



Didaktik des Sachrechnens

Dieter Kindinger

Detlef Lind

Vorlesung im SS 2005

Bergische Universität Wuppertal

Inhaltsverzeichnis

1 Sachrechnen und Größen	1
1.1 Zitate aus dem Lehrplan Mathematik	1
1.2 Zum Begriff des GRÖSSENBEREICHS	18
1.3 Zum Begriff SACHRECHNEN	30
2 Sachrechnen im Unterricht	42
2.1 Funktionen des Sachrechnens	42
<i>Sachrechnen als Lernstoff</i>	42
<i>Sachrechnen als Lernprinzip</i>	55
<i>Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung</i>	61
2.2 Hilfsmittel im Sachrechnen	67
2.3 Grafische Darstellungen im Sachrechnen	88
2.4 Problemlösen im Sachrechnen	103
3 Aufgaben	123
4 Literatur	127

1 Sachrechnen und Größen

1.1 Zitate aus dem Lehrplan Mathematik

Richtlinien zur Erprobung 30.07.2003

Nachdem die Richtlinien aus dem Jahr 1985 weit über ein Jahrzehnt Bestand hatten, liegen nun neue Richtlinien¹ vor. Darin heißt es:

Aufgaben des Faches

Der Mathematikunterricht in der Grundschule

- bildet Verständnis, Sicherheit und Flexibilität im Umgang mit Zahlen und mit Rechenoperationen heraus
- entwickelt einen verständigen Umgang mit Formen, Maßen, Lagebeziehungen und mit geometrischen Grundoperationen
- erschließt in der Auseinandersetzung mit authentischen, herausfordernden Aufgaben Aspekte der Lebenswirklichkeit mathematisch
- befähigt zur Lösung mathemathaltiger Probleme
- fördert Freude an der Mathematik und eine positive Einstellung zum Mathematiklernen.

Fähigkeiten und Fertigkeiten

Der Mathematikunterricht fördert Selbstständigkeit und mathematische Mündigkeit.

Die Kinder lernen, in altersgemäßer Weise mathematisch zu argumentieren, zu kommunizieren, Probleme zu lösen und zu modellieren.

¹Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung, 1.8.2003, endgültiges In-Kraft-Treten zum 1.8.2006 vorgesehen

Sie mathematisieren Sachverhalte, stellen Überlegungen zu mathematischen Sachverhalten an, begründen Zusammenhänge nachvollziehbar, bearbeiten Aufgaben kreativ und kooperieren zur Lösung von Aufgaben.

Der Mathematikunterricht entwickelt und fördert Vorgehensweisen, die über das Fach hinaus von Bedeutung sind wie Ordnen, Verallgemeinern, Beispiele angeben, Entsprechungen aufdecken oder Gedanken auf Ähnliches übertragen (allgemeine Lernziele).

In den 1985er Richtlinien hieß es hierzu: *Die Kinder sollen lernen,*

- *kreativ zu sein:*
nach Gesetzmäßigkeiten und Mustern Ausschau halten, Vermutungen äußern, selbständig Lösungswege suchen, einen Gedanken oder eine Aufgabe variieren oder fortsetzen, einen Plan entwerfen, eine Regel vorschlagen, Beispiele zu einer Gesetzmäßigkeit finden, einen Gedanken auf etwas anderes, Verwandtes übertragen, eine Aufgabe erfinden, Muster aus Formen oder Zeichen herstellen, ...
- *zu argumentieren:*
Aussagen begründen, Behauptungen überprüfen, Begründungen verlangen, nach weiteren Informationen fragen, zwischen Vermutungen und begründeten Aussagen unterscheiden, sich an Vereinbarungen halten, Regeln konsequent anwenden, Widersprüche aufdecken, Widersprüche nicht hinnehmen, auf Gegenargumente eingehen, ...
- *zu mathematisieren:*
Daten aus der Umwelt gewinnen (zählen, messen, schätzen, befragen, nachlesen,...), sachbezogene Fragestellungen entwickeln, reale Phänomene geeignet vereinfachen, Zusammenhänge der Realität in mathematische Begriffe übersetzen, mathematische Ergebnisse und Begriffe in die Realität hineindeuten, Grenzen der Mathematisierbarkeit erkennen, ...

Damit sollten geistige Vorgehensweisen (Grundtechniken, siehe *allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht* von H. WINTER) angesprochen werden, die über den MU hinaus Bedeutung für das tägliche Leben haben: klassifizieren, anordnen und umordnen, verallgemeinern, spezifizieren, Entsprechungen aufdecken, Übertragungen versuchen, schematisieren, ökonomisch darstellen.

Über die vorstehend genannten allgemeinen Fähigkeiten hinaus erwerben die Schüler insbesondere folgende Fähigkeiten und Fertigkeiten:

- die vier Grundrechenarten sicher und flexibel ausführen und anwenden
- über geometrische Grunderfahrungen zu Fläche, Umfang, Symmetrie, Körper verfügen und geometrische Grundfertigkeiten anwenden
- Sachaufgaben in verschiedenen Darstellungsweisen erschließen und bearbeiten.

Kenntnisse

Ausbildung und Anwendung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten setzen einen stetig wachsenden und schließlich sicheren Bestand an Kenntnissen voraus,
insbesondere

- grundlegende Zahl- und Operationsvorstellungen
- sichere Beherrschung der Grundaufgaben
- Grundkenntnisse über geometrische Formen und Operationen
- sachrechnerisches Grundwissen und realistische Größenvorstellungen.

Einstellungen und Haltungen

Der Mathematikunterricht unterstützt die Schüler in ihrem individuellen Lernen:

- Selbstvertrauen in die eigenen mathematischen Kompetenzen
- Interesse und Neugier an mathematikhaltigen Phänomenen
- Motivation, Ausdauer und Konzentration im Prozess des mathematischen Arbeitens
- ein konstruktiver Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten
- Einsicht in den Nutzen des Gelernten für die Bewältigung von mathematikhaltigen Problemen und Lebenssituationen.

Lernen und Lehren

Fachspezifische Lernformen

Im Mittelpunkt steht nicht die Vermittlung von fertigem Wissen an Unwissende, sondern die Vermittlung zwischen Lernenden und Mathematik.

Zentrale Leitideen sind:

- das entdeckende Lernen
- das beziehungsreiche Üben
- das individuelle und das gemeinsame Lernen sowie
- der ausgewogene Gebrauch der verschiedenen Darstellungsformen.

Entdeckendes Lernen

Konzeption: Mathematiklernen durchgängig als konstruktiver, entdeckender Prozess

Fehler gehören zum Lernen. Sie sind häufig Konstruktionsversuche auf der Basis vernünftiger Überlegungen und liefern wertvolle Einsichten in die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler.

Der Unterricht eröffnet möglichst viele Gelegenheiten zum selbstständigen Lernen.

Lehrer als *Lernmoderator*: herausfordernde Sinnzusammenhänge anzubieten, ergiebige Aufgabenstellungen und Arbeitsmittel bereitzustellen und Formen der Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Schülerinnen und Schüler förderlich sind.

Substanzielle Aufgaben haben eine zentrale Bedeutung für guten Unterricht. Sie beinhalten differenzierte Fragestellungen auf unterschiedlichem Niveau, ermöglichen verschiedene Lösungswege und fordern vielfältige Formen des Kreativ-Seins, Mathematisierens, Begründens, Darstellens und Kooperierens.

Beziehungsreiches Üben

Üben sichert, vernetzt und vertieft vorhandenes Verständnis Wissen und Können. Es dient der Geläufigkeit und der Beweglichkeit. Deshalb sind Übungen möglichst problemorientiert, operativ oder anwendungsbezogen angelegt. Viele Inhalte erfordern einen hinreichenden Anteil an anschauungsgestützten Übungen.

Individuelles und gemeinsames Lernen

Damit alle Schüler tragfähige Grundlagen für weiteres Lernen erwerben können, geht der Mathematikunterricht von ihren unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lernmöglichkeiten aus und wird ihnen durch Lernumgebungen gerecht, die eigene Lernwege ermöglichen.

Die mündlichen und schriftlichen Eigenproduktionen der Schüler helfen, ihr Denken und Handeln zu verstehen. Sie liefern wichtige Hinweise für das Weiterlernen.

Das Lernen auf eigenen Wegen wird durch das Lernen voneinander ergänzt. In der Auseinandersetzung mit anderen lernen die Schüler:

- die eigene Sichtweise zu artikulieren
- sich über andere Lösungswege auszutauschen
- sachbezogene Rückmeldungen zu geben und zu nutzen
- über verschiedene Herangehensweisen nachzudenken und sie zu bewerten.

Darstellungsformen

Mathematische Begriffe und Operationen werden in verschiedenen Darstellungsformen repräsentiert: durch Handlungen mit Material, durch Bilder, Sprache und mathematische Symbole.

Die Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen werden insbesondere im Zahlenraum bis 100 immer wieder hergestellt, damit Begriffe und Operationen im Denken der Schüler nicht ausschließlich durch Zahl- und Rechenzeichen, sondern auch durch dynamische Vorstellungen repräsentiert werden.

Die Kommunikation im Unterricht vollzieht sich in der Umgangssprache. In ihr werden auch die meisten mathematischen Lerninhalte ausgedrückt. Die bewusste und stetige Schulung der fachgebundenen Sprache fördert das Verstehen mathematischer Sachverhalte und die wechselseitige Verständigung.

Prinzipien der Unterrichtsgestaltung

Anwendungs- und Strukturorientierung sind zentrale und eng miteinander verknüpfte Unterrichtsprinzipien. Sie verdeutlichen die Beziehungshaltigkeit der Mathematik und zeigen auf, wie diese für vernetzendes Lernen genutzt werden kann.

Anwendungsorientierung meint einerseits, dass mathematische Vorerfahrungen in lebensweltlichen Situationen aufgegriffen und weiterentwickelt werden. Andererseits werden Einsichten über die Realität mit Hilfe mathematischer Methoden neu gewonnen, erweitert oder vertieft.

Das Prinzip der Strukturorientierung unterstreicht, dass mathematische Aktivität häufig im Finden, Beschreiben und Begründen von Mustern besteht. So werden auch Vorgehensweisen wie Ordnen, Verallgemeinern, Spezifizieren oder Übertragen entwickelt und geschult.

Für die Auswahl der Inhalte, der Aufgaben und der Materialien ist eine Konzentration auf Grundideen der Arithmetik, der Geometrie und des Sachrechnens erforderlich. Diese werden, dem Spiralprinzip folgend, vom 1. Schuljahr an kontinuierlich aufgegriffen, in neue Zusammenhänge gestellt und stetig weiterentwickelt.

Mathematik ist auch Schule des Denkens. Daher werden Denkaufgaben und Denkspiele aufgenommen, die den Unterricht bereichern.

Im Mathematikunterricht lernen die Schülerinnen und Schüler auch Lernmöglichkeiten mit elektronischen Medien kennen.

Taschenrechner gehören zum Alltag. Sie ergänzen das mündliche, halbschriftliche und schriftliche Rechnen und unterstützen Prozesse des Entdeckens mit hohem numerischen Aufwand oder die Kontrolle von Rechnungen. Der verständige Gebrauch setzt sichere Kopfrechenfertigkeiten voraus und trägt dazu bei, diese weiterzuentwickeln.

Bereiche des Faches

- Arithmetik
- Geometrie
- Sachrechnen.

Den Bereichen werden Aufgabenschwerpunkte zugeordnet. In der unterrichtlichen Realität werden die Bereiche, Aufgabenschwerpunkte und Unterrichtsgegenstände aufeinander bezogen und miteinander verbunden. Die Grenzen zwischen Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen sind fließend.

Die Bereiche, die Aufgabenschwerpunkte und die Unterrichtsgegenstände sind verbindlich.

Arithmetik

Zentrale Zielsetzung im Bereich Arithmetik:

Ausbildung von Verständnis, Sicherheit und Flexibilität im Umgang mit Zahlen und mit Rechenoperationen.

Zahlenräume (20,100,1.000,1.000.000) stellen keine Beschränkung, sondern einen Orientierungsrahmen für die einzelnen Klassenstufen dar.

Im Verlauf der Grundschulzeit gewinnen die Schülerinnen und Schüler tragfähige und vielfältige Vorstellungen von Zahlen, insbesondere von

- ihrer Repräsentation in verschiedenen Darstellungsformen
- ihren Beziehungen zu anderen Zahlen (Vorgänger - Nachfolger, das Doppelte -die Hälfte,...)
- ihrem Aspektreichtum (Anzahl, Ordnungszahl, Codierungszahl, Rechenzahl, ...)
- ihren Eigenschaften (gerade - ungerade, Quadratzahl, Primzahl,...)
- ihrer Verwendung in der Lebenswelt.

Auf der Grundlage sicherer Operationsvorstellungen können die Kinder die Grundrechenarten sicher ausführen und flexibel anwenden. Die Basis

allen Rechnens bilden unmittelbar abrufbare Kenntnisse (wie die Aufgaben des Einspluseins) und schnell ausführbare Fertigkeiten (wie Ergänzen zur nächsten Stufenzahl), die auf anschauungsgestützte Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen aufbauen (schnelles Rechnen).

Auf dieser Grundlage werden verschiedene Strategien des mündlichen und halb-schriftlichen Rechnens sowie deren Zwischenformen ausführlich behandelt (Zahlenrechnen). Sie sind als eigenständige und sowohl für die Erfordernisse der Lebenswelt als auch für den weiterführenden Mathematikunterricht zentrale Rechenmethoden anzusehen. Das Durcharbeiten von Zusammenhängen (z. B. Aufgabe und Tauschaufgabe) sowie das Ausnutzen von Rechengesetzen (z. B. beim schrittweisen Rechnen) fördern die Weiterentwicklung der Kompetenzen im Zahlenrechnen.

Die schriftlichen Rechenverfahren (Ziffernrechnen) und ihre Vorformen werden soweit wie möglich zu den mündlichen und halbschriftlichen Vorgehensweisen in Beziehung gesetzt. Dies trägt zum Verständnis der Verfahren bei.

Am Ende der Grundschulzeit können alle Schüler die schriftliche Addition mit mehreren Summanden, die schriftliche Subtraktion mit einem Subtrahenden sowie die schriftliche Multiplikation mit mehrstelligen Multiplikatoren verstehen, sicher beherrschen und anwenden.

Die Vorgehensweise bei der schriftlichen Subtraktion wird freigestellt. Das Verfahren der schriftlichen Division durch einstellige und wichtige zweistellige Divisoren (z.B. 10, 12, 20, 25, 50) soll verstanden werden. Bei der Division wird generell die Restschreibweise verwendet.

Besondere Bedeutung kommt dem überschlagenden Rechnen zu. Ausgewählte Aufgaben fördern die Einsicht, dass das Ermitteln genauer Ergebnisse in manchen Problemsituationen nicht nötig, nicht möglich oder nicht sinnvoll ist.

