenfassung zu verschiedenen Mengen und deren Beziehungen untereinander sichtbar machen soll. Beide, Bild und Schema, werden sinnlich wahrgenommen, doch steht das Schema auf einer höheren Abstraktionsstufe und ist deshalb in unserem Zusammenhang besonders wichtig. Gerade die im Sinne der genannten Kriterien angemessenen Veranschaulichungen mathematischer Begriffe und Strukturen sind ja meist relativ abstrakte Darstellungen. Sie müssen den Allgemeinheitsgrad des mathematischen Begriffs wahren und dürfen durch die speziellen Eigenschaften eines konkreten Objektes nicht zu sehr belastet sein.
Im Gegensatz dazu meint der Begriff der *Anschaulichkeit* mehr den Einzelfall, das prägnante, treffende Beispiel, das zwar durchaus charakteristisch für den fraglichen mathematischen Sachverhalt sein *kann*, das aber dennoch die Farbigkeit und die für den Schüler mitunter verwirrende Vielfalt der Besonderheiten des Einzelfalles trägt.

Die Begriffe *anschaulich* und *abstrakt* werden oft als Gegensatzpaar angesehen, und diese Gegenüberstellung findet sich sogar in Äußerungen über Zielsetzungen und Methoden verschiedener Schulformen. Richtiger sollte man vom *Abstrahieren* als von einem Prozess sprechen, der bei anschaulich Gegebenem ansetzt, gemeinsame, unter einer bestimmten Fragestellung als wesentlich angesehene Merkmale verschiedener Sachverhalte oder Objekte hervorhebt und zugleich von anderen Merkmalen absieht, *abstrahiert*. Wenn Veranschaulichungen häufig schon auf relativ hoher Abstraktionsstufe stehen, so können sie doch selbst wieder Ausgangspunkt für weitere Abstraktionsprozesse sein. Wenn nämlich z.B. ein mathematischer Strukturbegriff auf verschiedene Weisen veranschaulicht wird, so führt das Herauslösen der gemeinsamen Merkmale dieser Veranschaulichungen ja wieder auf die abstrakte Struktur zurück, oder es führt zu einem übergeordneten, allgemeineren Begriff.

Die bisherigen Überlegungen sollen nun anhand einiger weiterer Beispiele verdeutlicht und ergänzt werden:

> Die Symmetrie einer Relation wird in einem Pfeildiagramm unmittelbar sichtbar: Zu jedem Pfeil gibt es einen Gegenpfeil:

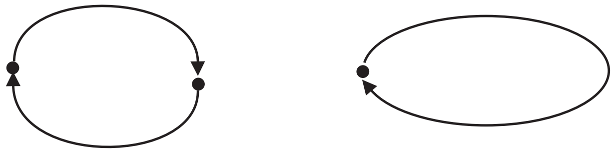


Fig. 1

Gleichwohl ist eine solche Darstellung recht abstrakt und allgemein, denn in ihr ist abstrahiert (abgesehen) von der speziellen Relation, um die es sich handelt, von der Beschaffenheit der Elemente der zugrunde gelegten Menge, von deren räumlicher Anordnung usw.

Dasselbe könnte man über Mengenbilder zur Veranschaulichung des Sachverhalts $A \subseteq B$ sagen, mit der Einschränkung allerdings, dass volle Angemessenheit im Sinne der genannten Kriterien nur für den Begriff „echte Teilmenge“ gegeben ist, da die Darstellung die Möglichkeit $A = B$ gerade nicht sinnfällig zum Ausdruck bringt:

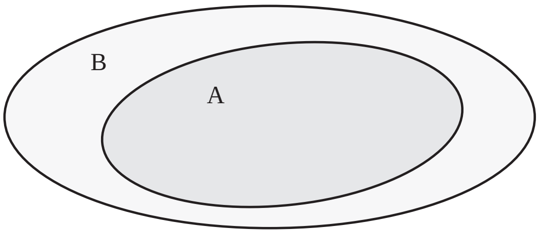


Fig. 1

Im Gegensatz zu diesen Beispielen sind, wenn man von *Anschaulichkeit* spricht, fast immer die einzelnen Objekte selbst bzw. ihr Bild gegeben: z. B. sind das Foto oder die Zeichnung einer Zapfsäule an der Tankstelle, die Abbildung eines Verkehrszeichens mit einer Prozentangabe zur Warnung vor Gefälle, die Wiedergabe einer Schaufensterdekoration oder das Bild einer Gruppe von Personen anschaulich.

Solche Darstellungen lassen zunächst nur in sehr unterschiedlichem Maß erkennen, worauf es ankommt, d.h. unter welcher Fragestellung sie jeweils zu betrachten sind: Bei dem Verkehrsschild ist mit der Angabe 8 % ein Signal gegeben, es sagt aber nichts über die Bedeutung dieses Symbols aus. Bei der Zapfsäule sind zwei Zahlenangaben sichtbar. Die Frage nach ihrem Zusammenhang liegt nahe, doch sagt das Bild - trotz seiner Anschaulichkeit - nichts über diesen Zusammenhang aus. Eine filmische Darstellung, bei der die miteinander gekoppelten Veränderungen der beiden Zahlenangaben zu verfolgen sind, wäre noch anschaulicher und könnte zugleich zu ersten Vermutungen über den Sachverhalt führen. Zu voller Einsicht und Klärung dürften jedoch abstrakte Schemata (z.B. Simplexe oder Rechenbäume, Doppelleitern) wesentlich mehr beitragen.

Die Preisschilder im Schaufenster - also Text und Zahlenangaben und nicht die dargestellten Objekte - enthalten zwar eine Aufforderung zu vergleichen, doch wird die Art des Vergleichs nicht erkennbar.

Beim Bild einer Personengruppe schließlich hat man ohne vorgegebene Fragestellung nicht einmal einen Anhaltspunkt für die Betrachtung. Es könnte um Mengenbildung gehen (z.B. Sortieren nach Art der Kleidung), um eine Äquivalenzrelation (z.B. ... ist verwandt mit ...) oder um eine Ordnungsrelation (z.B. ... ist größer als ...).

Die Bedeutung von Einzelbeispielen, von Bildern, Filmen oder konkreten Objekten liegt also nicht so sehr in ihrem Beitrag zur Erfassung eines mathematischen Sachverhalts, vielmehr dienen sie dazu, überhaupt erst das Interesse der Schüler für einen Gegenstand zu wecken. Sie sind meist sogar unentbehrlich, und man kann sagen, dass mit der Anschaulichkeit der Darbietung in der Regel auch das Interesse am Gegenstand wächst. Vereinfachend kann man zusammenfassen:

> Die *Anschaulichkeit* bildhafter Darstellungen dient der *Motivation*,
> *Veranschaulichungen* dienen der *Klärung* und *Einsicht*.

Zwischen Veranschaulichungen in weitgehend abstrakten schematischen Darstellungen einerseits und anschaulichen Einzelbeispielen andererseits halten sogenannte *mathematische Modelle* eine Mittelstellung: Man kann z.B. den *Gruppenbegriff* repräsentieren in den Regeln verschiedenartiger Spiele mit konkreten Objekten (Drehen und Wenden symmetrischer Figuren) oder Personen (Plätze-Tauschen nach bestimmten Regeln). Dabei ist die mathematische Struktur zweifellos das Primäre, so dass von Veranschaulichung gesprochen werden muss. Andererseits geht hier die Konkretisierung so weit, dass die individuellen Merkmale der im Spiel benutzten Objekte oder die einzelnen Handlungen durchaus anschaulich sind. Nicht immer gelingt es, didaktische Modelle zu finden bzw. zu konstruieren, die in dieser Weise sowohl Motivation als auch Repräsentation des mathematischen Sachverhalts zu leisten vermögen. Aber selbst wo dies gelingt, enthebt es den Mathematikunterricht nicht der Aufgabe, immer wieder von dem Schüler vertrauten Umweltsituationen her Mathematisierungsprozesse einzuleiten, eine Aufgabe, die gerade für das Sachrechnen charakteristisch ist.

Zur Veranschaulichung der im Sachrechnen auftretenden Begriffe

Wir wollen versuchen, diese Überlegungen auf die mathematischen Begriffe und Zusammenhänge des Sachrechnens und insbesondere auf den zentralen Punkt der Abbildungen zwischen Größenbereichen anzuwenden. Dabei werden wir uns auf diejenigen Darstellungen konzentrieren, die der Veranschaulichung und Klärung der mathematischen Zusammenhänge dienen; denn die im vorigen Abschnitt angeführten Beispiele für Anschaulichkeit als motivierendes Element waren bereits weitgehend dem Bereich des Sachrechnens entnommen.

Die Analyse von Begriffen wie Größe oder Proportionalität zeigt, dass alle derartigen Begriffe in ein enges Netz von Beziehungen und Querverbindungen zu anderen Begriffen eingebunden sind und dass man sie deshalb unter mehreren Aspekten betrachten kann. So kann man beim Größenbegriff z.B.

> die Klassenbildung in einem Repräsentantenbereich,
>
> das Ordnen und Addieren von Größen
>
> oder aber das Messen

hervorheben. Beim Begriff der Proportionalität kommen zusammen:

> der Abbildungsbegriff,
>
> der Begriff der monotonen und linearen Abbildung,
>
> Additions- und Multiplikationsbedingung als besondere Eigenschaft,
>
> der Verhältnis- und Bruchbegriff,
>
> die Quotientengleichheit
>
> und der Proportionalitätsfaktor als Faktor in einem Produkt.

Wenn wir nun die in den Schulbüchern zu findenden Veranschaulichungen im Sinne des letzten Abschnitts auf ihre *Angemessenheit* hin untersuchen, so zeigt sich, dass in der Regel nur einer der verschiedenen Aspekte hervorgehoben wird, während die übrigen weitgehend zurücktreten. Am Beispiel der *Proportionalität* und ihrer Behandlung in der Sekundarstufe I soll dies weiter verfolgt werden:

Der Abbildungsbegriff im Sinne der *Zuordnung* wird in einer *Pfeildarstellung* besonders deutlich sichtbar:

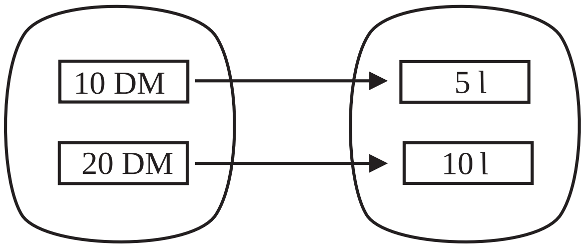


Fig. 1

Die besonderen Eigenschaften der Abbildung sind hier jedoch nicht *sichtbar*, sondern nur durch Rechnung aus den Zahlenangaben des Schemas zu ermitteln.