Darüber hinaus lernen die Schülerinnen und Schüler, Rechenanforderungen mit dem hinreichenden Maß an Flexibilität zu bewältigen. Sie können

Sachrechnen

Zentrales Anliegen eines sachbezogenen Mathematikunterrichts ist die Erschließung der Lebenswirklichkeit. Das erfordert eine kontinuierliche Auseinandersetzung mit authentischen, herausfordernden Aufgaben.

Sowohl reale als auch simulierte Situationen (angeregt etwa durch einen Sachtext) können für die Schülerinnen und Schüler bedeutsam sein. Projektorientierte und fächerübergreifende Vorgehensweisen eignen sich besonders dann, wenn das Thema mathematisch substanzielle Aufgaben enthält. Die Schülerinnen und Schüler lernen, Daten zu erheben, selbst in Tabellen oder Diagrammen darzustellen und zu bewerten. Aufgaben, bei denen die Wahrscheinlichkeit einfacher Ereignisse qualitativ einzuschätzen ist, bereichern das Sachrechnen.

Darüber hinaus bearbeiten die Schülerinnen und Schüler realitätsnahe Sachaufgaben in Form von Rechengeschichten, Bildgeschichten, Tabellen und Diagrammen. Die Aufgabenstellungen können vorgegeben oder selbst gewählt sein. Sachaufgaben ermöglichen auch unterschiedliche und weiterführende Fragestellungen sowie individuelle Lösungswege.

In den Größenbereichen Länge, Geld, Zeit, Gewicht und Rauminhalt entwickelt und festigt der Unterricht realistische Größenvorstellungen und sachrechnerische Kompetenzen. Ein Grundbestand an Kenntnissen und Fertigkeiten wird durch regelmäßige Übungen im Kopfsachrechnen gesichert. Dem überschlagenden Rechnen in Alltagskontexten kommt besondere Bedeutung zu.

*Es folgen nun Auszüge aus den Stoffverteilungsplänen für die Schuljahresblöcke 1/2 und 3/4. Dabei zitieren wir beim Bereich ARITHMETIK nur die Forderungen zum Einsatz des Taschenrechners für den Schuljahresblock 3/4 an. Dort heißt es unter dem Stichwort **flexibles Rechnen**:*

den Taschenrechner als Werkzeug zum Rechnen und zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten kennen lernen, in geeigneten Situationen verwenden und über dessen sinnvollen Einsatz nachdenken.

Den Themenbereich GEOMETRIE lassen wir aus und geben abschließend die vollständige Tabelle zum Bereich SACHRECHNEN an:

Aufgaben- schwerpunkte	Unterrichtsgegenstände in den Klassen 1 und 2	Unterrichtsgegenstände in den Klassen 3 und 4
Sachzusammen- hänge	<ul style="list-style-type: none"> • Spiel- und Sachsituationen mathematisch erfassen, nachspielen und beschreiben • fächerübergreifende Problemkontexte bearbeiten: Mathematik als Mittel zur Beschreibung und zur Lösung von Sachproblemen erfahren 	<ul style="list-style-type: none"> • Fragestellungen aus gegebenen oder selbst gewählten Spiel- und Sachsituationen ableiten sowie Ergebnisse innerhalb des Sachzusammenhangs mathematisch interpretieren • projektorientierte Problemkontexte bearbeiten: Unterricht inhaltlich und methodisch mitplanen, Mathematik als Mittel zur Beschreibung und zur Lösung von Sachproblemen systematisch einsetzen, Ergebnisse sachangemessen reflektieren
Daten und Häufigkeiten	<ul style="list-style-type: none"> • Mengen von Dingen aus der Lebenswirklichkeit beschreibend vergleichen, ordnen und sortieren, einfache Tabellen bzw. Diagramme lesen und erstellen 	<ul style="list-style-type: none"> • Daten (auch stichprobenhaft) aus der Lebenswirklichkeit sammeln, den Medien oder didaktisch aufbereiteten Texten (z. B. Sachtexten) entnehmen, Tabellen und Diagramme interpretieren und erstellen, die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen qualitativ einschätzen

Sachaufgaben	<ul style="list-style-type: none"> ● Sachaufgaben als Rechengeschichten oder Bildsachaufgaben stellen, bearbeiten und lösen, aufgabenbezogene Bearbeitungshilfen (wie z. B. Skizzen) kennen lernen und Ergebnisse auf ihre Problemangemessenheit prüfen 	<ul style="list-style-type: none"> ● Sachaufgaben, auch mit mehreren Rechenschritten, in verschiedenen Darstellungsweisen (z. B. in Form von Sach- oder Gebrauchstexten) darstellen, bearbeiten, lösen und Ergebnisse auf ihre Problemangemessenheit prüfen
Größenvorstellungen	<ul style="list-style-type: none"> ● Grundvorstellungen zu Geldwerten, Zeitspannen und Längen entwickeln und ausbauen ● realistische Bezugsgrößen kennen lernen (Preise, Zeitspannen, Längen) 	<ul style="list-style-type: none"> ● Grundvorstellungen zu Gewichten und Rauminhalten entwickeln und ausbauen; Grundvorstellungen zu Geldwerten, Zeitspannen und Längen auf den erweiterten Zahlenraum übertragen ● zu jedem Größenbereich wichtige realistische Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt kennen und nutzen lernen

Umgang mit Größen	<ul style="list-style-type: none"> • mit Münzen und Banknoten umgehen (Geldbeträge darstellen, ordnen, wechseln, bezahlen, zurückgeben) • Erfahrungen mit der Zeit, mit der Uhr und mit dem Kalender sammeln (messen, schätzen, vergleichen) • Längen mit standardisierten und mit selbstgewählten Einheiten messen und schätzen • Grundeinheiten dieser Größenbereiche kennen lernen (ct, €; cm, m; Sekunde, Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat, Jahr) 	<ul style="list-style-type: none"> • Kompetenzen im Umgang mit Geldwerten, Längen und Zeit (auch Zeitpunkte und Zeitspannen) im erweiterten Zahlraum anwenden • mit Messgeräten oder passenden Hilfsmitteln messen sowie unter Zuhilfenahme von Bezugsgrößen schätzen und passende Einheiten wählen • die Grundeinheiten der fünf Größenbereiche kennen lernen und zwischen ihnen umwandeln (ct, €; mm, cm, m, km; s, min, h, Tag, Monat, Woche, Jahr; g, kg, t; ml, l) • die Kommaschreibweise bei Geldwerten, Längen, Gewichten und Rauminhalten situationsangemessen verwenden • mit einfachen Brüchen bei Größen umgehen
-------------------	--	---

Verbindliche Anforderungen

nach Klasse 2 Am Ende von Klasse 2 soll jedes Kind die Grundlagen erworben haben, die ein erfolgreiches Weiterlernen in den Klassen 3 und 4

ermöglichen. Diese Grundlagen heben auf unabdingbare Voraussetzungen für weiteres Lernen ab.

Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kenntnisse, Einstellungen und Haltungen werden in Wechselwirkung erworben. Sie sind für das Gelingen von Lernprozessen gleichermaßen von Bedeutung. Entscheidend ist, dass die Fähigkeit zu mathematischem Denken und Arbeiten im Sinne der Arbeit in der Grundschule grundgelegt wird. Dazu gehören:

- kreativ sein: Aufgaben selbst erfinden
- mathematisieren: lebensweltlichen Situationen relevante Informationen entnehmen
- begründen: einfache Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten erklären
- darstellen: eigene Überlegungen mitteilen
- kooperieren: anderen Vorgehensweisen nachspüren

Fähigkeiten und Fertigkeiten	<p>im Zahlenraum bis 100 addieren und subtrahieren die Größenordnung von Ergebnissen näherungsweise bestimmen</p> <p>verschiedene Rechenwege bei Additions- und Subtraktionsaufgaben nutzen</p> <p>zu den Kernaufgaben des kleinen Einmaleins die Ergebnisse weiterer Mal- und Geteiltaufgaben ableiten oder auf anderen Wegen errechnen</p> <p>sich unter Ausnutzung von Lagebeziehungen im Raum orientieren</p> <p>geometrische Grundfertigkeiten (legen, bauen, zeichnen) ausführen</p> <p>einfache Sachaufgaben lösen</p> <p>Tabellen und Diagrammen Daten entnehmen</p> <p>über Grundfertigkeiten beim Erheben von Daten verfügen (Messen von Längen, Darstellen von Geldbeträgen, Ablesen von Uhrzeiten)</p>
-------------------------------------	--

Kenntnisse	<p>Grundvorstellungen im Zahlenraum bis 100 besitzen über Grundvorstellungen der Addition und der Subtraktion, der Multiplikation und der Division verfügen die Aufgaben des kleinen Einspluseins automatisiert und deren Umkehrungen sicher verfügbar haben die Kernaufgaben des kleinen Einmaleins automatisiert haben elementare Lagebeziehungen kennen zentrale ebene Figuren und Körper und deren wichtigste Eigenschaften kennen Grundwissen und basale Größenvorstellungen in den Bereichen Geld, Längen und Zeit besitzen</p>
-------------------	--

Mit Blick auf das weitere Lernen fördert der Unterricht in den ersten beiden Schuljahren bei jeder Schülerin und jedem Schüler die Lernfreude und stärkt eine positive Einstellung zum Mathematiklernen. So sollen die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass

- sie mathematische Kompetenzen besitzen
- Fehler zum Lernen gehören
- die Auseinandersetzung mit Aufgaben auch lohnt, wenn der Lösungsweg nicht auf Anhieb ersichtlich ist
- es häufig verschiedene Wege zum selben Ziel gibt.

nach Klasse 4

Jedes Kind in Nordrhein-Westfalen soll am Ende von Klasse 4 tragfähige Grundlagen im Sinne einer ausgebauten Wissensbasis und verlässlicher Kompetenzen erwerben, die ein erfolgreiches Lernen in der Sekundarstufe 1 ermöglichen. Das heißt, es soll - auf dem ihm erreichbaren Niveau - die folgenden verbindlichen Anforderungen erfüllen.

Die Fähigkeit zu mathematischem Denken und Arbeiten ist in den Jahrgangsstufen 3 und 4 erweitert worden. Dazu gehören:

- kreativ sein: problemhaltige Situationen erforschen, erlernte Gesetzmäßigkeiten erkennen und anwenden, eigene Lösungswege gehen, Gedanken auf ähnliche Sachverhalte übertragen und Aufgaben selbst erfinden

- mathematisieren: lebensweltlichen Situationen relevante Informationen entnehmen, die Situationen modellieren, mit Hilfe des mathematischen Modells eine Lösung entwickeln und die Ergebnisse auf die Ausgangssituation zurückbeziehen
- begründen: Vermutungen über mathematische Sachverhalte (Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen, Ausnahmen) aufstellen und anhand von repräsentativen Beispielen oder von allgemeinen Überlegungen bestätigen oder widerlegen
- darstellen: eigene Überlegungen übersichtlich und für andere nachvollziehbar mündlich oder schriftlich ausdrücken, dabei wichtige mathematische Zeichen, Fachbegriffe und Konventionen sachgerecht verwenden
- kooperieren: gemeinsam komplexere Aufgaben bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten sowie eigene und fremde Standpunkte zueinander in Beziehung setzen.

Fähigkeiten und Fertigkeiten	<p>auf der Grundlage gedächtnismäßig verfügbarer Grundkenntnisse über Sicherheit im schnellen Rechnen – auch mit großen Zahlen – verfügen</p> <p>auf der Basis von Grundvorstellungen der vier Grundrechenarten verständig und unter Ausnutzung von Zahlbeziehungen, Rechengesetzen und Rechenvorteilen mündlich und halbschriftlich rechnen können</p> <p>die vier schriftlichen Rechenverfahren verstehen und die Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation sicher ausführen können</p> <p>problemangemessen runden bzw. schätzen und mit gerundeten bzw. geschätzten Zahlen überschlagend rechnen können</p> <p>Rechenwege aufgabenbezogen, aber auch abhängig von eigenen Präferenzen auswählen, hierbei auch den Taschenrechner reflektiert einsetzen können</p> <p>über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen</p> <p>Grundvorstellungen zu geometrischen Grundbegriffen wie Flächeninhalt, Umfang, Symmetrie, Ähnlichkeit oder Parallelität in Problemsituationen nutzen können</p> <p>geometrische Grundfertigkeiten (z. B. zeichnen, zerlegen und zusammensetzen, spiegeln) anwenden können</p> <p>passend zum Aufgabenkontext unter verschiedenen Modellen zur Erschließung von Sachzusammenhängen (z. B. Zeichnungen, Zahlensätze, Simulationen) auswählen können</p> <p>Daten aus der unmittelbaren und der durch Diagramme oder Tabellen repräsentierten Lebenswirklichkeit erheben, verarbeiten und darstellen können</p> <p>Sachaufgaben in verschiedenen Darstellungsweisen (z. B. Sachtexte, authentische Texte, Sachprobleme) erschließen und selbstständig bearbeiten können</p> <p>wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zur Lösung von Sachproblemen heranziehen können</p> <p>über sachrechnerische Grundfertigkeiten (z. B. Messen, Schätzen, Vergleichen) in den Bereichen Geld, Längen, Zeit, Gewichte und Rauminhalte verfügen</p>
-------------------------------------	--

Kenntnisse	gesicherte Vorstellungen von Zahlen und Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis zu 1.000.000 sowie vom Aufbau des Zehnersystems besitzen über gesicherte Vorstellungen der vier Grundrechenarten und ihrer Zusammenhänge verfügen die Aufgaben des kleinen Einpluseins und des kleinen Einmaleins gedächtnismäßig beherrschen über sachrechnerisches Grundwissen in den Bereichen Geld, Längen, Zeit, Gewichte und Rauminhalte verfügen grundlegende Größenvorstellungen in diesen Bereichen ausgeprägt haben
Einstellungen und Haltungen	Zutrauen in die eigenen Lernmöglichkeiten besitzen an herausfordernden Aufgaben interessiert sein Aufgaben zielgerichtet bearbeiten Fehler und Schwierigkeiten als Bestandteile des Lernprozesses akzeptieren und konstruktiv nutzen Beispiele für die Bedeutung von Mathematik für die Lösung von Problemen kennen

Da es beim Rechnen mit Größen (d. h. Maßzahlen) auch um arithmetische Aspekte geht, gelten die Ausführungen zum Taschenrechner aus dem Stoffplan ARITHMETIK auch im Bereich SACHRECHNEN. So ist der Taschenrechner durchaus im Sachrechnen einsetzbar, wenn Schüler bei einer Aufgabe mit „realen“ Zahlenangaben prinzipiell in der Lage sind, diese Aufgabe mit vereinfachtem Zahlenmaterial zu lösen.

In einem solchen Fall kann diese Aufgabe ohne Taschenrechner „überschlagsmäßig“ gelöst werden, um sie danach mit den „echten“ Angaben mit dem Taschenrechner zu lösen.

Wenn dann noch Überschlagslösungen mit den tatsächlichen Lösungen verglichen werden oder oder Schüler die Frage diskutieren, ob eine Aufgabe nicht doch ohne Taschenrechner gelöst werden soll, so dürfte ein solches Vorgehen ganz im Sinne der Richtlinien sein!

1.2 Zum Begriff des GRÖSSENBEREICHS

Die Begriffe *Längen*, *Flächeninhalte*, *Volumina*, *Gewichte (Massen)*, *Zeitspannen*, *Geldwerte* usw. bezeichnen *Größen*, deren gemeinsame Eigenschaften den Begriff *Größenbereich* konstituieren. Im folgenden werden wir diese gemeinsamen Eigenschaften untersuchen und dann definieren, was ein Größenbereich ist.

Jede Größenart ist als Eigenschaft von „Repräsentanten“ anzusehen. Dabei werden Repräsentanten entweder *direkt* mit Hilfe einer Äquivalenzrelation \sim und einer (strengen) Ordnungsrelation \prec verglichen („klassischer“ Zugang zu Größen) oder man hat ein Meßgerät, das jedem Repräsentanten eine *Maßzahl* zuordnet und vergleicht Repräsentanten nur noch mit Hilfe der Maßzahlen („alternativer“ Zugang).

Klassischer Zugang zu GRÖSSEN

Die Äquivalenzrelation \sim führt in der Menge der Repräsentanten zu einer „Faserung“ (Klassenbildung). Die gemeinsame Eigenschaft der Elemente einer solchen Klasse (präziser: die Klasse selbst) heißt **Größe** der darin enthaltenen Repräsentanten.

Zu einer Größenmessung mit Hilfe von *Maßzahlen* reicht das noch nicht aus, da so etwas wie das *Zusammenfügen* von Repräsentanten erklärt sein muss. So kann man z.B. Strecken aneinandersetzen, Massen zusammen auf eine Waagschale legen, Vorgänge nacheinander ablaufen lassen, (elementfremde) Mengen vereinigen, . . .

Beschreibt man einen solchen Repräsentantenbereich \mathcal{R} mit den Mitteln der Algebra, so muss man das Zusammenfügen eigentlich als *teilweise* Verknüpfung \sqcup auffassen. Dabei wird jedem Paar (a, b) aus einer echten Teilmenge \mathcal{T} von $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ein Repräsentant $a \sqcup b \in \mathcal{R}$ zugeordnet. In \mathcal{T} fehlen z.B. alle Paare des Typs (a, a) , da man einen Repräsentanten nur einmal beim Zusammenfügen verwenden kann und die „mehrfache Verwendung“ darin besteht, auf *äquivalente Kopien* von a zurückzugreifen.

Größenart	Re- präsentanten	\sim	\prec
Längen	Strecken (Stäbe, Kanten)	ist so lang wie, deckungsgleich, kongruent	ist kürzer als
Flächeninhalte (Areale)	Flächen	ist stückweise kongruent zu, passt genau hinein, zerlegungsgleich, ergänzungsgleich	hat weniger Fläche als
Volumina	Körper	volumengleich	hat weniger Volumen als
Gewichte (Massen)	Körper	hat dasselbe Gewicht wie (Balkenwaage)	ist leichter als
Zeitspannen	Vorgänge, Abläufe	dauert so lang wie	dauert kürzer als
Geldwerte	Mengen von Geldstücken, -scheinen	ist soviel wert wie	ist weniger wert als
Kardinalzahlen (positive endliche)	Mengen (endliche)	gleichmächtig	hat weniger Elemente als

Definition:

Eine nichtleere Menge \mathcal{R} mit einer (teilweisen) Verknüpfung \sqcup (d.h. einer Abbildung einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ nach \mathcal{R}), einer Äquivalenzrelation \sim und einer Relation \prec in \mathcal{R} heißt **Repräsentantenbereich** $(\mathcal{R}, \sqcup, \sim, \prec)$ einer Größenart genau dann, wenn gilt:

- (0) Für alle $a, b \in \mathcal{R}$ gilt: Es gibt stets $b' \in \mathcal{R}$ mit $b' \sim b$ und $(a, b') \in \mathcal{T}$.
- (1) Für alle $(a, b) \in \mathcal{T}$ gilt $(b, a) \in \mathcal{T}$ und $a \sqcup b \sim b \sqcup a$.
- (2) Für alle $a, b, c \in \mathcal{R}$ gilt: Wenn sowohl $a \sqcup (b \sqcup c)$ als auch $(a \sqcup b) \sqcup c$ definiert sind, gilt $a \sqcup (b \sqcup c) \sim (a \sqcup b) \sqcup c$.
- (3) Wie auch immer a und b aus \mathcal{R} gewählt sind, stets trifft **genau einer** der drei Fälle $a \prec b$, $a \sim b$, $b \prec a$ zu.

- (4) Zu $a, b \in \mathcal{R}$ gibt es genau dann $c \in \mathcal{R}$ mit $a \sqcup c \sim b$, wenn $a \prec b$ gilt. Außerdem folgt aus $a \sqcup b \sim a \sqcup c$ stets $b \sim c$.
- (5) Zu jedem $a \in \mathcal{R}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a_2, \dots, a_n \in \mathcal{R}$, für die $a \sqcup a_2 \sqcup \dots \sqcup a_n$ definiert ist und $a_2, \dots, a_n \sim a$ gilt.
- (6) Zu je zwei Repräsentanten $a, b \in \mathcal{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $a_2, \dots, a_n \in \mathcal{R}$ mit der Eigenschaft (5), so dass gilt: $b \prec a \sqcup a_2 \sqcup \dots \sqcup a_n$
- (7) Entweder gibt zu jedem $a \in \mathcal{R}$ zwei Repräsentanten $a_1, a_2 \in \mathcal{R}$ mit $a_1 \sim a_2$ und $a_1 \sqcup a_2 \sim a$ oder es existiert ein Repräsentant $u \in \mathcal{R}$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $a \in \mathcal{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und u_2, \dots, u_n mit der Eigenschaft (5) und $u_2 \sqcup \dots \sqcup u_n \sim a$.

Die Eigenschaften (0) bis (4) sichern die *Wohldefiniertheit*, *Kommutativität* und *Assoziativität* der Addition von Größen. Aus (3) und (4) folgt, dass die Kleinerrelation zwischen Größen eine strenge lineare Ordnungsrelation ist. Auch (5) und (6) sind für alle konkreten Repräsentantenbereiche fast selbstverständliche Erfahrungen: das Messen im Sinne des *wiederholten* Zusammenfügens von Einheitsrepräsentanten ist nur möglich, wenn man stets genügend viele solcher Repräsentanten hat und durch ihre Zusammenfügung den zu messenden Repräsentanten „übertreffen kann“.

Aus Eigenschaft (7) folgt, dass entweder jeder Repräsentant zu einem „Vielfachen“ eines Einheitsrepräsentanten u gleichwertig ist, oder aber wenigstens beliebig genau mit Hilfe von *Halben*, *Vierteln*, *Achteln*, ... eines vorgegebenen Repräsentanten gemessen werden kann.

Ein Beispiel für den ersten Fall sind die Repräsentanten von Geldwerten, wenn man als Geldwerte nur Vielfache von 1 Ct zulässt. Im Bereich „fiktiver“ Geldwerte (Beispiel: Benzinpreise) wird diese Annahme schon nicht mehr gemacht!

Geht man nun zu den Äquivalenzklassen $[a]$ bezüglich \sim über \mathcal{R} über, so kann man zeigen, dass durch

$$[a] + [b] := \begin{cases} [a \sqcup b] & \text{falls } (a, b) \in \mathcal{T} \\ [a \sqcup b'] \text{ mit } (a, b') \in \mathcal{T} \text{ und } b' \sim b & \text{falls } (a, b) \notin \mathcal{T} \end{cases}$$

eine wohldefinierte (d.h. von der Auswahl der Repräsentanten unabhängige) Verknüpfung in der Menge \mathcal{G} dieser Klassen erklärt wird.

Aus (1) und (2) folgt, dass $+$ kommutativ und assoziativ ist. Erklärt man die Relation $<$ zwischen Klassen durch $[a] < [b] \iff a \prec b$, so ist auch $<$ wohldefiniert. Man erhält so folgende Struktur:

Definition:

Eine nichtleere Menge \mathcal{G} mit einer Verknüpfung $+$ und einer Relation $<$ heißt **Größenbereich** genau dann, wenn gilt:

- (G1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in \mathcal{G}$ (Assoziativgesetz)
 (G2) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathcal{G}$ (Kommutativgesetz)
 (G3) Wie auch immer a und b aus \mathcal{G} gewählt sind, stets trifft genau einer der Fälle $a < b, a = b, b < a$ zu. (Trichotomiegesetz)
 (G4) $a + x = b$ ist lösbar mit $x \in \mathcal{G}$ genau dann, wenn $a < b$. (Lösbarkeitsbedingung)

Man kann mit sehr viel Aufwand und weiteren hier nicht interessierenden Zusatzforderungen an Repräsentantenbereiche beweisen, dass es zu jedem solchen Repräsentantenbereich $(\mathcal{R}, \sqcup, \sim, \prec)$ einer Größenart nach Auszeichnung eines **Einheitsrepräsentanten** e genau eine Abbildung f von \mathcal{R} in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (M1) Für alle $a \in \mathcal{R}$ gilt $f(a) > 0$.
 (M2) Für alle $a, b \in \mathcal{R}$ gilt $f(a \sqcup b) = f(a) + f(b)$.
 (M3) $f(e) = 1$.

Beispiele:

- Die Zahl '3' ist die gemeinsame Eigenschaft der Mengen, die zu der Menge $A = \{a, b, c\}$ der Buchstaben a, b, c gleichmächtig sind.
- Die Länge '1 Meter' ist die gemeinsame Eigenschaft aller Strecken, für die das Licht im Vakuum genau $1/299\,792\,458$ s vom Anfang bis zum Ende benötigt. Diese Definition stammt aus dem Jahr 1983. Ursprünglich war 1 Meter 1795 von der französischen Nationalversammlung als **der zehnmillionste Teil des Viertelkreises durch Paris vom Nordpol zum Erdäquator** definiert worden. Noch heute befindet sich ein Profilstab aus Platiniridium in einem Pariser Museum, der

lange Zeit ein Repräsentant für diese Länge war und daher das *Urmet* genannt wird (bei Vergleichen musste die Umgebungstemperatur 20°C betragen). Von 1960 bis 1982 war 1 Meter als das 1 650 763,73-fache einer bestimmten Wellenlänge eines *Kryptonisotops* definiert.

- Die Masse '1 kg' ist die Gemeinsame Eigenschaft aller Körper, auf einer Balkenwaage zu einem in Paris aufbewarten Zylinder aus Platiniridium (mit etwa 39 mm Durchmesser und Höhe) im Gleichgewicht zu sein. Die Masse dieses Zylinders entspricht der von **1 Liter Wasser bei 4°C Temperatur** (dies war die ursprüngliche Definition der 1795 tagenden französischen Nationalversammlung).

Der Sachverhalt der Klassenbildung soll abschließend an zwei Beispielen verdeutlicht werden:

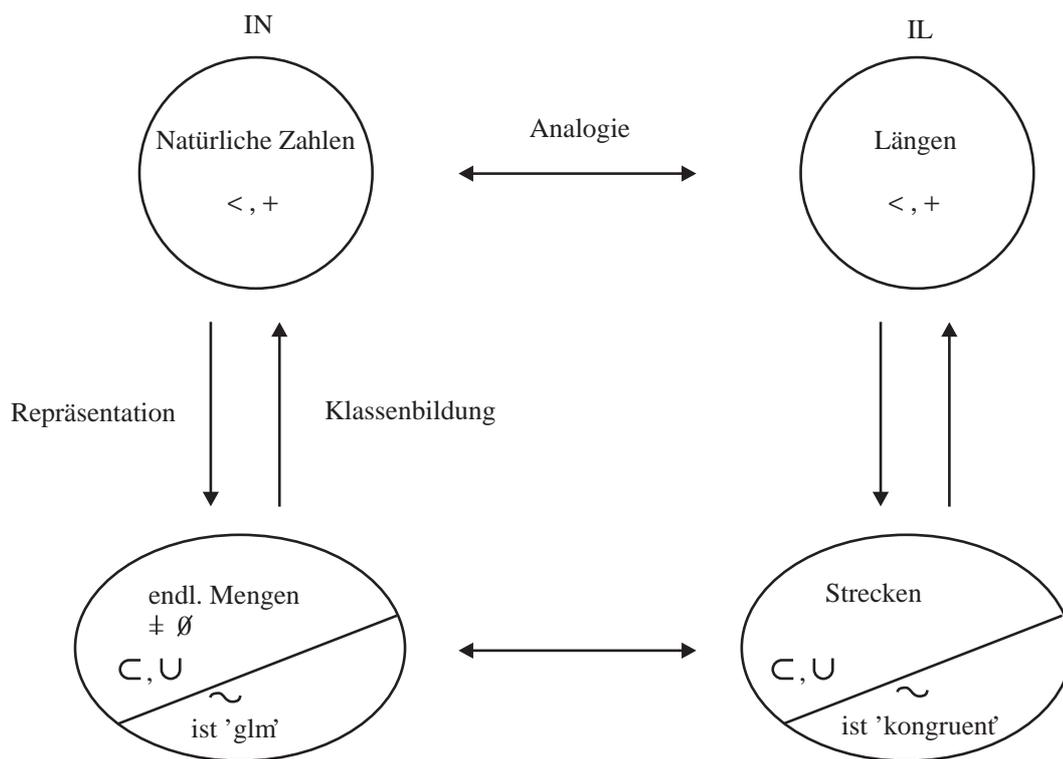


Fig. 1

Die Menge IN der natürlichen Zahlen bildet bezüglich der Addition $+$ und der Kleinerbeziehung $<$ einen Größenbereich, bei dem alle Elemente „Vielfache“ der Zahl '1' sind. In IN gibt es also ein kleinstes Element.

Die Menge IL der Längen bildet bezüglich der Längenaddition $+$ und der Kleinerbeziehung $<$ zwischen Längen ebenfalls einen Größenbereich. In diesem gibt es **kein** kleinstes Element, da man jede Länge *halbieren*, *dritteln*,

... kann. Man sagt daher, dass $(\mathbb{I}, +, <)$ ein *divisibler* Größenbereich ist. Die allgemeine Definition lautet:

Definition:

Ein Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ wird **divisibel** genannt (andere Sprechweise: er hat die **Teilbarkeitseigenschaft**) genau dann, wenn es zu jeder Größe $g \in \mathcal{G}$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Größe $b \in \mathcal{G}$ mit $\underbrace{b + \dots + b}_{n\text{-mal}} = g$ gibt.

Alternativer Zugang zu GRÖSSEN

Hier geht man von einem Repräsentantenbereich \mathcal{R} aus, der aus *Mengen* von Objekten besteht. Man verlangt, dass die Mengenvereinigung \cup und die Schnittmengenbildung \cap in \mathcal{R} Verknüpfungen sind und nennt $(\mathcal{R}, \cup, \cap)$ bezüglich einer Abbildung f von \mathcal{R} nach \mathbb{R} genau dann einen **Repräsentantenbereich** einer Größe, wenn f folgende Eigenschaften hat:

(M1') $f(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$

(M2') $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(M3') Es gibt $E \in \mathcal{G}$ mit $f(E) = 1$.