Die *Monotonie* der Abbildung tritt bei der Darstellung mit Hilfe einer Doppelleiter hervor:

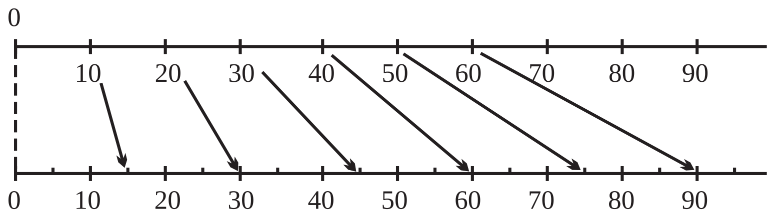


Fig. 2

Bei einer monoton wachsenden Abbildung können sich keine zwei Pfeile in dieser Darstellung überschneiden. Im Gegensatz dazu **müssen** sich bei einer streng monoton fallenden Abbildung, also z.B. bei einer *Antiproportionalität*, zwei beliebige Pfeile stets kreuzen:

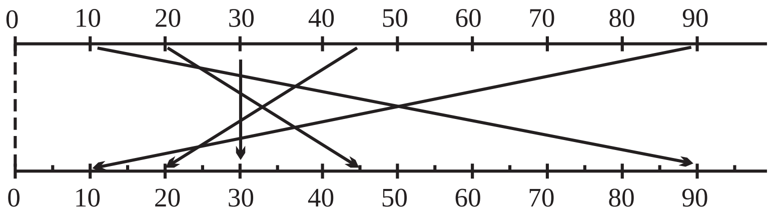


Fig. 3

Die Darstellung im *kartesischen Koordinatensystem* zeigt *Monotonie* und *Linearität*:

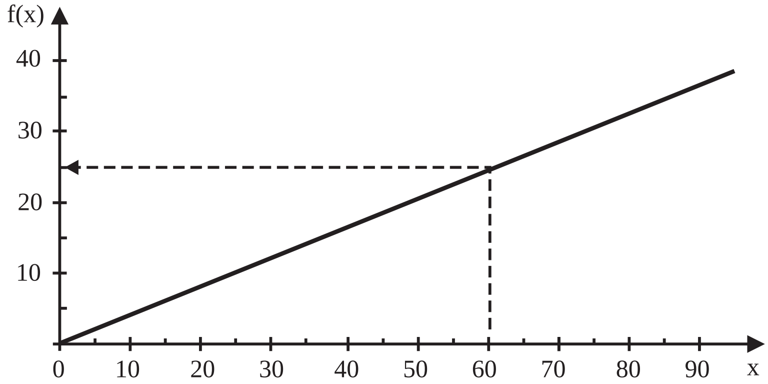


Fig. 4

Der Gedanke der Zuordnung wird hier weniger deutlich, sofern er nicht durch einen zusätzlichen Pfeil angedeutet wird. In der Regel sollte aber die Darstellung einer Abbildung im kartesischen Koordinatensystem den Schülern bei der Behandlung der Proportionalitäten bereits bekannt sein, so dass es nur darauf ankommt, die Eigenschaften einer speziellen Abbildung deutlich zu machen. Und hier erweist sich das kartesische Koordinatensystem als sehr wirksames Mittel.

Additions- und *Multiplikationsbedingung* lassen sich einprägsam festhalten mit Hilfe von Operatordiagrammen:

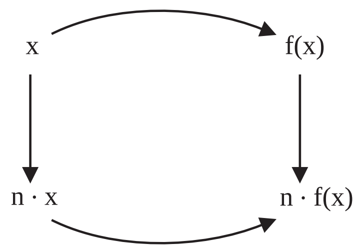


Fig. 1

Doch diese Schemata lassen wiederum die Linearität der Abbildung nicht erkennen.

Die *Quotientengleichheit* kann man verdeutlichen mit Hilfe des entsprechenden geometrischen Sachverhalts bei *ähnlichen* Dreiecken bzw. über die *Strahlensätze*:

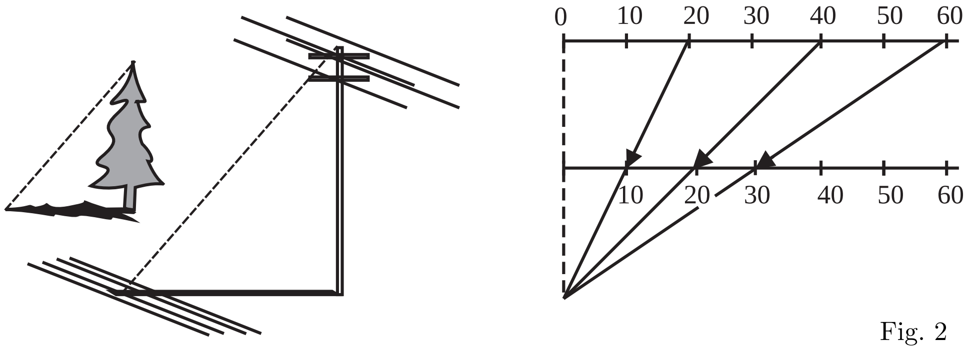


Fig. 2

Hier enthält die linke Darstellung auch anschauliche Elemente. Der Nachteil bzw. Unvollkommenheit beider Darstellungen besteht wieder darin, dass nur einzelne Größenpaare miteinander in Beziehung gesetzt werden, während es sich doch um eine Abbildung zwischen Größenbereichen handelt.

Die Doppelleitern können auch verschiedene Maßstäbe haben, und zwar zweckmäßigerweise so, dass die Zuordnungspfeile parallel sind:

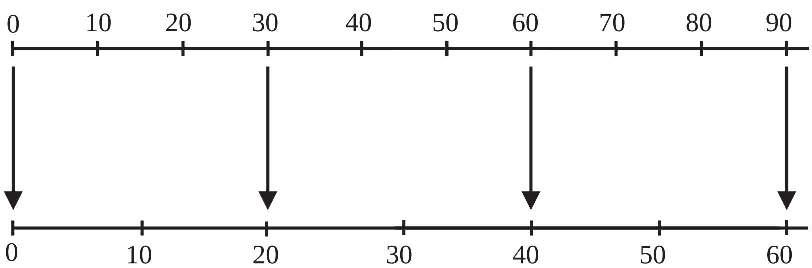


Fig. 3

Dieses Bild ergibt sich mit Hilfe eines konkreten Modells, wenn man eine der beiden Skalen auf einem Gummiband hat und streckt:

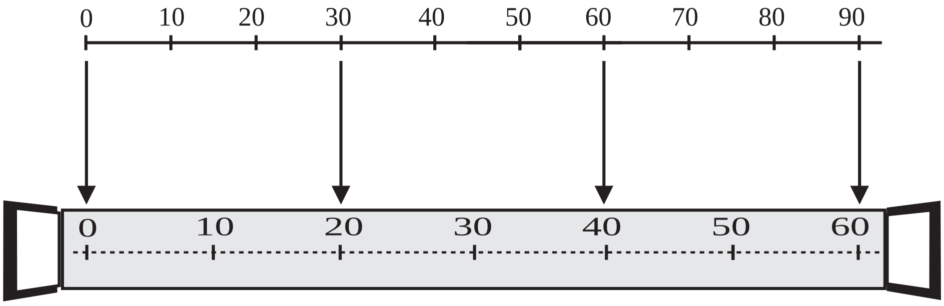


Fig. 4

Mit der Streckung ist aber auch die Beziehung zur Operatorauffassung von Brüchen hergestellt. Der Operatoraspekt kann auch kurz durch einen einzelnen Zuordnungspfeil angedeutet werden, wobei der Proportionalitätsfaktor k wie üblich als Operator markiert wird:

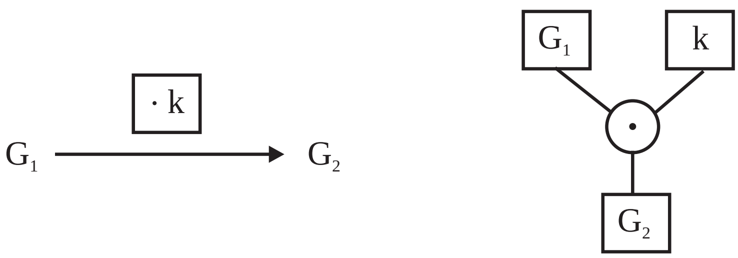


Fig. 1

Es handelt sich um eine Multiplikation mit dem Faktor k und diese Verknüpfung kann auch durch einen Rechenbaum dargestellt werden.

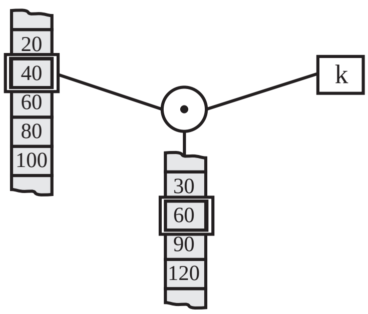


Fig. 2

In nebenstehender Skizze ist dieser Gedanke kombiniert mit dem Aspekt der Abbildung. Die Streifen deuten an, dass *jedem* Element des ersten Größenbereichs durch Multiplikation mit dem festen Faktor k ein Element des zweiten Größenbereichs zugeordnet ist. Die Zuordnung wird dabei über das Rechnen mit *Maßzahlen* vermittelt.