(M4') Zu $A, B \in \mathcal{R}$ gibt es stets $B' \in \mathcal{R}$ mit $f(B') = f(B)$ und $B \cap B' = \emptyset$.

Hier ist die Größe eines Repräsentanten A der Wert $f(A)$. Die Relationen \sim und \prec in \mathcal{R} lassen sich definieren in der Form

$$\begin{aligned} A \sim B & : \iff f(A) = f(B) \\ A \prec B & : \iff f(A) < f(B) \end{aligned}$$

Sieht man die Menge \mathcal{G} aller Werte zusammen mit der Addition $+$ und Kleinerbeziehung $<$ von Zahlen als Struktur an, so erhält man die gleichen Eigenschaften für $(\mathcal{G}, +, <)$ wie beim klassischen Zugang zu Größen.

Beispiele: Fasst man die Längenmessung als Ablesen auf einer vorgegebenen Skala an, so ist eigentlich eine Abbildung f von der Menge aller Strecken in die Menge \mathbb{R} vorgegeben. Äquivalenz von Strecken bedeutet dann „gleiche Ablesung“.

Der analoge Fall liegt vor, wenn man Gewichte als Werte ansieht, die eine elektronische Waage anzeigt (hier misst man wirklich das *Gewicht* und nicht die *Masse*.)

Eigenschaften der Addition und Kleinerbeziehung von GRÖSSEN

Bevor wir auf die Vervielfachung näher eingehen, sollen einige Eigenschaften der Addition und Kleinerbeziehung in Größenbereichen diskutiert werden:

Satz: (*Transitivität von $<$*)

In jedem Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ für alle $a, b, c \in \mathcal{G}$.

Beweis: $a < b \Rightarrow$ es gibt $x \in \mathcal{G}$ mit $a + x = b$,
 $b < c \Rightarrow$ es gibt $y \in \mathcal{G}$ mit $b + y = c$,
 also $c = (a + x) + y = a + (x + y)$ mit $(x + y) \in \mathcal{G}$ wegen (G1)
 und damit $a < c$ wegen (G4).

Satz: (*Monotonie*)

In jedem Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ für alle $c \in \mathcal{G}$.

Beweis: $a < b \Rightarrow$ es gibt $x \in \mathcal{G}$ mit $a + x = b$ wegen (G4),
 also $b + c = (a + x) + c = a + (x + c) = a + (c + x) = (a + c) + x$
 und damit $a + c < b + c$ wegen (G4).

Satz:

In Größenbereichen $(\mathcal{G}, +, <)$ gibt es kein größtes Element (d.h. \mathcal{G} ist stets unendlich).

Beweis: Für jedes $a \in \mathcal{G}$ ist die Gleichung $a + x = a + a$ in \mathcal{G} mit $x = a$ lösbar.
 Also gilt $a < a + a$ mit $a + a \in \mathcal{G}$ wegen (G4).

Satz:

In jedem Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt $a < a + b$ für alle $a, b \in \mathcal{G}$.

Beweis: Für alle $a, b \in \mathcal{G}$ ist die Gleichung $a + x = a + b$ in \mathcal{G} mit $x = b$ lösbar.
 Also gilt $a < a + b$ wegen (G4).

Mit der Trichotomie (G3) folgt aus diesem Satz, dass es **kein** neutrales Element für die Addition gibt, denn für $a \in \mathcal{G}$ ist $a \neq a + b$ für alle $b \in \mathcal{G}$.

Satz: (*Umkehrung der Monotonie*)

In jedem Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt: $a + c < b + c \Rightarrow a < b$ für alle $a, b, c \in \mathcal{G}$.

Beweis: Es sei $a + c < b + c$ für $a, b, c \in \mathcal{G}$.

Wegen (G4) muss entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ gelten.

$b < a$ ist wegen der Monotonie von $<$ unmöglich.

$a = b$ ist auch nicht möglich, da daraus $a + c = b + c$ folgen würde.

Also bleibt nur $a < b$.

Satz: (*Streichungsregel*)

In jedem Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt:

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b \text{ für alle } a, b, c \in \mathcal{G} \quad (\text{Regularität}).$$

Der Beweis erfolgt mit *Kontraposition*, d.h. mit Hilfe der Monotonie und der Trichotomie wird gezeigt, dass aus $a \neq b$ für alle c stets $a + c \neq b + c$ folgt.

Wir definieren in Größenbereichen die Relation \leq durch

$$a \leq b \quad :\iff \quad a = b \vee a < b.$$

Aus (G4) folgt schließlich noch:

Satz: In Größenbereichen $(\mathcal{G}, +, <)$ hat die Gleichung $a + x = b$ *höchstens* eine Lösung, d.h. zu $a, b \in \mathcal{G}$ gibt es *höchstens* ein $x \in \mathcal{G}$ mit der Eigenschaft $a + x = b$.

Beweis: Im Fall $b \leq a$ gibt es keine Lösung der Gleichung $a + x = b$.

Für $a < b$ ist die Gleichung lösbar und es gilt $a + x = a + y$

für alle Lösungen $x, y \in \mathcal{G}$.

Aus der Regularität folgt dann aber $x = y$.

Die Gleichung $a + x = b$ hat also im Fall $a < b$ **genau eine** Lösung. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit der Definition der **Subtraktion** in einem beliebigen Größenbereich:

Definition: Ist $(\mathcal{G}, +, <)$ ein Größenbereich, so sei im Fall $a < b$

$$b - a := \text{dasjenige } x \in \mathcal{G}, \text{ für welches gilt: } a + x = b.$$

Die Subtraktion ist damit als *Ergänzen* definiert. Für diese Operation gilt:

Satz: In jedem Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt:

- (1) $(a + b) - b = a$
- (2) $(a - b) + b = a$, falls $b < a$.

Beweis: (1) $(a + b) - b$ ist Lösung der Gleichung $b + x = a + b$ und aus der Kommutativität und Regularität von $+$ folgt $x = a$.

- (2) $a - b$ ist dasjenige x , für das $b + x = a$ gilt.

Aus der Kommutativität gilt also $x + b = a$
und damit $(a - b) + b = a$.

Wir fassen die Eigenschaften von $<$, \leq und $+$ zusammen:

Satz: In Größenbereichen $(\mathcal{G}, +, <)$ gilt für alle $a, b, c \in \mathcal{G}$:

- | | |
|--------------------------|---|
| Anti-Reflexivität: | $a < a$ für kein $a \in \mathcal{G}$ |
| Konnexität: | $a \leq b \vee b \leq a$ (Linearität, Vergleichbarkeit) |
| Monotonie: | $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ |
| Umkehrung der Monotonie: | $a + c < b + c \Rightarrow a < b$ |
| Antisymmetrie: | $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ |

Vervielfachung, Teilen, Messen

Wir setzen den Größenbereich $(\mathbb{N}, +, <)$ mit den Elementen m, n, \dots und einen beliebigen Größenbereich $(\mathcal{G}, +, <)$, dessen Elemente mit großen la-

teinischen Buchstaben bezeichnet werden, voraus und definieren eine *Vervielfachung*:

Definition: Für jedes $G \in \mathcal{G}$ sei

- (i) $1G := G$,
- (ii) $(n+1)G := (nG) + G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Operation $G \mapsto nG$ heißt **Vervielfachung** mit n .

Weitere Bezeichnungen sind:

nG heißt n -faches von G : gelesen als „ n mal G “

n heißt der *Vervielfacher* oder *Multiplikator*, G der *Multiplikand*.

Klammerersparnisregel: Das Vervielfachen bindet stärker als das Addieren:

$$nG + G := (nG) + G$$

Die Vervielfachung ist eine „äußere Verknüpfung“, d.h. eine Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathcal{G}$ nach \mathcal{G} .

Rechenregeln für die Vervielfachung liefern folgende Sätze:

Satz: $n(G + H) = nG + nH$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $G, H \in \mathcal{G}$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

- (i) $1(G + H) = G + H = 1G + 1H$ nach *Definition*.
- (ii) Wenn $n(G + H) = nG + nH$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} (n+1)(G+H) &= n(G+H) + (G+H) \text{ nach } \textit{Definition} \\ &= (nG + nH) + (G+H) \text{ nach } \textit{Induktionsannahme} \\ &= (nG + G) + (nH + H) \text{ wegen } \textit{Ass. und Komm.} \\ &= (n+1)G + (n+1)H \text{ nach } \textit{Definition} \end{aligned}$$

Satz: $(m+n)G = mG + nG$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{G}$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

- (i) $(m+1)G = mG + G = mG + 1G$.
- (ii) Wenn $(m+n)G = mG + nG$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} (m+(n+1))G &= ((m+n)+1)G = (m+n)G + G = (mG + nG) + G \\ &= mG + (nG + G) = mG + (n+1)G \end{aligned}$$

Satz: Für alle $G, H \in \mathcal{G}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $G < H \iff nG < nH$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Induktion nach n

(i) $G < G \Rightarrow 1G < 1H$ ist wahr nach *Definition*.

(ii) Wenn aus $G < H \Rightarrow nG < nH$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt, dann gilt auch:

$$\begin{aligned} G < H &\Rightarrow nG + G < nH + G < nH + H, \text{ d.h.} \\ G < H &\Rightarrow (n+1)G < (n+1)H \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Nach Kontraposition heißt die Behauptung

$H \leq G \Rightarrow nH \leq nG$. Im Fall $G = H$ ist sie wahr, im Fall $H < G$ ebenfalls, da man

im Fall „ \Rightarrow “ die Rolle von G und H vertauschen kann.

Satz: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und alle $G \in \mathcal{G}$ gilt $n < m \iff nG < mG$.

Beweis: „ \Rightarrow “: $n < m \Rightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n + k = m$.

Hieraus folgt $nG < mG$, da $nG + kG = (n + k)G = mG$.

„ \Leftarrow “: Die Wahrheit der Kontraposition folgt aus der ersten Beweisrichtung.

Aus diesen beiden Sätzen folgt mit Hilfe der Trichotomie unmittelbar:

Satz: (*Kürzungsregeln*)

(1) $nG = nH \Rightarrow G = H$ für alle $n \in \mathbb{N}; G, H \in \mathcal{G}$

(2) $nG = mG \Rightarrow n = m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}; G \in \mathcal{G}$

Aus (1) folgt, dass jede Gleichung $nX = G$ mit $n \in \mathbb{N}, G \in \mathcal{G}$ höchstens eine Lösung $X \in \mathcal{G}$ hat. Wenn der Größenbereich die *Teilbarkeitseigenschaft*

besitzt, existiert diese Lösung stets und ist eindeutig bestimmt. Man bezeichnet die Herstellung von X im Elementarunterricht als **Verteilen**:

Definition: $G : n :=$ dasjenige $X \in \mathcal{G}$, für das $nX = G$ ist, falls X existiert.

Sprechweise: „G verteilt an n“

Beispiele: 1 Meter : 100 = 1 Zentimeter, 1 kg : 1000 = 1 g. Aber mit $\mathcal{G} = \mathbb{IN}$ ist für $G = 7$ und $n = 3$ die „Größe“ $G : n$ nicht definiert.

Aus der Aussage (2) des Satzes folgt, dass jede Gleichung $xG = H$ mit $G, H \in \mathcal{G}$ höchstens eine Lösung x in \mathbb{IN} hat.

Hierdurch wird die folgende Definition der im Elementarunterricht so bezeichneten Operation des **Aufteilens** gerechtfertigt:

Definition: $H/G :=$ dasjenige $x \in \mathbb{IN}$, für das $xG = H$ ist, falls x existiert.

Sprechweise: „H aufgeteilt in G“

Das Aufteilen kann man auch als Bestimmung des **Verhältnisses** zweier Größen ein- und desselben Größenbereichs auffassen. Diese Sichtweise ist die Grundlage des **Messens**:

Es wird festgestellt, „wie oft eine Einheitsgröße in die zu messende Größe *‘hineingeht’*“.

Die Eigenschaften (6) und (7) von Repräsentantenbereichen garantieren, dass das Messen beliebig genau möglich ist:

Entweder gibt es in \mathcal{G} eine kleinste Größe E mit der Eigenschaft, dass alle Größen in \mathcal{G} Vielfache von E sind (d.h. sich in der Form nE mit geeignetem $n \in \mathbb{IN}$ darstellen lassen), oder aber jede Größe lässt sich *halbieren*.

Im ersten Fall wird man E als Maßeinheit wählen, im zweiten Fall erklärt man eine beliebig gewählte Größe S zur Maßeinheit und geht beim Messen einer Größe G so vor:

- (i) Falls es $n \in \mathbb{IN}$ mit $nS = G$ gibt, wird G die Maßzahl n zugeordnet und man ist fertig.
- (ii) Falls es $n \in \mathbb{IN}$ mit $nS < G < (n + 1)S$ gibt, bildet man $G_1 := G - nS$ und misst dies mit $S_1 := S : 2$.

.....

Hat ein Größenbereich die Teilbarkeitseigenschaft, so kann man an Stelle des Halbierens jede andere Unterteilung wählen, z.B. die beliebte *Dezimalteilung*.

1.3 Zum Begriff SACHRECHNEN

Begriffsklärung

Das Wort „Sachrechnen“ ist missverständlich: Zu nahe liegt die enge Auffassung, es handele sich dabei in erster Linie um ein Rechnen (mit „Sachen“), also um einen Kalkül, so etwa wie die Bruchrechnung, wo mit Bruchzahlen gerechnet wird. Der früher benutzte Begriff *bürgerliches Rechnen* hatte genau diese Bedeutung. In seiner Folge wurde die Lernorganisation entsprechend eingerichtet: Unterteilung in *Dreisatzrechnung*, *Verhältnisrechnung*, *Mischungsrechnen*, *Prozentrechnen*, *Gewinn- und Verlustrechnung*, *Zinsrechnung* usw. Dabei wurden diese Teilgebiete weiter unterteilt, jeder Teilabschnitt („Schubladen“) eigens thematisiert und die kanonischen Lösungsschritte durch umfangreiches Üben eingepreßt.

Tatsächlich ist der Aspekt des Rechnens (des Kalkülhaften) ein Aspekt des Sachrechnens, aber - nach allem, was die Erfahrung lehrt - keineswegs der wichtigste, d.h. nicht der Aspekt, der in erster Linie den intellektuellen Anspruch bestimmt, also nicht der Aspekt, mit dem die Schüler die meisten Schwierigkeiten haben. Der entscheidende Punkt (und damit auch die Hauptfehlerquelle) beim Sachrechnen ist der komplexe Prozess der mathematischen Modellbildung (*Mathematisierungsprozess*), der darin besteht, eine Sachsituation mit mathematischen Mitteln zu rekonstruieren und dabei die wechselseitigen Beziehungen zwischen Wirklichkeitsausschnitt und mathematischen Begrifflichkeiten im Auge zu haben. Komplex ist dieser Prozess deshalb, weil er nicht nur durch lokale Faktoren (Kenntnisse über den jeweils in Rede stehenden außermathematischen Sachverhalt, Verfügbarkeit über jetzt erforderliche Rechenfertigkeiten usw.) sondern auch von mehr globalen Faktoren bestimmt ist: z.B. Fähigkeit zu sinnerfassendem (adäquate Vorstellungen bildenden) Lesen, Fähigkeit zum nachdenkenden Beobachten und Fragen und vor allem der Fähigkeit zum Erfassen der in der Sachsituation obwaltenden Gesetzmäßigkeit(en).