Bruch- und Prozentrechnung: Auch hier wird von grafischen Darstellungen Gebrauch gemacht. Am häufigsten werden dabei Streifen- bzw. Rechteck- und Kreisdiagramme verwendet:

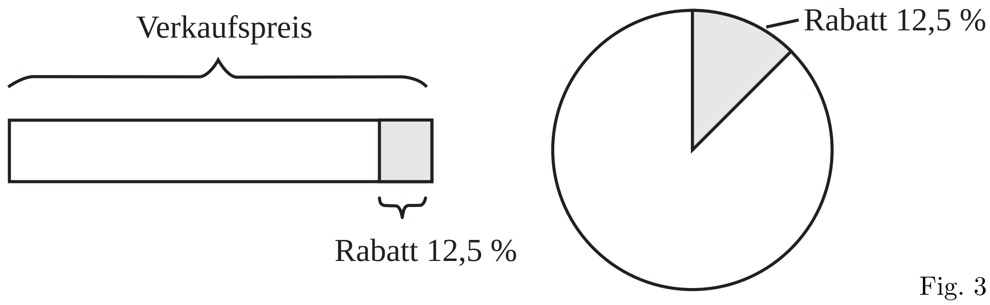


Fig. 3

Diese Diagramme machen aber nicht den Bruch- oder Prozentoperator als Abbildung deutlich, sie zeigen vielmehr Repräsentanten konkreter Brüche bzw. Repräsentanten des Prozentwertes. Andererseits ist zu beachten, dass jedes derartige Kreis- oder Rechteckdiagramm selbst auf einer Abbildung im mathematischen Sinne beruht, nämlich auf einer Proportionalität zwischen Bruchzahlen und Größen: Der Zahl 100 (oder auch 100 % = 1) wird eine bestimmte Länge bzw. ein Flächenstück - das Ganze - zugeordnet und der Zahl p (oder auch der Bruchzahl $\frac{p}{100}$) der entsprechende Teil davon.

Die Rechteckdiagramme zeichnen sich durch eine uneingeschränkte und besonders einfache Unterteilungsmöglichkeit aus, während bei Kreisdiagrammen besonders gut zu erkennen ist, dass eine Teil-Ganzes-Beziehung vorliegt. Allerdings ist bei Kreisdiagrammen, von Sonderfällen abgesehen, das *genaue* Verhältnis von Teil und Ganzem nur schlecht zu erkennen.

Die Beziehung eines Teils zum Ganzen wird auch sehr deutlich, wenn nach Art eines Mengendiagramms eine Teilmenge einer gegebenen Menge ausgezeichnet wird:

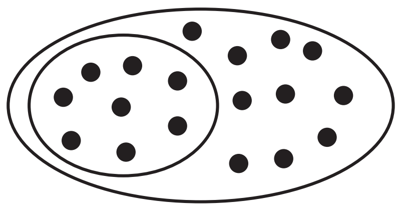


Fig. 1

Doch bleibt hier die Teilbarkeitseigenschaft unberücksichtigt, die man bei einer Behandlung der Bruchzahlen mit Hilfe von Größen und auch bei den Proportionalitäten meist voraussetzt.

Für die Arbeit mit grafischen Darstellungen im Unterricht ergibt sich aus unseren Betrachtungen eine einfache, aber wichtige Konsequenz: Es geht nicht nur darum, die gewählten Veranschaulichungen - im Einklang mit einem von DIENES formulierten Prinzip - überhaupt zu variieren, es sollte auch so variiert werden, dass möglichst viele Komponenten eines Begriffs und möglichst viele der bestehenden Querverbindungen zu anderen Begriffen sichtbar werden. Eine einseitige Bevorzugung einzelner Darstellungsformen ist nicht nur eine Frage de persönlichen Geschmacks, sondern bedeutet meist auch eine Einseitigkeit der dem Schüler vermittelten Information über den Unterrichtsgegenstand.

Information und Irreführung durch grafische Darstellungen

Gute Veranschaulichungen vermitteln nicht nur Einsicht in einen Sachverhalt, sie haben auch immer da, wo der Lernende dem Sachverhalt noch zweifelnd gegenübersteht, ein hohes Maß an Überzeugungskraft. Nach der Analyse des Begriffs Veranschaulichung liegt das in der Natur der Sache, denn die beiden Merkmale der Einsichtigkeit im Sinne sinnlicher Wahrnehmbarkeit einerseits und eines relativ hohen Abstraktions- bzw. Allgemeinheitsgrads andererseits führen dazu, dass man nicht nur Klarheit und Deutlichkeit sondern auch Gesetzmäßigkeit und Richtigkeit mit einer solchen Darstellung assoziiert.

Hier liegt jedoch eine Gefahr, der man im Mathematikunterricht bewusst entgegenarbeiten sollte. Denn auch mathematische Betrachtungsweisen und grafische Darstellungen ihrer Ergebnisse können täuschen und den eigentlichen Sachverhalt verfälschen. Wir haben im letzten Abschnitt hervorgehoben, dass schon in Bezug auf die Veranschaulichung einzelner mathematischer begriffe und Strukturen die grafischen Darstellungen meist einzelne Aspekte besonders akzentuieren. Um wie viel mehr gilt das, wenn man eine solche Darstellung mit dem in einer sehr komplexen Wirklichkeit gegebenen Sachverhalt vergleicht! Die Gefahr liegt darin, dass quantitative Aussagen über einen Sachverhalt durchaus korrekt sein können, dass aber

> durch die Wahl und Isolierung der betrachteten Aspekte,
>
> durch die Wahl der Bezugsgrößen,
>
> durch das Nennen oder Verschweigen dieser Bezugsgrößen und nicht zuletzt
>
> durch die Anordnung der wiedergegebenen Daten, also durch die psychologische Wirkung verschiedener Darstellungen desselben Inhalts

die über einen Sachverhalt gemachten Aussagen nicht nur unvollständig sein können, sondern dass ihre Wirkung auf den unkritischen Betrachter manipulierbar wird. Kommt nun eine im Sinne „überzeugende“ Veranschaulichung hinzu, so gewinnt eine lückenhafte oder einseitige Aussage leicht den Charakter des Bewiesenen und Gesicherten. Der Betrachter wird nicht zuletzt dadurch getäuscht, dass eine gute Grafik im Gegensatz zu Worten oder Zahlen leicht und ohne viel Nachdenken aufgenommen werden kann. (Und man kann „gute“ Grafiken einfach herstellen!)

Das hier theoretisch beschriebene Phänomen ist durchaus bekannt. Das „Lügen“ mit „Statistik“ ist schon sprichwörtlich geworden, doch macht man sich selten bewusst, wie sehr diese Problem auch bei einfachsten quantitativen Angaben eine Rolle spielt, also überall dort, wo Größen genannt werden. Die Formen und Möglichkeiten der Irreführung durch Zahlenangaben und Grafiken sind äußerst vielfältig, daher sollen einige besonders typische und wichtige Fälle an Beispielen verdeutlicht werden:

1. *Der Maßstab auf den Achsen eines Koordinatensystems ist frei wählbar und der Nullpunkt einer Koordinatenachse muss nicht der Schnittpunkt der Achsen sein.*

Die folgenden Grafiken zur Steigerung der Lebenshaltungskosten sind beide korrekt. Die Wahl des Maßstabes ändert jedoch die psychologische Wirkung des Schaubilds so, dass ein „leichter Anstieg“ bei Bedarf „steil und alarmierend“ erscheint:

Lebenshaltungskosten in den alten Bundesländern (1995 = 100%)
(Quelle: Statistisches Jahrbuch 1999 des Statistischen Bundesamtes)

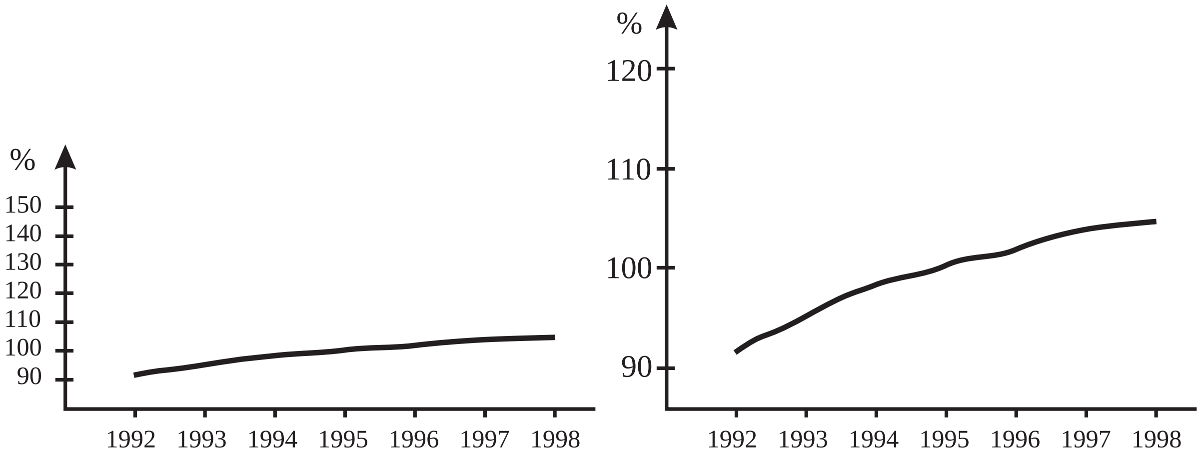


Fig. 1

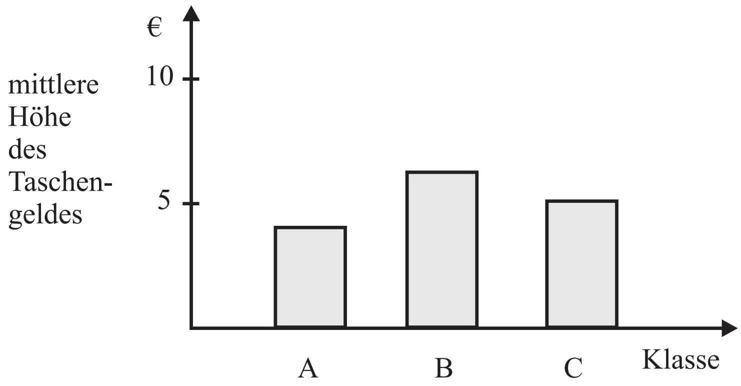
Eine erste Beurteilungsmöglichkeit - die mit Schülern zu diskutieren wäre - ergibt sich aus dem Vergleich mit anderen Ländern und vor allem aus dem Vergleich mit der Einkommensentwicklung. Bei letzterem müsste man die Nettoeinkommen heranziehen und außerdem die Einkommensstreuung beachten, denn es ist denkbar, dass das mittlere Nettoeinkommen nur durch hohe Einkommenssteigerungen eines kleinen Bevölkerungsteils mit der Preisentwicklung Schritt hält, während gleichzeitig für große Bevölkerungsteile Einkommens- und Preisentwicklung auseinanderfallen.