Um solche Art allgemeiner Fähigkeiten herauszubilden, bedarf es offensichtlich anderer methodisch-didaktischer Vorkehrungen als sie etwa für

das Erlernen der schriftlichen Division oder der Multiplikation von Bruchzahlen oder irgendeines anderen Kalküls ausreichen mögen. Insbesondere können solche Fähigkeiten nicht in kurzfristigen Sequenzen erlernt werden. Man kann kurzfristig lernen (und vom Lehrer her gesehen abtesten) wie z.B. Bruchgrößen vervielfacht werden, aber man kann nicht ebenso kurzfristig lernen, wie man Textaufgaben löst, wo das Vervielfachen von Größen eine Rolle spielt; denn es muss ja zuerst einmal erfasst werden, *inwiefern* dem in der Sache obwaltenden Gesetz tatsächlich das Vervielfachen einer Größe entspricht. Und zu diesem Erfassenkönnen gibt es keinen Kalkül; es führt kein Weg daran vorbei, zuerst einmal die Sachsituation zu verstehen, d.h. ihr ein gedankliches Modell aufzuprägen.

Zu welchen „Resultaten“ ein Sachrechenunterricht führen kann, wenn die Betonung auf dem Rechnen und nicht auf dem Mathematisieren liegt, kann folgendes Beispiel zeigen. 1005 Viertklässler von Schulen des Reg.-Bezirks Arnsberg NRW erhielten in einem schriftlichen Test zum Sachrechnen (Juni 1978) u.a. die folgende Aufgabe:

- Die letzten Weihnachtsferien begannen am 23.12.77, das war der erste Ferientag. Die Weihnachtsferien endeten am 8.1.1978, das war der letzte Ferientag. Wie viele Tage dauerten die Weihnachtsferien?

Nur 21,5% der Schüler lösten die Aufgabe korrekt. Häufig wurde gerechnet $31 - 23 = 8$, $8 + 8 = 16$, also nicht beachtet, dass der 23.12. bereits ein Ferientag war. Die 23 steht doch da, also muss mit dieser Zahl gerechnet werden. Einige Schüler rechneten „einfach“ $23 - 8 = 15$. Das obwaltende Gesetz dieser Sachsituation (Kalendersituation) haben viele Schüler offenbar nicht gesehen. Man kann diese durch folgendes Bild ausdrücken (aber dann müssen die Schüler dieses Bild auch „lesen“ können):

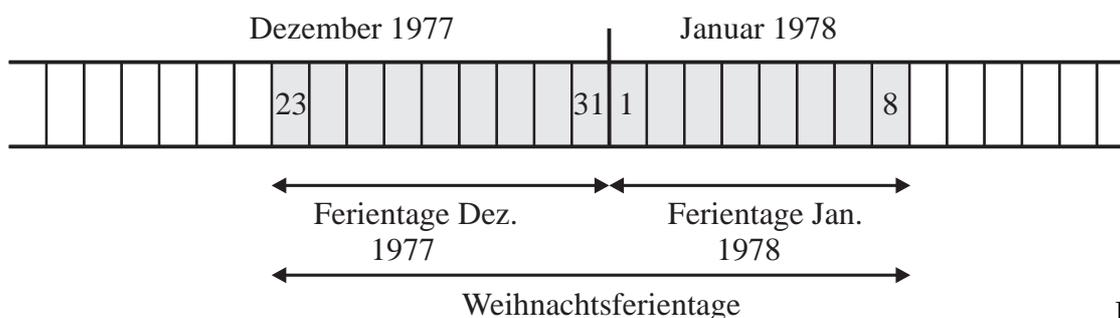


Fig. 1

In einer 7. Hauptschulklasse waren die Ergebnisse nicht wesentlich besser. Für die hier zu führende Diskussion sind zwei weitere Vorkommnisse bemerkenswert:

1. Eine schriftliche Lösung:
- $$\begin{array}{r} 23.12. \\ - \quad 8.1. \\ \hline 15.11. \end{array}$$

Antwort: Die Ferien dauerten 15 Tage und 11 Stunden.

2. Eine Lehrerin fragte zurück: „ob in dieser Aufgabe wie in der Zinsrechnung zu rechnen sei, nämlich 1 Monat = 30 Tage“.

Zur historischen Einordnung des Begriffs Sachrechnen

Wie schon gesagt, war Sachrechnen im wesentlichen *bürgerliches Rechnen*, ein Rechnen mit Maßen und Gewichten. Diese Einordnung galt bis etwa 1968. Im Bereich der Grundschule kam Sachrechnen kaum vor, die Domäne des Sachrechnens lag in der Hauptschule (Volksschule), weniger in der Realschule und fast gar nicht im Gymnasium. Der dem Sachrechnen zu Grunde liegende Sachverhalt wurde fast ausschließlich in Form von Textaufgaben vermittelt, so dass Sachrechnen und Lösen von Textaufgaben fast synonym waren.

Die Richtlinien für bayerische Volksschulen von 1955 formulieren schon fast fortschrittlich:

Der Rechenunterricht geht auf allen Altersstufen von lebensnahen, mathematisch zwingenden und zugleich kindgemäßen Rechensituationen aus, arbeitet den mathematischen Gehalt heraus, schreitet zur Erkenntnisgewinnung sowie zur Pflege angemessener Rechenfertigkeit fort.

Dabei liegt zwar wesentliches Gewicht wieder auf dem Rechnen, allerdings wird das Sachrechnen zugleich als *durchgängiges didaktisch-methodisches Prinzip* herausgestellt. Dieses Prinzip könnte man durch folgende Grafik veranschaulichen:

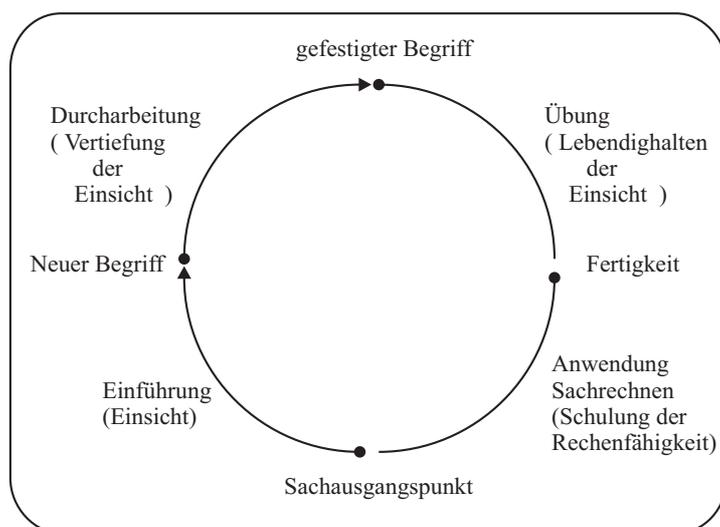


Fig. 1

Mit stärkerer Betonung des mathematischen Aspekts äußern sich die Richtlinien des Landes Nordrhein-Westfalen im Jahr 1968 zu Beginn der einsetzenden Reform des Mathematikunterrichts.

Kritische Einwände zum traditionellen Sachrechnen

Einwände gegen das traditionelle Sachrechnen und die mit ihm verbundene Konzeption eines Rechenunterrichts für Grund- und Hauptschulen lassen sich unter verschiedenen Gesichtspunkten formulieren. Sie beziehen sich sowohl auf den *fachlich mathematischen Aspekt* der behandelten Stoffe als auch auf allgemeinere *fachdidaktische* und *pädagogische Probleme* und nicht zuletzt auf die Frage der Zielsetzungen.

- In fachlicher Hinsicht wurde vor allem hervorgehoben: Es fehlte vielfach eine mathematisch befriedigende Klärung der verwendeten Begriffe und Verfahren.

Dabei denke man an die Unterscheidung zwischen Zahlen und Größen, z.B. an den Begriff *proportional* oder an Formeln und ihre Umformungen in der Prozentrechnung. Mit fehlender begrifflicher Klarheit wird aber dem Schüler die Möglichkeit zu voller Einsicht genommen, und es besteht die Gefahr, dass die gelernten Rechenverfahren nur als unverstandene Mechanismen *blind* gehandhabt werden.

- Gemeinsame Strukturen in verschiedenen Sachbereichen wurden zu wenig beachtet, eine Einordnung in allgemeinere mathematische Begriffsbildungen unterblieb vielfach ganz, und Querverbindungen zu anderen mathematischen Stoffgebieten wurden zu wenig berücksichtigt.

Mit der Klassifikation von Maßen und Gewichten als „benannten Zahlen“ wird z.B. viel weniger ausgesagt als mit der Einsicht, dass gewisse Rechengesetze charakteristisch sind für Größenbereiche und somit für alle Maße und Gewichte gelten müssen. Proportionalitäten sind spezielle Beispiele für monotone Funktionen, die übrigens bei den Sachproblemen der Wirklichkeit weitaus häufiger anzutreffen sind (z.B. Telefonrechnung) als die Proportionalitäten selbst, und monotone Funktionen wiederum sind Spezialfälle von Abbildungen usw.

Die Einwände, die sich auf die Zielsetzungen sowie auf allgemeine pädagogische und didaktische Fragen beziehen, überschneiden sich:

- Die tatsächlich auftretenden und nachweisbaren Anwendungen der im traditionellen Sachrechnen erworbenen Kenntnisse sind nur gering.

Der Begriff der *Lebensnähe*, der im Zusammenhang mit dem Sachrechnen immer wieder genannt wird, ist selbst problematisch. Wenn man einmal absieht von sehr speziellen Berufen wie z.B. bis vor einiger Zeit dem des technischen Zeichners und den wenigen Fällen, wo Schulmathematik für jedermann im Alltag auftritt - etwa der Prozentbegriff beim Rabatt -, so weiß man sehr wenig darüber, wo und in welchem Umfang mathematische Kenntnisse außerhalb der Schule überhaupt gebraucht werden. (H.W. Heymann: Sind sieben Jahre Mathematik genug?)

- Aufgaben aus der Welt der Erwachsenen wirken häufig nicht motivierend auf das Kind.

Die üblichen Aufgaben aus der Erwachsenenwelt, z.B. Fragen beim Autokauf sind für das Kind nicht akut, es handelt sich um ein *Lernen auf Vorrat*. Doch zeigt sich hier ein Dilemma: Einerseits ist es Aufgabe der Schule, das Kind auf die Welt der Erwachsenen vorzubereiten, andererseits dürfen seine gegenwärtige Situation, seine Interessen und Bedürfnisse nicht vernachlässigt werden.

- Sachaufgaben haben häufig den Charakter von Einkleidungen vorgegebener mathematischer Zusammenhänge und Verfahrensweisen und stellen sich schon deshalb so nicht im außerschulischen Bereich.

Die entscheidende Frage lautet also: Was ist früher, der jeweilige mathematische Inhalt, ein bestimmtes Rechenverfahren oder das zugehörige Sachproblem?

- Um für den Schüler mit einer mathematischen Bearbeitung zugänglich zu sein, müssen die Sachprobleme oft so vereinfacht werden, dass die *Wirklichkeit* stark verfälscht wird.

Dies gilt zum Teil gerade für Standardprobleme des Sachrechnens: Der Zusammenhang zwischen Warenmenge und Preis ist in den seltensten Fällen wirklich eine lineare Funktion, wie dies in fast allen entsprechenden Aufgaben vorausgesetzt wird, häufig gibt es ja so etwas wie einen Grundpreis (vgl. Telefon) oder eine Rabattstaffelung. Der Preis hängt also von viel mehr Faktoren ab, als dies im Rechenbuch erscheint. Oder: Grundstücke sind nur in den seltensten Fällen rechtwinklig, wie es die Flächenberechnung in der Schule haben möchte. Das gleiche trifft auch auf das üblicherweise benutzte „Klassenzimmer“ oft zu.

- Die durch Sachrechnen vermittelten Inhalte entsprechen vielfach nicht der Umwelt der Schüler und werden bei Konzentration auf den formal rechnerischen Aspekt aus ihrem Zusammenhang gerissen und nicht mehr kritisch gesehen.

Dieser Punkt ist von besonderem Gewicht. Es gibt (bzw. gab) in vielen Schulbüchern den kleinen bäuerlichen Betrieb und den mittelständigen Handwerker in einem Maße, wie es für die Lebensumstände der meisten Schüler schon lange nicht mehr charakteristisch ist, ebensowenig wie die Normalfamilie mit dem gut verdienenden Vater, zwei Kindern, einer Mutter, die den Haushalt führt, und einer märchenerzählenden Großmutter.

Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass es inzwischen viele Schulbücher gibt, deren Autoren sich bemühen, aktueller zu sein. Aber selbst wenn anhand des letzten Statistischen Jahrbuchs das Jahreseinkommen verschiedener Berufsgruppen verglichen wird, wenn Zahlen über Entwicklungshilfe oder über Mietsteigerungen genannt werden, so ist doch die entscheidende Frage, ob dann nur Unterschiede, Prozentsätze oder Durchschnittswerte berechnet werden, oder ob die Frage nach den Ursachen und Auswirkungen der berechneten Werte auch wirklich diskutiert werden.

Offensichtlich werden damit die traditionellen Grenzen des Faches Mathematik gesprengt, und die Grenzen zu anderen Fächern wie Gemeinschaftskunde, Arbeitslehre, Geographie usw. werden fließend. Man könnte dann zu einem fächerübergreifendem Unterricht kommen (aber welche Lehrer bzw. Kultusminister sind dazu in größerem Maße bereit?). Hält man dies nicht für erforderlich oder mag man es vielleicht um der Mathematik

willen nicht hinnehmen, so ist doch folgendes zu bedenken: Die Berechnung einer Differenz oder eines Prozentsatzes gehorcht mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Wird der inhaltliche Hintergrund nicht mitdiskutiert, so besteht die Gefahr, dass das Gesetzmäßige und Notwendige der Rechnung ungewollt auf die Sache selbst übertragen wird und dass der Schüler die Sachverhalte, die den Hintergrund seiner Rechnungen bilden, unkritisch hinnimmt.

Die aufgeführten Einwände gegen das traditionelle Sachrechnen enthalten natürlich auch einen positiven Aspekt: Gelingt es nämlich, sie im Unterricht zu berücksichtigen, so kann sich das Sachrechnen gerade dadurch als überaus fruchtbar erweisen.

Denkerziehung als Alternative zum traditionellen Sachrechnen?