2. *Absolute Zahlen als Bezugspunkt für einen prozentualen Vergleich fehlen bzw. werden nicht berücksichtigt.*

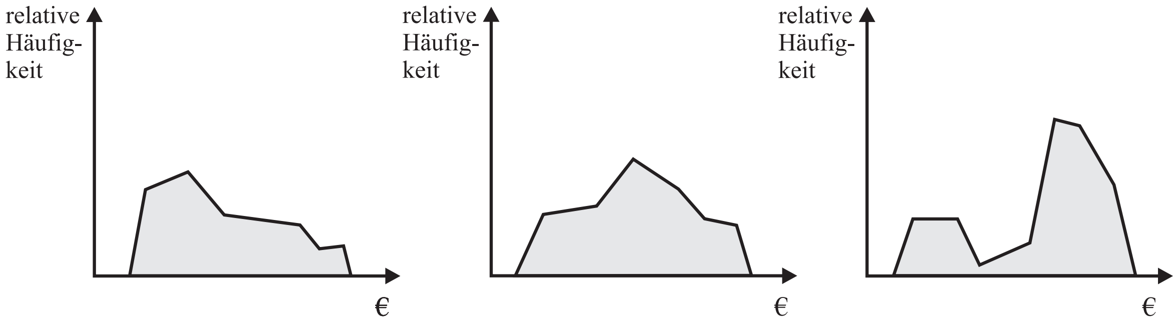
Beispiel: Arbeitslosenzahlen in zwei kleinen Gemeinden mit etwa gleicher Einwohnerzahl. (Angegeben wurde nur der prozentuale Anstieg, aber die folgende Darstellung ist vollständig.)

Gemeinde	Arbeitslose (absolut) 1975	1976	Anstieg in %
A	10	20	150
B	100	130	30

3. *Bei Mittelwertvergleichen fehlt ein Streuungsmaß.*



Dabei wird unterschlagen, dass ein solcher Mittelwert stark verzerrt wird, wenn einige wenige Schüler über sehr große Summen verfügen. Die Häufigkeitsverteilungen könnten z.B. etwa so aussehen:



Das Auseinanderfallen in zwei Gruppen, wie es die letzte Skizze andeutet, wird durch die Mittelwertbildung verwischt. Die dadurch mögliche Irreführung gewinnt an Gewicht, wenn man bedenkt, dass sich die fraglichen Mittelwerte ebenso wie auf die vergleichsweise „harmlosen" Taschengeldsummen auch auf das Pro-Kopf-Einkommen in verschiedenen Industrie- und Entwicklungsländern beziehen können.

4. *Mittelwertbildungen sind als solche oft problematisch.*

Schulleistungen werden bewertet mit „Sehr Gut", „Gut", usw. Zur Abkürzung (!!!) übersetzt man diese Beurteilung in Zahlen. Für diese Zahlen werden dann Mittelwerte gebildet, sowohl für eine Schulklasse als auch in Bezug auf den einzelnen Schüler, als auch über Fächergrenzen hinweg. Was bedeutet der Mittelwert der Noten in Mathematik, Deutsch und Kunst?

4.6 Problemlösen im Sachrechnen

Wozu Problemlösen?

Das Interesse eines Schülers an einer Sachaufgabe kann auf sehr unterschiedlichen Motiven beruhen. Zweifellos wird aber der Lernprozess besonders dann nachhaltig beeinflusst, wenn die Motivation von der Sache ausgeht, wenn es gilt, Neues zu entdecken und wenn dabei Probleme zu lösen sind, die sich der Schüler zu eigen macht oder die er als eigene Probleme und Bedürfnisse von außerschulischen Bereichen her selbst in den Unterricht einbringt. Damit werden grundsätzliche Fragen angesprochen, nämlich die Beziehungen zwischen Sachrechnen, Problemlösen und entdeckendem Lernen. So wie das Wort Sachrechnen immer eine Verbindung und auch ein Spannungsverhältnis von Mathematik und Sachverhalt andeutet, so ergeben sich auch hier zwei Richtungen der Fragestellung: Es geht einerseits um die *Gewinnung neuer mathematischer Einsichten* und Instrumentarien beim Umgang mit Problemen des Sachrechnens und andererseits um das *Erkunden* und *Kennenlernen* neuer, für den Schüler *relevanter Sachverhalte*.

Mit dem zweiten dieser Aspekte sind aber nicht nur Problemlösevorgänge als solche, sondern zugleich auch Fragen der Unterrichtsinhalte und -organisation angesprochen. Sieht man es nämlich als wesentliche Aufgabe der Mathematik an, die Umwelt zu erschließen und zu beschreiben, versteht man also Mathematik als ein Mittel, so ist es nur konsequent, von der Erkundung eines Sachbereiches auszugehen und die mathematischen Hilfsmittel immer dann zu erarbeiten, wenn sie im Rahmen einer solchen Erkundung wirklich benötigt werden. Das Lernen von Mathematik wäre also einzubetten in die Arbeit an Projekten, die sich auf die Erschließung eines Stücks der den Schüler umgebenden Wirklichkeit richten und die deshalb in der Regel sowohl die traditionellen Fächergrenzen als auch die üblichen Organisationsformen des Unterrichts sprengen.

Fassen wir die angesprochenen Fragen noch einmal kurz zusammen:

- Was ist unter Problemlösen zu verstehen?
- In welchem Maße enthalten Sachaufgaben mathematische Probleme und können zu neuen mathematischen Einsichten führen?
- In welchem Maße kann das Problemlöseverhalten des Schülers im Sachrechnen gesteigert werden?
- Welche Hilfen und Strategien beim Lösen mathematischer Probleme gibt es, und in welchem Maße sind sie erlernbar?
- In welchem Maße können Sachbereiche von Sachaufgaben als Ansatzpunkt her erschlossen werden?
- Was leisten „offene Aufgaben“? Und umgekehrt: Wie können mathematische Einsichten als notwendige Hilfsmittel bei der Arbeit an übergeordneten, mehr auf einen Sachbereich als auf einen traditionellen Unterrichtsgegenstand hin orientierten Projekten gewonnen werden?

Diese Fragen können hier nicht vollständig beantwortet werden, insbesondere da vieles sowohl in psychologischer als auch didaktischer Hinsicht noch weiterer Untersuchungen bedarf.

Psychologische Aspekte des Problemlösens

Die psychologischen Erklärungsversuche für das Problemlösen oder für einzelne Aspekte des Problemlösevorgangs sind sehr unterschiedlich und vielfältig. Mit Weinert könnte man vom *Problemlösen* als von einem „ungelösten Problem“ sprechen. Fast immer versteht man jedoch unter Problemlösen eine Art des Lernens, und zwar Lernen in seiner höchsten Form.

Nach einem streng verhaltenspsychologischen Ansatz besteht alles Lernen und damit auch das Problemlösen in einer *Verhaltensänderung*.

Nach Gagné ist Problemlösen die höchste Stufe in einer Hierarchie verschiedener Arten des Lernens, wobei eine höhere Stufe jeweils die vorhergehende voraussetzt. Hier sollen die vier höchsten Stufen der Hierarchie genannt werden:

> Unter *multipler Diskrimination* ist die Fähigkeit zu verstehen, auf jeden einzelnen aus einer Gruppe von Reizen anders (angemessen) zu reagieren, also z.B. im Mathematikunterricht der Grundschule vorgegebene Bausteine verschiedener Formen und Farben unterscheiden zu können.
>
> Mit dem *Begriffslernen* entsteht die Möglichkeit, auf „Dinge oder Ereignisse als Klasse“ zu reagieren, also z.B. bei einer größeren Zahl von Situationen oder Objekten wie etwa Bausteinen die gemeinsame Eigenschaft „dreieckig“ abstrahieren zu können und - das ist wichtig - ein weiteres Objekt dann dem neu gebildeten Begriff unterordnen zu können.
>
> Das sogenannte *Regellernen* ist nicht etwa nur auf Regeln im engeren Sinne wie Rechenregeln oder geometrische Axiome zu beziehen. Gagné versteht unter Regeln vielmehr ganz allgemein „Ketten von Begriffen“. Regeln stellen die Beziehungen zwischen Begriffen her und bilden das, „was im Allgemeinen Wissen genannt wird“.
>
> Das *Problemlösen* schließlich besteht nicht nur darin, vorhandene Regeln zur Erreichung bestimmter Ziele anzuwenden, sondern es handelt sich zugleich immer um einen Lernprozess, der von gegebenen Regeln zu einer neuen „Regel höherer Ordnung“ führt.

Das Gelernte selbst wird zur Regel, die bei neuen Problemen mit zum Repertoire der für die Lösung benutzbaren Regeln gehört. Das einmal gelöste Problem wird damit zur erinnerbaren Erfahrung.

Dieser hierarchische Aufbau entspricht in mancher Hinsicht den Systemen von Definition (Begriffen) und Sätzen (Regeln), wie sie die Mathematik kennt. Doch darf man diese Analogie nicht zu eng fassen und etwa unter Problemlösen nur noch das Ableiten eines neuen Satzes (einer Regel höherer Ordnung) aus bekannten Sätzen verstehen.

Gagné untersucht nun die Bedingungen, unter denen sich die einzelnen Arten des Lernens vollziehen und unterscheidet dabei zwischen Bedingungen *innerhalb des Lernenden* und *Bedingungen der Lernsituation*.

Für das Problemlösen nennt er als Bedingung innerhalb des Lernenden die Fähigkeit,

> für das Problemlösen relevante, früher erlernte Regeln zu erinnern,

und als Bedingungen in der Lernsituation die folgenden:

> Die relevanten Regeln müssen gleichzeitig oder in enger zeitlicher Folge mobilisiert, d.h. dem Lernenden gegenwärtig gemacht werden. Hilfen zur Erreichung dieser „Kontiguität der Regeln“ können durch sprachliche Instruktion oder durch Fragen gegeben werden, ohne dabei die Lösung eines Problems vorwegzunehmen.
>
> Hilfen können auch in einer Lenkung der Richtung des Denkens bestehen, die sich zumindest auf das Bewusstmachen des zu erreichenden Ziels erstreckt.