Allgemeine Ziele des Schulfaches Mathematik lassen sich folgendermaßen formulieren:

1. Der Mathematikunterricht vermittelt die Kulturtechnik Rechnen. Er hilft dem Schüler, seine Umwelt zu erschließen, und dient der Vorbereitung auf den außerschulischen Alltag und Beruf.
2. Der Mathematikunterricht leistet Denkerziehung, Schulung von logischem Denken, strukturellem Denken usw.
3. Der Mathematikunterricht führt den Schüler heran an Mathematik als *Kulturgut*. Ohne Mathematik wäre unsere naturwissenschaftlich-technische Zivilisation nicht denkbar, und die Entwicklung der Mathematik ist untrennbar mit der europäischen Geistesgeschichte verbunden.
4. Der Mathematikunterricht öffnet - für eine kleine Anzahl von Schülern - den Zugang zur Mathematik als Wissenschaft.
5. Schließlich muss Mathematik auch als Spiel und Kunst gesehen werden. Die Entwicklung spezieller intellektueller Fähigkeiten gehört ebenso zur Entfaltung der Persönlichkeit wie die Entwicklung von musischen und künstlerischen Fähigkeiten.

Unter den genannten Aspekten des Mathematikunterrichts kommt den beiden ersten wohl das größte Gewicht zu, und viele Versuche, allgemeine

Lernziele für das Fach Mathematik zu formulieren, führen im wesentlichen diese beiden Gesichtspunkte weiter aus. So nennt H. Winter als Ziele des Mathematikunterrichts drei *allgemeine Haltungen und Fähigkeiten*, nämlich

- zu argumentieren,
- sich kreativ zu verhalten und
- Umweltsituationen zu mathematisieren,

und fünf *geistige Grundtechniken*, nämlich:

- Klassifizieren,
- Ordnen,
- Generalisieren,
- Analogisieren und
- Formalisieren.

Folgt man diesen Zielen, so könnte man mit der Denkerziehung im Mathematikunterricht den Gegenpol zu einem pragmatischen Hinarbeiten auf anwendbares Wissen, also zu traditionellem Sachrechnen im weitesten Sinne, sehen. Die entscheidende Frage ist, ob Sachrechnen als anwendbares Wissen und Denkerziehung im Mathematikunterricht nebeneinanderstehen, wobei im Laufe der Entwicklung des Mathematikunterrichts die Gewichte durchaus unterschiedlich gesetzt wurden, oder ob eine Synthese oder Integration beider Aspekte möglich ist.

Die in den sechziger Jahren einsetzenden Reformbestrebungen, die in den Beschlüssen der KMK vom 3. Okt. 1968 ihren Niederschlag fanden, führten zur stärkeren Akzentuierung der mathematisch formalen Seite. Dabei ist zu beachten, dass die Reform nicht zuletzt dadurch angeregt wurde, dass man der Schule von außen her, d.h. von der Wirtschaft, den Industrie- und Handelskammern und anderen berufsbildenden Institutionen, ein Versagen ihres Rechenunterrichts vorwarf. Allerdings waren diese Vorwürfe nicht neu, ebensolche Klagen gab es bereits in den zwanziger Jahren und gibt es heute noch fast in jedem Jahr in Pressemitteilungen der o.g. Verbände.

Durchaus im Einklang mit den im letzten Abschnitt formulierten kritischen Einwänden gegen das traditionelle Sachrechnen sah man einerseits die Ursachen in einer nicht ausreichenden mathematischen Fundierung des Rechenunterrichts und dadurch mangelnder Einsicht des Schülers in die erlernten Rechenverfahren und betonte andererseits als Ziel des Mathematikunterrichts Aspekte wie kontinuierliche Lernfähigkeit, Flexibilität des Denkens, logisches Denken und Strukturerofassung im Gegensatz zur Rechenfertigkeit und speziell anwendbaren Kenntnissen.

In der Tat kann man in der Förderung solcher Fähigkeiten wie Analysieren, Abstrahieren, Ordnen, Schlussfolgern, Verallgemeinern und systematisch Fallunterscheidungen treffen eine heutigen Lebensumständen angemessene Form der Lebensnähe im Mathematikunterricht und somit eine Alternative zum traditionellen Sachrechnen sehen. Statt wie früher von den *Rechenfällen des täglichen Lebens* sprechen die Empfehlungen der KMK von den Anforderungen der *modernen, rationalisierten Welt*. Auch hier liegt also der Bezugspunkt, an dem der Mathematikunterricht zu orientieren ist, außerhalb der Schule, und die problematische Frage nach dem, was der Mathematikunterricht für die Bewährung des Schülers im außerschulischen Bereich leisten kann, bleibt weiterhin offen. Denn ebenso wie die tatsächliche Anwendbarkeit der im Sachrechnen erworbenen Kenntnisse kaum belegbar ist, so wissen wir auch nur wenig darüber, ob und wie sich eine im Bereich der Mathematik als solcher geleistete Denkerziehung auch wirklich überträgt auf andere Problemstellungen. Der Schüler lernt etwa, ein und dieselbe mathematische Struktur in verschiedenen mathematischen Spielen zu erkennen. Ob aber damit so etwas wie ein strukturerofassendes Denken schlechthin aufgebaut wird, und wie dies außerhalb der Schule zu Tragen kommt, ist ungewiss. Damit ist ein zentrales Problem des Lernens und speziell des Lernens von Mathematik angesprochen, das sogenannte *Transferproblem*.

Umwelterschließung und mathematisches Denken im Sachrechnen - Thesen zu den positiven Aspekten und Möglichkeiten

Die Überlegungen zum traditionellen Sachrechnen und den damit verbundenen Zielsetzungen und die Transferproblematik in einem an formaler mathematischer Bildung orientiertem Mathematikunterricht zeigen, dass keine dieser beiden Möglichkeiten, weder anwendbares Wissen noch Den-

kerziehung, für sich allein Ziel und Inhalt des Mathematikunterrichts sein kann, dass sie aber auch nicht unvermittelt nebeneinanderstehen sollten. Vielmehr ist nach einer Synthese zu fragen, nämlich nach der Möglichkeit mathematisch-struktureller Betrachtungsweisen bei Sachproblemen. Der Hinweis auf gemeinsame Elemente oder gemeinsame Strukturen in verschiedenen Problemsituationen als Voraussetzung von Transfer gibt einen Anhaltspunkt dafür, dass solch eine Synthese möglich ist, und wie sie gewissermaßen von zwei Seiten her aufgebaut werden kann:

Beim Erarbeiten rein mathematischer Begriffe und Strukturen sollten nicht nur dafür konstruierte mathematische Spiele, strukturierte Lernmaterialien und dergleichen eingesetzt werden, sondern soweit irgend möglich, sollte man stets auch Beispiele und Modelle aus der Umwelt des Kindes heranziehen. Dann nämlich sind eher die Voraussetzungen für einen Transfer des Gelernten gegeben.

Ein elementares Beispiel: Symmetrieachsen lassen sich nicht nur bei den abstrakten Figuren der Geometrie wie Dreieck, Rechteck oder Raute beobachten, sondern auch bei Möbelstücken, Fahrzeugen und vielem mehr. Dabei sind auch die oben genannten Figuren für die Kinder nicht wirklich abstrakt, sondern werden von diesen als durch das Bild real verkörpert angesehen. Was hindert uns dann, von realen Gegenständen in der Umwelt der Kinder auszugehen?

H. WINTER und P. BENDER haben auf solche Beispiele und die mit ihnen gegebene Möglichkeit einer Erschließung der Umwelt durch Mathematik hingewiesen:

Beim Umgang mit Sachproblemen und dem Stoff des traditionellen Sachrechnens muss stärker als bisher auf die zugrundeliegenden Strukturen und Begriffe hingearbeitet werden. Dabei geht es jedoch nicht nur um bessere Einsicht in die benutzten rechnerischen Verfahrensweisen - ein solches Postulat war ja in den Äußerungen der älteren Volksschulrichtlinien zum Sachrechnen immer schon enthalten - sondern es geht durchaus um die Entwicklung und Schulung mathematischen Denkens.

Bei einem konsequenten derartigen Vorgehen wirkt sich das Transferproblem weniger aus; denn logisches Denken, Strukturereffassen usw. werden von denjenigen Inhalten her aufgebaut, auf die sie angewendet werden sollen. Man muss dabei jedoch in Kauf nehmen, dass die zu diskutierenden Begriffe und Strukturen unter Umständen andere sind als diejenigen, die

von der Mathematik als Wissenschaft her als besonders einfach und grundlegend erscheinen. Es ist in dieser Sichtweise fast zwingend, dass inzwischen bei der Diskussion um die Zielsetzungen des Mathematikunterrichts nicht mehr nur einerseits mathematisches Denken und andererseits Anwenden von Mathematik einander gegenübergestellt werden, sondern dass der Begriff der *Mathematisierung von Umweltsituationen* mehr und mehr in den Vordergrund tritt.

Die Überlegungen zu einer möglichen Synthese von Sachrechnen und Denkerziehung durch Mathematik machen es erforderlich, den Begriff *Sachrechnen* neu und weiter zu fassen als bisher und ihn nicht nur durch eine Aufzählung der traditionell dazugehörigen und eventuell neuer Stoffgebiete zu erklären. Insbesondere ist das Sachrechnen aus der Verengung auf das bürgerliche Rechnen zu lösen. Eine mögliche Begriffsbestimmung könnte folgendermaßen lauten:

Sachrechnen ist Anwendung von Mathematik auf vorgegebene Sachprobleme und Mathematisierung konkreter Erfahrungen und Sachzusammenhänge vorwiegend unter numerischem Aspekt.

Dieser Definitionsversuch ist notwendigerweise recht allgemein und bedarf einiger zusätzlicher Anmerkungen und Abgrenzungen: Zunächst dürfte deutlich sein, dass unter Sachrechnen nicht allein die traditionellen Stoffgebiete des Volksschulsachrechnens zu verstehen sind, sondern diese sind im Sinn eines neuen Sachrechnens aufzuarbeiten und eventuell anders zu gewichten. Außerdem gibt es wichtige Bereiche, die ebenfalls zum Sachrechnen gehören. Hier sind insbesondere Anwendungen von Gleichungen und Ungleichungen sowie die beschreibende Statistik zu nennen, deren Anfangsgründe durchaus in der Grundschule behandelt werden können. Hier gibt es bereits Vorschläge. Unter Sachrechnen im Sinne der gegebenen Beschreibung ist vor allem auch ein neuer Zugang zum Unterrichten von Mathematik zu sehen.

Die Offenheit des Begriffs Sachrechnen gilt erst recht in Bezug auf die angesprochenen Mathematisierungsprozesse, die ja - wenn sie wirklich vom Schüler geleistet werden - zum fruchtbarsten, aber vielleicht auch schwierigsten Arbeiten innerhalb des Mathematikunterrichts führen und die auch in Materialien für Lehrer nur skizzenhaft beschrieben werden können. Sie sind ja auch nicht ein für allemal planbar, sondern müssen sich in kleinen

und größeren Unterrichtsprojekten immer wieder neu aus der konkreten Situation der Klasse ergeben.

Nun könnte man den beiden Begriffen der *Anwendung von Mathematik* und der *Mathematisierung* vielleicht allen Mathematikunterricht schlechthin unterordnen. Dem steht die Einschränkung auf den numerischen - vielleicht sollte man sogar enger sagen: *arithmetischen* - Aspekt eines Problems entgegen. So nimmt z.B. die beschreibende Statistik im neuen Sachrechnen eine zentrale Stellung ein, während eher theoretische Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zum Sachrechnen zu zählen sind.

Im folgenden sollen nun den Einwänden gegen das traditionelle Sachrechnen positive Gesichtspunkte und Möglichkeiten gegenübergestellt werden. Sie sind nicht allein schon durch eine andere und verbesserte Stoffauswahl gewährleistet, sondern es sind zugleich Ziele, die auch die Art und Weise betreffen, wie Mathematik unterrichtet wird, und die vielleicht auch nicht immer einfach zu realisieren sind.

1. Die im Sachrechnen auftretenden mathematischen Begriffe und Strukturen sind mathematisch relevant und stehen in engen Wechselbeziehungen nicht nur untereinander, sondern auch zu vielen anderen, scheinbar rein mathematischen Begriffen, die in der Schule thematisiert werden.
2. Das Sachrechnen zwingt zu einer Auseinandersetzung mit der Umgangssprache. Die Aufgabe heißt insbesondere: Erkennen mathematischer Operationen oder Zusammenhänge und ihrer logischen Abfolge und Verkettung in einem durch Text vermittelten Sachverhalt.
3. Beim Sachrechnen kann das Problemlösen im Vordergrund stehen im Gegensatz zu einer gewissen Überbetonung des Begriffslernens.
4. Sachrechnen bietet Möglichkeiten zu fächerübergreifenden Unterrichtsprojekten; besonders zu Fächern wie Gemeinschaftskunde oder Arbeitslehre hin sind vielfältige Querverbindungen zu beachten. Vor allem dadurch kann einer „Blindheit gegenüber Inhalten“ begegnet werden.

2 Sachrechnen im Unterricht

2.1 Funktionen des Sachrechnens

Nach dem Versuch der Begriffsklärung „Sachrechnen“, der im letzten Kapitel im wesentlichen von der historischen Entwicklung ausging, soll nun eine Begriffsbestimmung angegeben werden, die aus einer Beschreibung der didaktischen Funktionen des Sachrechnens hervorgeht.

Man kann die drei folgenden - allerdings nicht streng voneinander trennbaren - didaktischen Sinngebungen unterscheiden (vgl. H. WINTER: Sachrechnen in der Grundschule):

- Sachrechnen als Lernstoff
- Sachrechnen als Lernprinzip
- Sachrechnen als Lernziel: Befähigung zur Erschließung der Umwelt

Sachrechnen als Lernstoff

Bei der Funktion *Sachrechnen als Lernstoff* geht es darum, Wissen über Größen und Fertigkeiten im Umgang mit Größen aufzubauen. Diese Bemühungen machen nur dann Sinn, wenn sie eingebettet werden in die Zielvorstellung, sachrechnerische Fähigkeiten im Rahmen eines Beitrags zur Denkentwicklung der Schüler und zur Erschließung ihrer Umwelt anzustreben.

Es gibt einen allgemeinen Konsens darüber, daß der sachrechnerische Stoff in jedem Fall die „bürgerlichen Größen“ Stückzahlen, Geldbeträge, Längen, Zeitspannen, Gewichte, Temperaturen (dies sind eigentlich **keine** Größen im Sinne der Definition aus 1.2) und (einführend) Flächen- und Rauminhalte umfassen soll. Das ist seit langem kanonischer Inhalt in der Grundschule. In neuerer Zeit dringen elementare Verfahren und Begriffe der Statistik in die Grundschule (siehe Richtlinien von 1985). Diese sollen die Inhalte des

„bürgerlichen Rechnens“ nicht ersetzen sondern ergänzen. Dies geschieht vor allem im Hinblick auf die sich wandelnde Umwelt, in der die Kinder leben.