Berücksichtigt man die Bemerkung Gagnés, dass sich der Lernende eine solche Lenkung auch durch selbst gegebene Instruktionen schaffen kann, so wird deutlich, dass zumindest in einem sehr allgemeinen Sinne das Problemlösen planbar und lernbar sein muss.

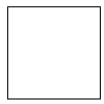
Von einer ganz anderen psychologischen Theorie her hat Wertheimer einen Beitrag zur Frage des Problemlösens geleistet, der für das Problemlösen in der Mathematik von besonderem Interesse ist. Aus der Sicht der *Gestaltpsychologie* kommt es darauf an, wie bei einem Objekt, einem Sachverhalt oder einer Problemstellung die Beziehungen der Teile zum übergeordneten Ganzen gesehen werden. Das Problem ist gelöst, die gesuchte Einsicht gewonnen, wenn diese Beziehungen so beschaffen sind, dass sich die Teile, die einzelnen Elemente des gegebenen Sachverhalts, zu einer „guten Gestalt" organisieren. Die Gestaltpsychologie versucht, die Gesetzmäßigkeiten für den Aufbau des Ganzen aus seinen Teilen zu beschreiben, und ein Problem zu lösen heißt demnach, Lücken und Störungen im Aufbau einer im Sinne dieser Theorie guten Gestalt zu erkennen und zu beseitigen.

Wichtige Schritte in diesem Prozess bestehen

- im Strukturieren des Sachverhalts, d.h. in der Regel in einer Verfeinerung des Beziehungsgefüges von Teilen im Ganzen,
- im Umstrukturieren, d.h. in der Um- und Neuorganisation des gegebenen Beziehungsgefüges,
- im Zentrieren, d.h. im Lenken der Aufmerksamkeit auf einen speziellen Punkt
- und entsprechend im Umzentrieren.

Besonders der Vorgang des Strukturierens bzw. Umstrukturierens ist vielfach für die Lösung eines Problems wesentlich und soll an einem ganz elementaren Beispiel verdeutlicht werden:

Der Mittelpunkt eines Quadrats sei zu bestimmen:



Strukturieren kann hier zunächst ganz konkret als eine Verfeinerung und Anreicherung der gegebenen Figur verstanden werden, so wie es der Schüler intuitiv tut, wenn er ein quadratisches Blatt an den Mittellinien oder an den Diagonalen faltet und damit „Hilfslinien" erzeugt. Wenn bei einem Quadrat auf festem Untergrund das Falten ausscheidet, kann die Unterteilung z.B. durch Auslegen mit kleineren Quadraten erreicht werden:

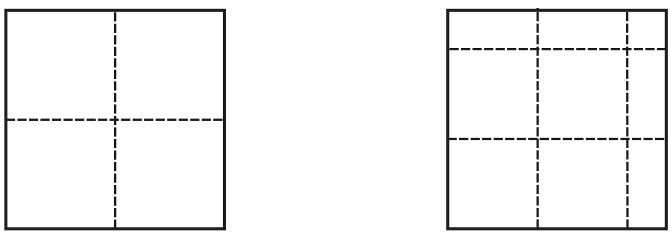


Fig. 1

Hat jedoch das Legematerial keine geeignete Größe und kennt der Schüler kein Verfahren zur zeichnerischen Bestimmung der Seitenmitten, so ist mit einer zufällig gewählten

Unterteilung das Problem nicht zu lösen. Umstrukturieren bedeutet dann, die gewählte Unterteilung der Figur und damit auch die gewählten Hilfslinien durch andere zu ersetzen:

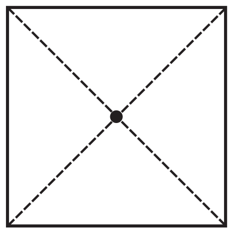


Fig. 2

In Bezug auf die Organisation der Teile zu einem Ganzen in einer „guten Gestalt“ ist festzuhalten, dass das Finden des Mittelpunktes auf den Symmetrieeigenschaften des Quadrats beruht. Dabei denkt man zunächst an die Achsensymmetrie. Verschärft man das Problem dadurch, dass z.B. zwei gegenüberliegende Ecken fehlen,

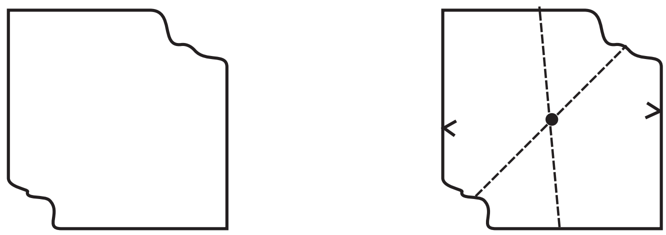


Fig. 1

so ist erneut umzustrukturieren. Man kann das Quadrat als drehsymmetrische Figur sehen und den Mittelpunkt bestimmen wie es in obiger Skizze rechts angedeutet ist.
Oder aber das Quadrat ist zuerst zu vervollständigen, um so die Lücken zu schließen - hier ganz wörtlich zu nehmen - und dann einer der beiden ersten Lösungswege zu beschreiten.

Bekannte, von Wertheimer selbst angeführte Beispiele für die Rolle des Umstrukturierens beim Problemlösen sind die Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms und der Summe einer arithmetischen Reihe:

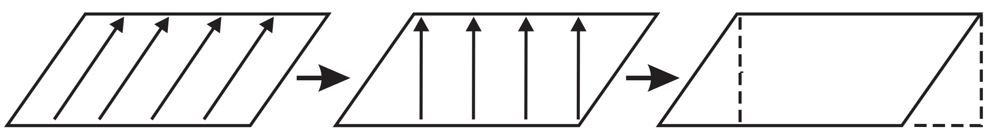


Fig. 2

Die Skizze zeigt, wie die naheliegende, schräg verlaufende Strukturierung des Parallelogramms durch einen anderen Aufbau ersetzt wird und wie dann die „Störungen“ beseitigt werden. Schon eine Änderung der Lage in der Ebene macht hier ein Umdenken, also erneut ein Umstrukturieren der Gesamtsituation erforderlich:

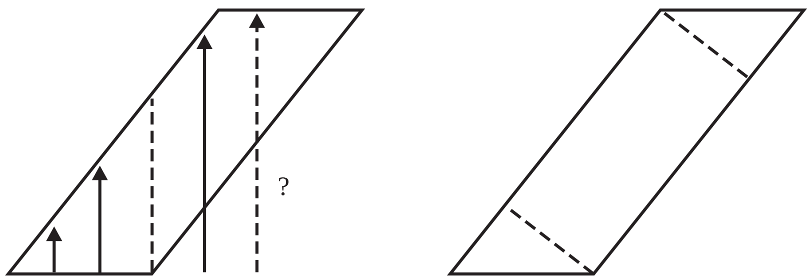
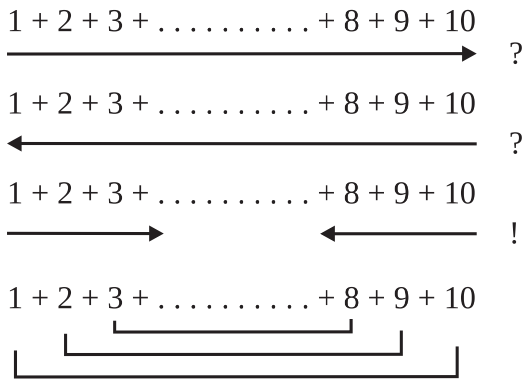


Fig. 3

Die Bestimmung der Summe einer arithmetischen Reihe gelingt durch das Entdecken einer symmetrischen Strukturierungsmöglichkeit:



Solche Hinweise zur Strukturierung einer Problemsituation können wesentlich zur Lösung beitragen und entfalten auch dann noch ihre Wirksamkeit, wenn sie als Hilfen nicht von Fall zu Fall durch die Lehrerin gegeben werden, sondern wenn sie systematisch eingesetzt werden. Wie weit allerdings dabei nur ein spezifischer Transfer oder mehr erreicht werden kann, ist offen; d.h. es ist schwer zu prüfen, wie weit durch einsichtiges Lernen im Sinne WERTHEIMERS nur die jeweils folgenden, nach Struktur und Inhalt verwandten Aufgaben vorbereitet werden und nicht zugleich auch ganz allgemein die Fähigkeit zum Problemlösen wächst.

Der *Transferbegriff* ist zweifellos von zentraler Bedeutung für die Erforschung von Problemlösevorgängen. Die zahlreichen psychologischen Untersuchungen zum Transferproblem beziehen sich jedoch mehr auf die Lernübertragung in einem engeren, überschaubaren Rahmen sowie auf verschiedene Formen der Lernübertragung, die sich unter schulischen Bedingungen beobachten lassen, als auf *unspezifischen* Transfer, also z.B. die Lernübertragung vom Mathematiklernen in der Schule hin zu außerschulischen Bereichen. Den Ergebnissen solcher Untersuchungen lassen sich aber wichtige Aussagen über die Bedingungen und Voraussetzungen für Transfer entnehmen, die von WEINERT in den folgenden Punkten zusammengefasst wurden:

- Umfang und Art der Lernübertragung sind abhängig von den *kognitiven* Voraussetzungen beim Lernenden, insbesondere also auch von seiner Intelligenz,

- von der *Ähnlichkeit* zwischen *Lern-* und *Transferaufgabe*, wobei unter Ähnlichkeit die inhaltlichen oder strukturellen Gemeinsamkeiten oder aber auch das Bereitstehen der für beide Problemstellungen erforderlichen Vorkenntnisse zu verstehen sind,
- von der *Art der Auseinandersetzung mit der früheren Aufgabe*, und hierbei insbesondere von der *Intensität der Übung*, die zur Vermeidung negativen Transfers erforderlich ist, und vom Umfang des *einsichtigen Lernens*,
- sowie schließlich von der *Entwicklung allgemeiner und spezifischer transferfördernder Methoden*, also z.B. von der Bereitstellung von Strategien zur Behandlung mathematischer Probleme.

Es ist bemerkenswert, dass sich eine Lernübertragung auch negativ auswirken kann. Das Lösen einer Reihe von gleichstrukturierten Aufgaben kann dazu führen, dass der einmal gefundene und „bewährte" Lösungsweg dann ohne Erfolg auf ein nur äußerlich ähnliches Problem angewandt wird. Ein durch Wiederholung eingeübtes Lösungsmuster kann zum Hindernis werden, wo ein Umdenken oder Umstrukturieren, also ein neuer Ansatz erforderlich wäre. Die Forderung nach *mathematischer Variabilität* ist damit auch im Sachrechnen von großer Bedeutung.

Ein auch für dem Mathematikunterricht in der Primarstufe unentbehrlicher Heurismus, der hier gesondert herausgehoben werden soll, beinhaltet die Aufforderung, den in der Problemaufgabe angesprochenen Sachverhalt zu *veranschaulichen*, gerade auch dann, wenn im Aufgabentext keine räumliche Situation angesprochen wird (vgl. die „Eismann-Aufgabe"). Die Untersuchung der Problemlöseprozesse bei dieser und weiteren Aufgaben legen folgende Formulierung nahe: Eine Aufgabe ist für ein Individuum (einen Schüler) in einer bestimmten Situation eine *problemhaltige* Aufgabe, wenn seine Wissensstruktur Struktur in ihrem jetzigen Zustand zur Lösung nicht ausreicht und durch Einwirken seiner heuristischen Fähigkeiten eine Verbesserung dieser Struktur gefordert ist. Mit Piaget könnte man dies so ausdrücken: Die Aufgabe kann nicht dem jetzigen kognitiven Stand des Individuums *assimiliert* werden, es bedarf der Akkomodation des Individuums an die Aufgabe. Ein Weg von der gegebenen Startsituation (aus dem Aufgabentext zu entschlüsseln) zur erwünschten und gesuchten Zielsituation ist vorerst nicht erkennbar, zwischen beidem liegt eine Barriere. Diese Problembarriere ist unterschiedlich hoch und kann als etwas Lückenhaftes, Dunkles, Widerständiges, Störendes, Fremdartiges, ja Feindliches erlebt werden, das im positiven wie negativen Sinn Spannung erzeugt. Hier kommt der hochsensitive motivationale Aspekt des Problemlösens ins Spiel: Problemlöseaktivitäten setzen Problemlösenwollen voraus, einschließlich der Bereitschaft, Denkarbeit auch dann fortzusetzen, wenn sich Erfolge nicht einstellen wollen. Die Bereitschaft dazu kann nicht einfach vorausgesetzt werden, sie ist zu fördern, und zwar nicht nur durch Ermunterung und Aufforderung, sondern durch genügend starke Herausforderungen, die differenzierbar sein und in der „Zone der nächsten Entwicklung" (Wygotzki) liegen sollen.

Eine Liste wichtiger Heurismen

Die kognitive Seite des Problemlösens ist zwar keineswegs befriedigend aufgehellt, aber man hat einige handfeste didaktische Landmarken. Zur Verbesserung der heuristischen (und damit auch indirekt der epistemischen) Struktur ist es wichtig, nicht nur Problemaufgaben hinreichender Aktivität zu berücksichtigen und über Problemlösen sensibel zu sprechen (Was ist unverständlich? Was macht die Sache schwierig? Wo steht vielleicht eine Falle? Wieso ist es zu diesem Fehler gekommen? usw.), sondern vor allem Heurismen mehr und mehr bewusst zu machen und durch häufigen Gebrauch zum geistigen Eigentum werden zu lassen. Tatsächlich können Heurismen nicht zu Routinen werden, auch nicht zu solchen zweiter Ordnung, denn Routinen (z.B. schriftliche Addition) sind ritualhaft, mechanistisch und formalistisch, das ist ja gerade ihre Stärke, während Heurismen offen, bewusst und inhaltsbezogen sind. Da aber in Such- und Kontrollprozessen immer wieder auf Routinen zurückgegriffen werden muss, werden diese nicht nur immanent geübt, sondern auch leichter verfügbar in die epistemische Struktur eingewebt. Insofern werden beim entdeckenden Lernen, für das Problemorientierung von zentraler Bedeutung ist, scheinbar paradoxerweise Routinen besonders gepflegt.

Die folgende Liste von Heurismen ist sicher unvollständig, aber alle aufgeführten Heurismen sind nachweislich wichtig. Sie werden als Aufforderungen in der Umgangssprache (nicht schon in jedem Fall in der Schülersprache) formuliert. Die Liste stellt selbstverständlich kein Abarbeitungsschema dar, vielmehr ist es prinzipiell in jeder Aufgabe immer wieder offen, welcher Heurismus eventuell weiterführen kann. Mit wachsenden Erfahrungen im Problemlösen wächst aber auch das Gespür dafür, womit man es zunächst versuchen sollte. Für die Primarstufe ist die Förderung der heuristischen Struktur einschließlich der emotionalen Einbettung deshalb von ganz besonderer Wichtigkeit, weil hier Versäumtes später möglicherweise nicht mehr oder nur teilweise nachgeholt werden kann.

1. Mache dir ein Bild von der Sache (von der in Aufgabe beschriebenen Situation). Trage in das Bild möglichst kurz und einfach das Gegebene und Gesuchte ein. Am Bild kannst du sehen, ob und wie du die Aufgabe verstehst. Vielleicht erhältst du dabei auch schon einen Hinweis auf einen Lösungsweg *(Veranschaulichung).*

2. Versuche, in der Sache eine Regelmäßigkeit, ein Muster zu erkennen. Wenn das nicht gelingt, dann versuche, die Sache anders darzustellen oder auszuschmücken oder zu vergröbern. Vielleicht wird dann ein Muster erkennbar *(Strukturierung und Umstrukturierung).*

3. Versuche, dich an eine ähnliche Aufgabe zu erinnern, eine verwandte Aufgabe, die du lösen kannst. Vielleicht hilft das weiter *(Analogiebildung).*

4. Wenn du gar nicht weiter weißt, wie du zu einer Lösung kommen kannst, dann probiere es mutig mit einer „Versuchslösung“. Erweist sie sich als falsch, dann kannst du jetzt aber vielleicht sehen, wie du zu einer besseren „Versuchslösung“ kommen kannst *(Regula-falsi-Methode).*

5. Versuche die Aufgabe in Teilaufgaben zu zerlegen. Oft sind die Teilaufgaben leichter zu lösen, oder wenigstens eine davon. Eine Teilaufgabe zu lösen, ist besser als gar nichts zu versuchen *(Modularisierung).*

6. Ändere die Aufgabe (die Frage, die gegebenen Zahlen, die sonstigen Angaben) ab, und beobachte, was sich dann auch noch ändert und was bleibt. Untersuche insbesondere extreme (Außergewöhnliche, möglicherweise abartige) Fälle *(Variations- und Extremalprinzip).*

7. Tue so, als ob du die Aufgabe schon gelöst hättest, und versuche dann, rückwärts zu arbeiten *(Analysis-Synthesis-Prozedur).*

Illustrieren Sie die Anwendung aller 7 Heurismen an der folgenden Aufgabe:

> *Petra verschlang in einer Woche ein ganzes Buch mit 133 Seiten. Montags las sie einige Seiten und von da an jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig. Wie viele Seiten las sie an den einzelnen Tagen?*

Strategien für das Lösen von mathematischen Problemen und Sachaufgaben

Es gibt verschiedene Versuche, Strategien und Hilfen für das Problemlösen in Form eines Frageschemas oder einer Handlungsanweisung zu formulieren, und zwar sowohl allgemein für das Lösen mathematischer Probleme als auch speziell in Bezug auf Sachaufgaben. Vielfach lassen sich die gemachten Vorschläge allerdings nicht direkt aus psychologischen Theorien ableiten, sondern sie beruhen mehr auf der Erfahrung aus der praktischen Arbeit mit Schülern oder auch auf dem eigenen Umgang mit mathematischen Problemen und hier insbesondere auch auf der nachträglichen Analyse der Gedankengänge, die zur Lösung geführt haben.
Letzteres kann zugleich als ein Hinweis für den Mathematikunterricht verstanden werden:

> Auch der Schüler sollte die eingeschlagenen Lösungswege reflektieren, also nach gefundener Lösung bzw. nach einzelnen Lösungsschritten das eigene Vorgehen noch einmal überdenken.

Dabei geht es nicht nur um ein rückschauendes Nachvollziehen des richtigen Lösungsweges, wozu der Schüler allenfalls beim Vergleich mit anderen Aufgaben zu motivieren ist - z.B. anhand der Rechenbäume zweier Aufgaben - es geht auch um ein Überdenken der Fehlversuche und Irrwege. Langfristig kann dies wesentlich zur Steigerung des Problemlöseverhaltens beitragen und vielleicht sogar dazu führen, dass die Schüler selbst Handlungsanweisungen für ein zweckmäßiges Vorgehen zumindest für gewisse Aufgabentypen formulieren können.

Wenn hier von Handlungsanweisungen und Aufgabentypen gesprochen wird, so liegt der Einwand nahe, dass es sich gar nicht um ein Problemlösen handele, sondern nur um Anwenden bekannter Verfahren. In der Tat versteht man unter Problemlösen vor allem das selbständige Finden von Lösungswegen und denkt dabei an Fälle, die gerade nicht in ein bekanntes Schema passen. Bedenkt man jedoch, welche Schwierigkeiten für jüngere Schüler schon mit dem richtigen Erfassen und Kombinieren der elementaren Rechenoperationen in Textaufgaben verbunden sein können und dass vielfach auch neue Lösungsverfahren anhand bestimmter Aufgabenstellungen entdeckt werden sollen, so erweist sich trotz aller notwendigen Einschränkungen die Frage nach Hilfen für die Bearbeitung mathematischer Aufgaben und insbesondere von Sachaufgaben als durchaus sinnvoll und zum hier diskutierten Zusammenhang gehörig. Es lässt sich ja kaum eine scharf abgrenzende Definition des Begriffs *Problem* angeben, und auch Überlegungen zum Transferbegriff laufen darauf hinaus, dass es zwischen Aufgaben, für deren Lösung das Wesentliche bereits erkannt ist und *Problemen*, bei denen es etwas Neues zu finden gibt, fließende Übergänge geben kann.

Bei allen Versuchen, Strategien und Hilfen für das Problemlösen anzugeben, scheint allerdings eine Schwierigkeit von der Sache her unvermeidbar zu sein: Entweder sind die Lösungshilfen von sehr allgemeiner Art und dadurch im Einzelfall oft nur schwer anwendbar oder sie sind konkret und praktikabel, erfassen dann aber nur spezielle Aufgabentypen.