Im Vordergrund der Größenlehre und Statistik stehen

- Zählen, Messen, Schätzen als Methoden zum *Gewinnen von Daten* (als Meßwerte und Größen)
- Kennenlernen der Maßsysteme und Verankern von Stützpunktwissen über Größen
- Modellieren, Zeichnen, Symbolisieren als Methoden des *Darstellens von Daten* (hierher gehört auch die „Sortenumwandlung“)
- Sortieren, Anordnen von Daten, Rechnen mit Größen (auch Mittelwerte bestimmen) als Formen der *Verarbeitung von Daten*.

Zählen ist die erste und fundamentale mathematische Auseinandersetzung des Kindes mit der Welt. *Zählaufgaben* im Schulanfang gibt es in vielfältiger Art:

- Sind mehr Mädchen als Jungen in der Klasse?
- In welcher Straße wohnen die meisten Kinder?
- Wie viele Kinder kommen mit dem Bus?
- Welches ist das Lieblingsgetränk der Kinder?

Das praktische Zählen muß auch in den weiteren Schuljahren immer wieder geübt werden:

- Wie viele Schultage hat das Schuljahr/Kalenderjahr? Warum gibt es einen Unterschied?
- Wie viele Körner sind in einer Weizenähre?
- Wie viele Ziegel liegen auf dem Dach?
- Wie viele Nägel sind in einer Tüte?

Von besonderem Interesse sind *strukturiertes Zählen*, *indirektes Zählen* (über Hilfsmaßnahmen) und *Auszählen* von Möglichkeiten (also von nicht vorhandenen realen Dingen). Beim strukturierten Zählen werden Gesetzmäßigkeiten oder Muster der Situation genutzt, z.B. beim Auszählen

der Fenster eines Hochhauses beachtet man die Gliederung der Stockwerke (vgl. auch „Grasersches Bauernfenster“). Beim Auszählen von Geldbeträgen nutzt man die Sorteneinteilung der Münzen/Scheine. Indirektes Zählen ist erforderlich, wenn man an die Gegenstände gar nicht oder nur mühsam herankommt oder wenn es sehr viele Gegenstände sind und evtl. ein Schätzwert genügt (Stichprobenverfahren, Beispiel „Erbsen in der Konservendose“).

Wie viele Telefonanschlüsse gibt es in Wuppertal? (Diskussion)

Das Auszählen von Möglichkeiten wird vermutlich in der Schule am wenigsten praktiziert, dabei ist es von besonderem Vorteil für das Verstehen von Wirklichkeit („Simulation“).

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Eis mit 3 Bällchen auszuwählen, wenn 4 Sorten zur Verfügung stehen?

Vorschnelles Rechnen führt wohl zu falschen Ergebnissen, es ist ad hoc eine Zählstrategie aus der Situation zu entwickeln:

Es gibt die Sorten Erdbeere E, Himbeere H, Schokolade S und Zitrone Z. Ein Dreier-Eis kann dann z.B. sein EES, EHZ, SSS oder ...

Alle Möglichkeiten findet man durch planvolles Vorgehen, z.B.

EEE	EEH	EHH	HHH	HHS	HSS	SSS	SSZ	ZZZ
	EES	EHS		HHZ	HSZ		SZZ	
	EEZ	EHZ			HZZ			
		ESS						
		ESZ						
		EZZ						

$$10 \quad + \quad 6 \quad + \quad 3 \quad + \quad 1 = 20$$

Ein weiterer Abzählplan geht von der Idee aus, daß es genau drei Arten von Möglichkeiten gibt: 1 Sorte Eis, 2 Sorten Eis, 3 Sorten Eis. Diese Klasseneinteilung ist ein Beispiel für einen Heurismus der Modularität: *Teile eine Aufgabe nach Möglichkeit in Teilaufgaben auf.* Die folgende Veranschaulichung des Abzählplans übersetzt diesen nicht nur in eine geometrische Darstellung, sondern ist eine analoge Übersetzung des kombinatorischen

Wieviel mal ist die Kopfgröße in der Körpergröße enthalten?

Andere Größen sollen ebenfalls von den Kindern „erfahren“ werden:

Zeitspannen z.B. durch lautes Zählen, durch Zählen der Pulsschläge, von Atemzügen.

Gewichte durch Heben und vergleichendes „Hebeln“ von Gegenständen mit den Armen.

Geldbeträge durch Verkaufsspiele mit Rechengeld.

Flächeninhalte durch Ermitteln der Größe des benötigten Hemdenstoffs (Papierhemd anfertigen!) oder durch Ausmessen von Flächen mit der Handfläche.

Rauminhalte durch Ermitteln des täglichen Ess- und Trinkvolumens: „Wie viele Liter trinke ich?“

Welche Vorstellung haben Sie (die Studierenden und LeserInnen) von großen Zahlen, von z.B. großen Größen? Können Sie sich einen Kubikkilometer vorstellen? Gibt es von Menschen geschaffene „Objekte“, die diesen Rauminhalt haben? Lesen Sie das Gedicht von Erich Kästner: *Ein Kubikkilometer genügt!* (Ich hoffe Sie finden es!) Um wieviel höher steht das Wasser in einem kleinen Teich, wenn bei einem Gewitter 10 Liter/m² Regen fallen?

Mit dem Messen lernen die Kinder gleichzeitig passende Messgeräte kennen und handhaben. Das können selbst angefertigte Geräte oder offizielle sein. Dabei muss herauskommen, dass Messen immer ein multiplikatives Vergleichen von zwei Größen derselben Art ist, wobei eine davon als Bezugsgröße, als *Einheit*, gewählt wird. So ist die Aussage „Länge des Schulhofes = 50 mal die Länge eines Schrittes von Heidi“ ebenso die Mitteilung eines Messresultats wie „Länge des Schulhofes = 40m“. Allerdings ist es nicht sinnvoll, in der Schule das Messen gemäß der geschichtlichen Genese zu entwickeln: die Kinder bringen schon wesentliche Erfahrungen zu den Grundeinheiten der Größenbereiche mit. Allerdings wird in vielen Schulbüchern eine entsprechende Unterrichtsreihe immer noch vorgeschlagen:

Beispiel Längenmessen: Messen mit Körpermaßen (Elle, Daumen, Fuß,...) dann erst offizielle Maßeinheiten: m, cm. Häufig wird noch der Übergang zu

den offiziellen Einheiten damit begründet, dass das Messen mit den „alten“ Einheiten (zu) *ungenau* sei.

Will man an die Vorerfahrungen der Kinder anknüpfen, so ist der umgekehrte Weg sinnvoll: das Messen mit Körpermaßen wird dann erst nach der Klärung von Ablesungen an Messgeräten behandelt (z.B. unter dem Stichwort: „wie kann man sich helfen, wenn man kein Messgerät zur Verfügung hat?“). Verzichten darf man auf das Messen durch wiederholtes Abtragen keinesfalls, das es als Erfahrung für das mentale Operieren beim *Schätzen* wichtig ist.

Beim praktischen Messen sollen die Kinder auch erfahren, dass die Bezugsgröße, die Vergleichseinheit passend zu wählen ist. Es ist nicht sinnvoll, den Durchmesser einer Münze in km und die Entfernung zweier Städte in cm zu messen und den Kindern muss auch klar werden, warum das so ist: Gemessene Größe und Bezugsgröße sollen in einem möglichst übersichtlichen Verhältnis zueinander stehen, zu große Zahlen führen zu Problemen bei der Vorstellung. Damit hängt auch die Frage der wünschenswerten und möglichen Messgenauigkeit zusammen. Wie genau soll man, wie genau kann man messen? Wenn die Körperlänge gemessen wird, so reicht im Allgemeinen Zentimetergenauigkeit (warum?). Wenn das Kind 1,37 m groß ist, kann man keinesfalls schließen, dass es 1370 mm groß ist, dies ist eine ganz andere Messmitteilung. Daraus folgt, dass man Messergebnisse nicht naiv in kleinere (oder größere) Sorten umwandeln kann.

Eine besondere Rolle spielen Geldwerte. Hier ist die Erfahrung unbedingt notwendig, dass der Geldwert eines Objektes nicht so gemessen werden kann wie etwa das Gewicht oder der Rauminhalt. Vielmehr wird der Geldwert einer Ware oder Dienstleistung unter Menschen vereinbart oder ausgehandelt.

Geldwerte eines Objektes können in der Zeit erheblich schwanken (gibt es *einen* Gegenstand mehrfach, Qualität, Nachfolgemodell). Geldwerte spielen im Sachrechnen zu Recht eine überragende Rolle, aber in welchem Schulbuch bzw. Unterricht wird dem Gedanken der gesellschaftlichen Bestimmtheit Rechnung getragen? Es gibt viele Aufgaben über das Fallen und Steigen von Löhnen und Preisen, aber es wird nicht bewusst gemacht, dass dies Menschenwerk ist. Im Gegensatz dazu liegen Gewichte, Längen usw. in der Natur fest.

Wie beim Zählen gibt es auch beim Messen indirekte Methoden.

Zeitspannen - Zeiträume sind von allen Größen am schwersten zu erfassen! - messen wir über die Anzahl regelmäßig wiederkehrender Ereignisse (bei Pendelschläge ist dies klar, wie ist jedoch die Sonnen- bzw. Sanduhr einzuordnen?).

Die Länge von Strecken wird häufig über die Zeitspanne gemessen, die man (bei fester Geschwindigkeit) benötigt, um die Strecke zurückzulegen: „Ich wohne 5 min von der Uni entfernt.“

Der Messbecher ersetzt in der Küche das aufwendige Wiegen.

Oft reichen Messinstrumente nicht aus:

Wie dick ist eine Postkarte?

Lege (am Postschalter) 50 Stück übereinander und miss die Dicke dieses Stapels.

Wie viele (normale DIN A4) Blätter darf man in einem Normalbrief versenden, ohne dass der Empfänger Nachporto bezahlen muss? (in den meisten Haushalten existiert keine Briefwaage).

1 m² 80 g - Papier ergibt 16 Blätter, also wiegt ein Blatt 5g, der Brief darf also 3 Blätter (und den Umschlag) enthalten.

Schätzen ist eine Tätigkeit, die in der Schulpraxis bisher kaum in ihrer Bedeutung gewürdigt worden ist, sogar auch nicht im traditionellen Sachrechnen, das sich im wesentlichen dem „sachrechnerischen Prinzip“ verpflichtet fühlte. Dies liegt wohl an einer „Genauigkeitsideologie“ (die auch noch unmathematisch ist), wonach nur ziffernmäßig richtige Resultate von Belang sind, und an der Komplexität des Schätzvorgangs, der sich nicht auf rezeptartiges Vorgehen reduzieren lässt.

Ein (scheinbar) einfaches Beispiel: Schätzen des Gewichts einer Banane.

„Hier ist eine Banane. Schätze, wie schwer sie ist!“

Um die Aufgabe zu lösen, muss der Schüler auf Vorerfahrungen zurückgreifen (falls er in diesen Bereich fallende hat), sein Langzeitgedächtnis bemühen. Findet er keine passenden Vergleichsobjekte, kann er nur schweigen (was er aber nicht tun wird) oder raten. Schätzen jedoch ist kein (blindes) Raten. Der Schüler muss die Banane (bzw. ihr Gewicht)

mit Gegenständen vergleichen, deren Gewicht er kennt. Er könnte z.B. wissen, dass ein Paket Zucker 1 kg wiegt, und er kann durch vorgestelltes Vergleichen zu dem Schluss (!) kommen, dass etwa 4 - 5 Bananen so schwer wie ein Paket Zucker sind, eine Banane also 200 g bis 250 g wiegt. Auch die Schätzung, weniger als 1 kg und mehr als 100 g (Tafel Schokolade) ist vernünftig.

Eine (komplexere) Schätzaufgabe: „Wie viele Mathematikstunden hast Du in einem Schuljahr?“

Dies führt wohl zu einer „Überschlagsaufgabe“ : Jahr 52 Wochen, Ferien: Herbst, Weihnachten, Ostern, Sommer: $1+3+3+7=14$. Es verbleiben 38 Wochen. Sind in der Woche 4(5) Mathestunden, so erhält man ca. 140 (180) Stunden, da durch Feiertage und z.B. Konferenzen noch einige Stunden ausfallen.

Man kann weiter überlegen: Wie viele Aufgaben rechnest Du im Jahr?

Wie viele Aufgaben rechnest Du in Deiner Schulzeit?

Schätzen (und nicht Raten) besteht aus einem komplizierten Zusammenspiel von Wahrnehmen, Erinnern, Inbeziehungsetzen, Runden bzw. Überschlagen und Rechnen. Dabei steht das Rechnen keineswegs im Vordergrund. Im Alltag ist Schätzenkönnen äußerst wertvoll und häufig auf die Zukunft bezogen (Prognosen): Wieviel Arbeit kann ich mir vornehmen? Wann muss ich losfahren, um einen bestimmten Termin wahrzunehmen?

Allmählich soll sich bei den Schülern ein Urteilsvermögen darüber bilden, wann mehr oder weniger grobe Schätzungen und wann exakte Werte sinnvoll sind. Der Eismann vor dem Schulgebäude interessiert sich nur für die Größenordnung der Schülerzahl, wenn er disponiert; der Schulleiter dagegen für die genaue Zahl, u.U. ist ein Schüler mehr oder weniger wichtig für die Besetzung einer Stelle oder Teilung bzw. Zusammenlegung von Klassen.

Beim *Kennenlernen der Maßsysteme* ist eines der wichtigsten Teilziele, *realistische Größenvorstellungen* aufzubauen:

In einer Befragung von 388 Viertklässlern (14 Schulklassen) im Jahr 1976 konnten nur rd. 60% die Körpergröße eines erwachsenen Mannes zutreffend einschätzen, es gab Werte von 26 cm bis 1840 cm, 40% der Schüler schätzten die Länge eines Pkw-Parkplatzes auf „unter 3 m“ ein (auch 3 cm, 4 cm,

10 cm!), 60% meinten ein Brötchen wiege weniger als 10 g, 32% erkannten das Stop-Schild als sechseckig, 97% wussten nicht, wie viele Wochen zwischen Ostern und Pfingsten desselben Jahres liegen.

Damit (und aus anderen Gründen) darf man annehmen, dass zur Zeit dieser Untersuchung in der Grundschule der Realitätsbezug im Rahmen der Größenlehre zu schwach entwickelt war. Realistische Vorstellungen entwickeln sich nicht von selbst und auch nicht über formale Sortenumwandlungsaufgaben.

Es muss ein Repertoire von Stützpunktvorstellungen regelrecht gedächtnismäßig eingeübt werden, das dann immer wieder beim Lösen von Sachaufgaben herangezogen werden muss. Dabei sollte auf eigene leibliche Erfahrbarkeit Wert gelegt werden.