Eine der wichtigsten Analysen mathematischer Problemlöseprozesse stammt von dem Mathematiker G. Polya. Auch er beruft sich ausdrücklich auf die eigenen Erfahrungen im Rahmen seiner Tätigkeit. Er betont, dass Problemlösen lernbar nur durch *Übung* ist, wobei allerdings nicht die Einübung fester Lösungsschemata gemeint ist, sondern der ständige Umgang mit mathematischen Problemen wachsenden Schwierigkeitsgrades. Aufgabe des Lehrers ist es also, die dem Schüler vorgelegten Probleme zu ordnen nach den für die Lösung erforderlichen Vorkenntnissen, nach dem begrifflichen Anspruchsniveau und nach dem Grad der Komplexität.

Bei den von Polya gegebenen Analysen heuristischen Denkens spielen die Wechselbeziehungen von Verallgemeinern, Spezialisieren und Analogisieren eine wichtige Rolle. Bezogen auf die psychologischen Erklärungsversuche für das Problemlösen erinnert die Frage nach analogen Aufgabenstellungen an den Begriff des strukturellen Transfers. Strukturelle Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Aufgabenstellungen werden bewusst aufgesucht. Auch hier könnte man als einfaches Beispiel an Rechenbäume denken:

> Kennst Du einen Rechenbaum, auf den dies Aufgabe passt?

Die Begriffe Spezialisieren und Verallgemeinern erinnern an das Umstrukturieren im gestaltpsychologischen Ansatz. Dieselbe Fragestellung wird einmal auf das Einzelproblem konzentriert und einmal in einen allgemeinen und damit zugleich neuen Zusammenhang gestellt. Oder: Was zunächst Ganzes war, wird als Teil in einem umfassenderen Ganzen gesehen. Die Bedeutung der Spezialisierung liegt vorwiegend in der Hypothesenfindung. Es sei z.B. nach der Art des Zusammenhangs zweier Größen gefragt: Man rechnet Zahlenbeispiele durch und entdeckt vielleicht die Additionsbedingung für Proportionalitäten.

Doch auch Analogiebildungen und Verallgemeinerungen können auf neue Zusammenhänge führen: Man kennt vielleicht den Satz über die Flächengleichheit von Dreiecken, die gleiche Grundseiten und gleiche Höhen haben, und man vermutet als Analogie im Raum das *Cavalierische Prinzip*:

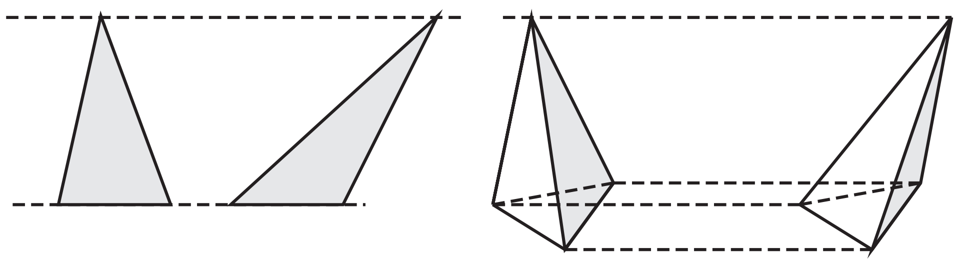


Fig. 1

Man versucht ein Quadrat zu verdoppeln und stößt auf den allgemeinen Fall, den (speziellen) Satz des Pythagoras:

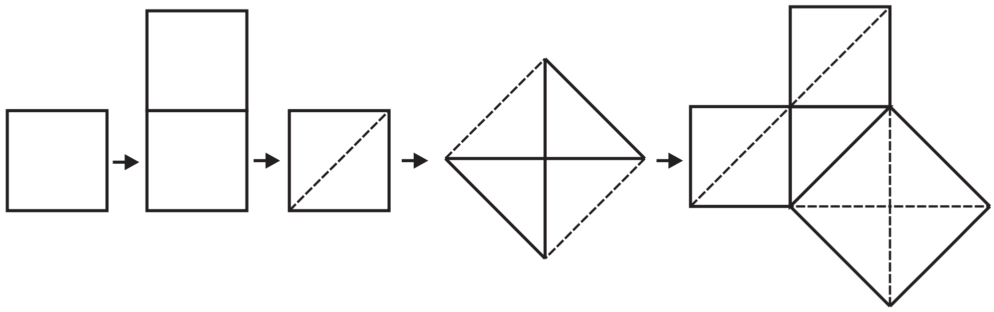


Fig. 1

In seiner Schrift „Schule des Denkens“ hat Polya versucht, praktische Hilfen für die Bearbeitung eines mathematischen Problems zu geben:

Erstens
Du musst die Aufgabe verstehen.

Zweitens
Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten. Du musst vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann. Du musst schließlich einen Plan der Lösung erhalten

Drittens
Führe Deinen Plan aus.

Viertens
Prüfe die erhaltene Lösung.

Für die Durchführung dieser Schritte versucht Polya dann vor allem durch detaillierte Fragestellungen Hilfen zu geben.

Verstehen der Aufgabe
Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?
Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder kontradiktorisch?
Zeichne eine Figur! Führe passende Bezeichnungen ein!
Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

Ausdenken eines Planes
Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methoden verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?
Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!

Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugängliche verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen?
Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den andere fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kannst Du sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

Ausführen des Plans

Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, dass er richtig ist?

Rückschau

Kannst du das Resultat *kontrollieren*? Kannst Du den Beweis kontrollieren?
Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Versucht man, solche Hinweise auf das Lösen einfacher Textaufgaben anzuwenden, so ist dies für die zunächst gegebenen allgemeineren Hinweise leicht möglich, die gestellten Einzelfragen sind jedoch kaum auf elementare Textaufgaben anwendbar.

Eine Handlungsvorschrift, die speziell auf das Lösen von Sachaufgaben zugeschnitten ist, wurde von W. Steinhöfel, K. Reichold und L. Frenzel angegeben:

Handlungsvorschrift für das Lösen von Sachaufgaben:

I. *Erfasse und analysiere die Aufgabe!*

1. Du musst die Aufgabe verstehen!
   - Lies die Aufgabe gründlich durch!
   - Gib den Inhalt der Aufgabe mit eigenen Worten wieder!
2. Erfasse die gegebenen und gesuchten Größen!
   - Schreibe die gegebenen Größen auf!
   - Schreibe auf, was gesucht ist!
3. Du musst die Beziehungen der Aufgabenstellung erfassen!
   - Lege Bezeichnungen für die gesuchte(n) Größe(n) und für Hilfsgrößen fest.
   - Fertige, wenn möglich, eine Skizze an, die wichtige Beziehungen zwischen gegebenen und gesuchten Größen sowie die Hilfsgrößen verdeutlicht!
   - Stelle einander entsprechende Größen in einer Tabelle dar!
4. Schätze das Ergebnis!

II. *Ermittle den mathematischen Ansatz!*

1. Ist zur Berechnung der gesuchten Größe eine *Formel anwendbar, gehe zu 2.!*
   Sonst gehe zu 3!

2. *Stelle die Formel auf!*
   - Überlege dabei, was die Symbole der Formel bedeuten und ob sie mit den Bezeichnungen übereinstimmen, die bei I. festgelegt wurden! Gehe zu 4.!
3. *Bestimme (eine) Gleichung(en), durch die die gesuchte(n) Größe(n) ermittelt werden kann (können)!*
   - Orientiere Dich bei der Auswahl der Rechenoperationen am Text der Aufgabe bzw. an einer aufgestellten Tabelle oder an einer Skizze!
   - Verwende für die Formulierung der Gleichung(en) die Bezeichnungen für gesuchte Größen bzw. Hilfsgrößen! (Führe unter Umständen weitere Hilfsgrößen ein!)
4. Stelle nun einen *Ansatz* für die Berechnung der Hilfsgrößen auf!
   Beginne dabei wieder bei II.1.! Gehe dann zu III.

III. *Löse die mathematischen Aufgaben!*

1. Überschlage!
2. Rechne unter Umständen die Maßeinheiten um!
3. Berechne die Hilfsgrößen!
4. Berechne die gesuchte(n) Größe(n)!

IV. *Werte das (die) Ergebnis(se) aus!*

1. *Vergleiche den Überschlag* (auch das geschätzte Ergebnis) mit dem erhaltenen *Resultat*!
2. *Überprüfe das Ergebnis am Text der Aufgabe!*
3. *Formuliere den Antwortsatz!*

Hier kann im engeren Sinne von einer Handlungsanweisung gesprochen werden, denn es werden nicht nur Fragen gestellt, um wichtige Überlegungen zur Lösung der Aufgabe anzuregen, vielmehr ergibt sich aus den Anweisungen eine Steuerung der Lösungsschritte nach Art eines Programms (Flussdiagramm, Programmablaufplan). Es handelt sich also um den Versuch, den Lösungsprozess zu algorithmisieren. Die Schwierigkeit liegt dabei jedoch wiederum in der weitgehenden Einengung auf Aufgaben eines bestimmten Typs, und zwar hier auf solche, die mit Hilfe der Anwendung von Formeln oder Gleichungen lösbar sind.

Um diese Einschränkung zu vermeiden, müsste man auf allgemeinere Fragestellungen und Anweisungen zurückgehen. Dadurch würde aber die direkte und sichere Anwendbarkeit eines solchen „Lösungsalgorithmus“ wesentlich erschwert. Eine Alternative könnte darin bestehen, dass man umgekehrt das Frageschema noch erweitert, indem man sozusagen ein „Methoden-Such-Programm“ davorschaltet. Wichtige Fragen dafür könnten z. B. lauten:

Was ist gesucht,

eine Begründung, ein Beweis,
eine Ja-Nein-Antwort,
eine Größe oder mehrere Größen?

Sind die Größen miteinander zu vergleichen?

Sind die Daten zu ordnen (bei statistischen Problemen)?

Kommen (bei endlich vielen Lösungsmöglichkeiten) Probierverfahren in Frage (Fallunterscheidungen)?

Man erkennt aber sofort, dass fast jede Ja-Antwort auf eine dieser Fragen in einen eigenen Lösungsalgorithmus nach Art des von Steinhöfel vorgelegten münden müsste, womit die Handlungsanweisung insgesamt zu einem umfangreichen Programm anschwellen würde. Ein idealer, praktikabler, allen Aufgabenstellungen und Problemsituationen gerecht werdender Algorithmus dürfte kaum zu finden sein.

Abschließend ist noch auf eine weitere Schwierigkeit aufmerksam zu machen:

Alle bisher diskutierten Vorschläge zum Problemlösen im Mathematikunterricht und speziell bei Sachaufgaben richten sich auf Textaufgaben oder setzen in der Regel ein von der Mathematik her gestelltes Problem voraus. Der Aspekt von der Erkundung eines Sachverhalts, der ebenso zur Bearbeitung eines Sachproblems gehört, wird nicht erfasst; dabei geht es meist um Planung und Steuerung von Aktivitäten ganz anderer Art:

> Ein Lexikon ist zu befragen,
> die Benutzung einer Bibliothek ist kennenzulernen,
> Material ist zusammenzustellen,
> Auskünfte von Behörden sind einzuholen,
> eine Schülerbefragung ist zu organisieren,
> der Bauplan für ein Modell ist zu entwerfen,
> die Arbeit in einer Gruppe ist zu regeln, usw.

Die große Vielfalt derartiger Aufgabenstellungen dürfte sich kaum durch übergeordnete Handlungsanweisungen erfassen und steuern lassen. Hier kann sich der Mathematikunterricht nur darum bemühen, dem Schüler im Zusammenhang mit dem Sachrechnen möglichst viele einschlägige Erfahrungen zu vermitteln. Ein hohes Maß an kooperativem Verhalten und verschiedene Formen der Gruppenarbeit sind dabei zugleich eine Voraussetzung für die Realisierung wie auch ein wesentliches Ziel des Unterrichts.

Aufgaben zur Didaktik

1. a) Skizzieren Sie zwei (inhaltlich verschiedene) typische Aufgabenstellungen des sogenannten *traditionellen* Sachrechnens und diskutieren Sie an diesen Beispielen knapp mögliche Einwände gegen das traditionelle Sachrechnen.
b) Grenzen Sie den Begriff „mathematisieren lernen“ gegen das traditionelle Sachrechnen ab und beschreiben Sie in knapper Form ein Unterrichtsbeispiel, in dem es (auch) um eine Mathematisierung geht.

2. Heinrich Winter unterscheidet drei Funktionen des Sachrechnens. Eine davon ist das *Sachrechnen als Lernstoff*. Nennen Sie die beiden anderen und geben Sie in knapper Form jeweils ein Unterrichtsbeispiel an.

3. a) Was versteht man unter dem *(arithmetischen) Mittelwert* einer Wertereihe? Geben Sie ein Beispiel an, bei dem dieser Wert viel näher beim höchsten Wert der Wertereihe als beim niedrigsten liegt.
b) Wählen Sie das Beispiel aus a) und erläutern Sie daran, was man unter dem *Zentralwert* einer Wertereihe versteht.

c) Diskutieren Sie knapp, inwieweit sich die beiden Kennwerte aus a) und b) im Grundschulunterricht behandeln lassen.

4. a) Was versteht man unter der *Mathematisierung* einer Sachsituation? Welche Stufen werden dabei nach Müller/Wittmann im Wesentlichen immer wieder durchlaufen?

b) Stellen Sie die Stufen aus a) in einer Grafik wie auf Seite 67 des Skripts dar.

c) Lösen die PISA-Aufgabe „Sparen“ (aus der Grafik im Skript Seite 65) und demonstrieren Sie dabei die Stufen aus a).

5. a) Grenzen Sie den Begriff *Projekt* von anderen Sachaufgabentypen ab.

b) Diskutieren Sie in knapper Form ein solches Projekt mit den angestrebten Schüleraktivitäten. Verwenden Sie dabei **nicht** den Bau eines Aquariums.

6. a) Manchmal werden die Schüler am Textende von Sachrechenaufgaben aufgefordert: „Schätze erst das Ergebnis, rechne dann!“
Wie ist hier wohl „Schätzen“ gemeint? Inwieweit ist diese Aufforderung hilfreich?

b) Diskutieren Sie knapp, was man unter *Schätzen* verstehen muss, wenn es sich nicht um bloßes *Raten* handeln soll.

c) Was versteht man unter dem *überschlägigen* Rechnen? Grenzen Sie den Begriff vom *Rundungsrechnen* ab!

7. a) Erläutern Sie am Beispiel einer Sachaufgabe mit zwei Bearbeitungsschritten die *Simpexdarstellung* sowohl nach Breidenbach als auch nach Bauersfeld.

b) Diskutieren Sie kurz, wofür solche Darstellungen von Nutzen sind.

8. a) Was versteht man unter dem *Rechenbaum* einer Sachaufgabe? Erläutern Sie ihn kurz an einem einfachen Beispiel, in dem zwei Operationen auftreten.

b) Diskutieren Sie kurz, wofür sich Rechenbäume eigenen (z.B. ob sie eine Hilfe bei der Umsetzung des Aufgabentextes in Rechenanweisungen sind).

c) Geben Sie eine etwas komplexere Sachaufgabe an, zu der man zwei verschiedene Rechenbäume zeichnen kann. Zeichnen Sie diese Rechenbäume mit eingetragenen Größen.

9. a) Beschreiben Sie psychologische Aspekte des Problemlösens (insbesondere nach Gagné) durch Angabe der höheren Stufen in der Hierarchie des Lernens. Erläutern Sie die Begriffe.

b) Erläutern Sie den Begriff der *Strukturierung* an zwei Beispielen.

10. Hier sind sieben *Heurismen*:

1. Mache dir ein Bild von der Sache (von der in Aufgabe beschriebenen Situation). Trage in das Bild möglichst kurz und einfach das Gegebene und Gesuchte ein. Am Bild kannst du sehen, ob und wie du die Aufgabe verstehst. Vielleicht erhältst du dabei auch schon einen Hinweis auf einen Lösungsweg *(Veranschaulichung).*

2. Versuche, in der Sache eine Regelmäßigkeit, ein Muster zu erkennen. Wenn das nicht gelingt, dann versuche, die Sache anders darzustellen oder auszuschmücken oder zu vergröbern. Vielleicht wird dann ein Muster erkennbar *(Strukturierung und Umstrukturierung).*
3. Versuche, dich an eine ähnliche Aufgabe zu erinnern, eine verwandte Aufgabe, die du lösen kannst. Vielleicht hilft das weiter *(Analogiebildung).*
4. Wenn du gar nicht weiter weißt, wie du zu einer Lösung kommen kannst, dann probiere es mutig mit einer „Versuchslösung“. Erweist sie sich als falsch, dann kannst du jetzt aber vielleicht sehen, wie du zu einer besseren „Versuchslösung“ kommen kannst *(Regula-falsi-Methode).*
5. Versuche die Aufgabe in Teilaufgaben zu zerlegen. Oft sind die Teilaufgaben leichter zu lösen, oder wenigstens eine davon. Eine Teilaufgabe zu lösen, ist besser als gar nichts zu versuchen *(Modularisierung).*
6. Ändere die Aufgabe (die Frage, die gegebenen Zahlen, die sonstigen Angaben) ab, und beobachte, was sich dann auch noch ändert und was bleibt. Untersuche insbesondere extreme (Außergewöhnliche, möglicherweise abartige) Fälle *(Variations- und Extremalprinzip).*
7. Tue so, als ob du die Aufgabe schon gelöst hättest, und versuche dann, rückwärts zu arbeiten *(Analysis-Synthesis-Prozedur).*

Illustrieren Sie die Anwendung möglichst vieler dieser Heurismen an der folgenden Aufgabe:

> *Petra verschlang in einer Woche ein ganzes Buch mit 133 Seiten. Montags las sie einige Seiten und von da an jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig. Wie viele Seiten las sie an den einzelnen Tagen?*

11. a) Welche formalen (d.h. hier allgemeinen) Hilfen kann man Schülern geben, damit sie den Inhalt einer Sachaufgabe besser erfassen?

b) Nennen Sie allgemeine Lösungshilfen, die man für die Planung des Lösungsweges und der Aufgabenkontrolle gebewn kann.

Literatur

Richtlinien Mathematik Grundschule, Köln 1985

Überarbeitung der Lehrpläne für die Grundschule in NRW: Entwurf für das Fach Mathematik, Soest 2002

Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung: Mathematik, Köln 2003

Kernlehrplan für die Hauptschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik, Düsseldorf 2004

Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen – Mathematik, Düsseldorf 2004

Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik, Düsseldorf 2004

Handreichung zum Sachrechnen in den Jahrgangsstufen 3 und 4, Verlag Auer, München 1997

Offener MU in der Grundschule: Bd. II: Geometrie und Sachrechnen, Sonderdruck Mathematik der Grundschulzeitschrift, Velber 1995

R. Arbinger: Psychologie des Problemlösens - Eine anwendungsorientierte Einführung, Darmstadt 1997

H. Besuden: Arbeitsmappe Verwendung von Arbeitsmitteln zum Thema Größen im MU der Grundschule, o.O. 1996

W. Blum: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: G. Kadunz et al (Hrsg.), Trends und Perspektiven – Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt September 1994, S. 15-38

J. Floer/D. Haarmann (Hrsg.): Mathematik für Kinder, Frankfurt/M 1982

M. Franke: Auch das ist Mathe! Vorschläge für projektorientiertes Unterrichten, Tl. 1, 2, Köln 1995/96

M. Franke: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2003

J. Krampe/R. Mittelmann/B. Kern: Schülergerechter Mathematikunterricht in den Klassen 1/2, 3/4, Donauwörth 1983

G. N. Müller/E. Ch. Wittmann: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Braunschweig 1984

G. N. Müller/E. Ch. Wittmann (Hrsg.): Mit Kindern rechnen, Frankfurt/M. 1995

H. Naudersch: Sachrechnen in der Grundschule, München 1992

G. Polya: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme, Bern 1980

G. Polya: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Bd. 2.,Basel 1983

H. Radatz/W. Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen, Hannover 1983

H. Schupp: Anwendungdorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. In: Der Mathematikunterricht, 1988, 34(6), S. 5-16

R. Strehl: Grundprobleme des Sachrechnens, Herder Freiburg 1979

H. Winter: Sachrechnen in der Grundschule, Frankfurt/M. 1992

E. Ch. Wittmann/G. N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1, Bd. 2, Stuttgart 1990/92