Beispiele für Längen:

1 cm	Fingernagelbreite, Lesebuchdicke, Spielwürfelhöhe
10 cm	Daumen-Zeigefinger-Spanne, Breite einer Postkarte
1 m	großer Kinderschritt, Höhe der Wandtafel
10 m	4 mal Zimmerhöhe, Höhe eines Hauses, Länge von zwei Parkplätzen
100 m	hintereinander Länge eines Fußballfeldes, doppelte Länge des Schwimmbekens
1 km	im Freibad Weg, für den ich 20 min brauche, zweieinhalb Stadionrunden

Wenn Größen wechselseitig aufeinander bezogen werden, so kann diese Vernetzung das Vorstellen und Behalten stützen. Realistische Vorstellungen von 1000 € können z.B. entstehen, wenn erfasst wird, dass man dafür fast 2 Jahre lang sparen müsste bei wöchentlich 10 € Spargeld, dass die Strecke fast $200 \cdot 120 \text{ mm} = 24 \text{ m}$ lang (= Länge des Flures vor dem Klassenzimmer) wäre, wenn man 1000 € in 5 €-Scheinen (Länge 119,5 mm) hintereinander

auslegte, dass man dafür zwei Fernsehgeräte oder die Mathematikbücher für vier Klassen kaufen könnte.

Das *Darstellen von Größen* dient dazu, sie dem denkenden Wahrnehmen zugänglicher zu machen, was umso wichtiger ist, je sperriger, größer und zahlreicher die Werte sind.

Beispiel: Einwohnerzahl von Städten.

Turmmodell (Aufeinanderlegen von Steinen des Damespiels oder Bauen mit Legosteinen), geeignetes Runden der Einwohnerzahlen.

Die Turmhöhen lassen sich gut vergleichen und damit werden die Daten dem vergleichenden Erfassen leicht zugänglich. Für zeichnerische Darstellungen eignet sich das Kästchenpapier des Rechenheftes, bei höheren Ansprüchen benutzt man Millimeterpapier. Piktogramme und Illustrationen können - wegen der Vernetzung mit Alltagsvorstellungen - ausgezeichnete Vorstellungsstützen sein.

Anregungen findet man z.B. in Zeitungen und Zeitschriften. Es erhöht die sachrechnerische Kompetenz in hohem Maße, wenn die Schüler einfache Diagramme (Balkendiagramme, Zahlenstrahl, Punktbilder) anfertigen und lesen (interpretieren) lernen. Die wichtigste Darstellung von Größen ist die symbolische in Ziffern und Zeichen. Sie ist aber auch die anspruchsvollste beim Ent- und Verschlüsseln der darin enthaltenen Informationen. Formales Sortenumwandeln, so notwendig dies auch ist, reicht nicht aus, wenn der Informationsgehalt einer Größenangabe erfasst werden soll, was ja in Sachaufgaben unabdingbar ist. Die meisten Maßsysteme sind dezimal, so dass die Entwicklung von Größenvorstellungen und der Aufbau des Zahlenraumes Hand in Hand gehen können und sollten. Es empfiehlt sich, die

Entschlüsselung und Sortenumwandlung mit einem (gedanklichen, idealen) Messprozess zu verknüpfen:

365 m:

100 m	3 mal, Rest mehr als Hälfte
10 m	36 mal, Rest Hälfte
10 cm	3650 mal
1 cm	36 500 mal

Sind Größenangaben über einem Wirklichkeitsbereich bekannt, so kann man diese Informationen auf verschiedene Arten weiterverarbeiten.

Beispiel: Weitsprung (Klasse 4)

Schüler	Weite in m	Schülerin	Weite in m
Stefan	2,63	Stefanie	2,58
Joachim	2,55	Verena	2,82
Roland	3,36	Iris	2,74
Jörg	2,87	Sandra	2,58
Markus	2,95	Juliane	3,10
André	3,28	Miriam	2,75
Arno	3,40	Judith	2,40
Marco	3,22	Tanja1	2,48
Sascha	3,15	Sabine	2,90
Rüdiger	3,28	Marina	3,02
Maik	3,47	Tanja2	2,36
		Anne	2,95
		Nicola	2,50
		Andrea	3,32
		Heike	2,70
		Karin	2,46

Es bieten sich u.a. folgende Fragestellungen/Aktivitäten an:

Welches ist der weiteste/kürzeste Sprung der Jungen/Mädchen/Kinder? Dazu müssen alle Werte vergleichend durchlaufen werden (Übung im dezimalen Entschlüsseln!)

	Jungen	Mädchen	Kinder
Kürzester Sprung	2,55 m	2,36 m	2,36 m
Weitester Sprung	3,47 m	3,32 m	3,47 m

Wie viele Jungen/Mädchen/Kinder sprangen weiter als 2,80 m und weniger weit als 3,40 m?

Welchen Wert erreichte der Junge / das Mädchen / das Kind, der/die/das

in der Mitte stünde, wenn wir die Jungen/Mädchen/Kinder ihrer Weite nach in der Reihe aufstellten? (Zentralwert, Median)

Die Listen sind umzuordnen, eine aufwendige, aber lohnende Aktivität:

Joachim	2,55	Tanja2	2,36	Tanja2	2,36
Stefan	2,63	Judith	2,40	Judith	2,40
Jörg	2,87	Karin	2,46	Karin	2,46
Markus	2,95	Tanja1	2,48	Tanja1	2,48
Sascha	3,15	Nicola	2,50	Nicola	2,50
Marco	3,22	Stefanie	2,58	Joachim	2,55
André	3,28	Sandra	2,58	Stefanie	2,58
Rüdiger	3,28	Heike	2,70	Sandra	2,58
Roland	3,36		2,72	Stefan	2,63
Arno	3,40	Iris	2,74	Heike	2,70
Maik	3,47	Miriam	2,75	Iris	2,74
		Verena	2,82	Miriam	2,75
		Sabine	2,90	Verena	2,82
		Anne	2,95	Jörg	2,87
		Marina	3,02	Sabine	2,90
		Juliane	3,10	Markus	2,95
		Andrea	3,32	Anne	2,95
				Marina	3,02
				Juliane	3,10
				Sascha	3,15
				Marco	3,22
				André	3,28
				Rüdiger	3,28
				Andrea	3,32
				Roland	3,36
				Arno	3,40
				Maik	3,47

Aus den geordneten Listen kann man zahlreiche weitere Aussagen entnehmen und wird zu Fragen angeregt:

- Der Zentralwert bei den Jungen ist 50 cm höher als bei den Mädchen!
- In der „schlechteren Hälfte“ aller Kinder sind nur zwei Jungen, aber Andrea sprang weiter als acht der elf Jungen.
- Wo liegen die meisten Werte der Kinder? Suche einen Abschnitt (z.B. 30 cm lang), in den die meisten Kinder sprangen!

- Wie weit sprangen die Jungen/Mädchen/Kinder im Durchschnitt? Der *Durchschnitt* ist ein gedachter Ausgleichswert: Welchen Wert bekommen wir, wenn wir die Werte auf einen einzigen Wert ausgleichen, die hohen Werte also niedriger und die niedrigen höher machen? Addiere alle Werte und teile durch die Anzahl der Kinder! (Wieso führt diese Idee zum Ziel?)

Jungen	34,16 m	:	11	=	3,11 m
Mädchen	43,66 m	:	16	=	2,73 m
Kinder	77,82 m	:	27	=	2,88 m

- Vergleich der Zentralwerte mit den Durchschnittswerten: Warum gibt es einen Unterschied (bei den Jungen)? Die niedrigen Werte weichen stark von der Masse ab und ziehen damit den Durchschnitt herunter!

Eine „klassische“ Verarbeitung von Daten liegt beim *Dreisatz* vor. Hier genügt die Angabe einer Größe, etwa der Preis pro Stück einer Ware, und man kann daraus weitere Daten produzieren, allerdings mit der oft nicht genügend geklärten Unterstellung, dass „Preis pro Stück“ bedeutet: Für jedes gekaufte Stück dieser Ware muss dieser bestimmte Preis bezahlt werden. Nur so funktioniert das Schließen der Schlussrechnung. Es besteht kein logischer Zwang, für 10 Eier 2 € zu bezahlen, wenn für ein Ei 20 Ct verlangt werden. Die Praxis sieht ja häufig anders aus!

Erst durch die ausdrückliche Vereinbarung „Für jedes Ei muss ...“ wird erzwungen, dass man für das Doppelte, . . . , Zehnfache der Ware auch den doppelten, . . . , zehnfachen Preis bezahlen muss.

Es gibt zahllose weitere Möglichkeiten, aus gegebenen Daten neue Daten zu erzeugen. Der wesentliche Punkt in der Schule ist aber, die neuen Daten als Antworten auf situationsorientierte Fragen aus den gegebenen Daten einsichtig zu entwickeln. Die folgende Tabelle enthält einige wichtige Situationstypen für die Verarbeitung von Größen.

<i>Situationstyp</i>	<i>Operation</i>	<i>Beispiel</i>
Wachsen von a um b .	$a + b = x$	Der Urlaub sollte 17 Tage dauern. Er wurde um 5 Tage verlängert.

Wachsen von a auf b .	$a + x = b$ $x = b - a$	Im August hatten wir 315 Kinder in der Schule. Am 1. Dezember waren es 329.
Wachsen um a auf b .	$x + a = b$ $x = b - a$	Das Sparguthaben von Jörg stieg im vergangenen Jahr um 128 € auf jetzt 753 €.
Vergleichen von a mit b .	$a - b = x$ $b - a = y$	Der Feldberg im Schwarzwald ist 1493 m hoch, die Zugspitze 2962 m.
Verkleinern (verändern) von a auf den b -ten Teil.	$a : b = x$	Unser Klassenraum ist 6,40 m breit. Wir zeichnen im Maßstab 1 : 10.
Messen von a mit b .	$a : b = x$	200 Flaschen Sprudel sollen auf Kästen zu je 20 aufgeteilt werden.
Verteilen von a an b .	$a : b = x$	Marinas Schulweg beträgt 1350 m. Sie brauchte heute 15 min.
Vermehren (verändern) der Summe von a und b auf das c -fache.	$(a+b) \cdot c =$	Petras Vater arbeitet täglich 8 Stunden. Für Hin- und Rückweg braucht er zusammen 1 h 20 min. Wie lange ist er in einer Woche mit 5 Arbeitstagen von zu Hause weg?

Bei der Funktion *Sachrechnen als Lernstoff* geht es also darum, Wissen über Größen und Fertigkeiten im Umgang mit Größen aufzubauen. Diese Bemühungen müssen eingebettet werden in die Zielvorstellung, sachrechnerische Fähigkeiten im Rahmen eines Beitrags zur Denkentwicklung der Schüler und zur Erschließung ihrer Umwelt anzustreben.

Sachrechnen als Lernprinzip

Der Bezug auf die reale Umwelt und den praktischen Erfahrungsbereich der Schüler kann auf dreifache Weise der Entwicklung und Entfaltung mathematischer Fähigkeiten nützlich sein:

- Sachaufgaben als Ausgangspunkte (Einstiege) von Lernprozessen
- Verlebendigung, Verdeutlichung, Veranschaulichung von mathematischen Begriffen durch ihre Verkörperung in Sachsituationen

- Sachaufgaben als Feld der Einübung mathematischer Begriffe und Verfahren

Wo immer es sich anbietet, ist es sinnvoll, einen Lernprozess mit der Beobachtung eines *umweltlichen Phänomens* einzuleiten, denn hierdurch wird die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass eine größere Zahl von Schülern sich angesprochen (betroffen, weil es ihre Welt ist) und kundig fühlt.

Worüber man etwas weiß, darüber möchte man am liebsten auch sprechen, vor allem dann, wenn man auch selbst noch als „Gesprächsgegenstand“ fungiert. Phänomene als Ausgangspunkte von Lernprozessen mischen auch die Karten wieder neu: schwächere Schüler erhalten die Chance eines neuen Zugriffs. Lernen ist zudem nur als *Weiterlernen* denkbar (Vermehren, Vertiefen, Umordnen vorhandenen Wissens; Trainieren vorhandener Fertigkeiten usw.) und erscheint um so erfolgsversprechender, je umfangreicher und besser organisiert die bisherigen Erfahrungen sind, und diese dürften bei den Schülern vornehmlich auf ihre Lebenswelt bezogen sein. Auf der anderen Seite darf man durch einen umweltbezogenen Einstieg keinen Automatismus in der Motivation erwarten, da die angebotene Situation auf eine bestimmte Art betrachtet und damit anders (eben mathematisch) gesehen wird, indem ein mathematisches Modell entwickelt wird.

Ein Einstieg erscheint um so wirkungsvoller, je mehr er den Schülern einerseits vertraut, aber andererseits auch wieder in irgendeiner Form rätselhaft und befragenswert erscheint, je mehr er zum Handeln herausfordert und Handlungsspielraum gewährt und je tragfähiger er als Erfahrungsbereich des intendierten mathematischen Lerninhalts dienlich erscheint.

Kurz: Der Einstieg soll möglichst vielen Schülern möglichst starke Anreize zum selbsttätigen, entdeckenden Lernen bieten.

Beispiel: Die Kleinerrelation in Klasse 1.

Der Einstieg muss grundlegende und bedeutungsvolle Vergleichs- und Anordnungserfahrungen der Kinder aufgreifen. Dazu gehören die Urmuster des Gegensatzes

wenige - viele, klein - groß, niedrig - hoch, kurz - lang, eng -
weit,
schmal - breit, arm - reich usw.,

spezifizierte Vergleiche

weniger als, viel weniger als, fast gleich viel, genau so viele wie,
kleiner als, sehr viel kleiner als, ein bisschen kleiner als, usw.,

serielle Muster

von ganz wenig bis sehr viel, von winzig klein bis riesig groß und deren numerische Modellierung z.B. in der Zahlenreihe.

Einstieg: Befragung in der Klasse: Was trinkst Du am liebsten morgens zum Frühstück?

Man wird eine Einteilung in Klassen vornehmen: Milch, Kakao, Kinderkaffee, Kindertee, anderes und z.B. eine Tabelle erstellen. Anzahlen werden erhoben, verglichen, gezählt, dargestellt. Die Situation wird modelliert und sprachlich dargestellt und symbolisiert. Das Zeichen wird eingeführt: $2 < 7$. Es wird darüber gesprochen. Wie kann man es sich leicht merken? Wichtig sind Variationen, die handelnd mit sprachlicher Begleitung auch ausgeführt werden und deren Ergebnisse schriftlich notiert werden, wobei das Schreiben des Zeichens $<$ geübt wird. Ein Teetrinker möchte in Zukunft doch lieber Kaffee trinken. Welche Änderungen ergeben sich? Der Unterschied wird größer (oder kleiner, oder er dreht sich). Wichtig ist, dass eine Situation genügend reichhaltig ist, um bisherige Erfahrungen und vorhandenes Wissen einzubringen, aber auch um neue Erfahrungen und neues Wissen entwickeln zu können.

Der Schritt vom Phänomen, von der Sachsituation zum mathematischen Modell ist keineswegs einfach, selbstverständlich, glatt oder gar zwangsläufig, wie es hier oder in Schulbüchern häufig erscheint. Jedes Kind muss ihn alleine tun. Was dagegen in der Hand der Lehrerin liegt, ist

das Auswählen eines möglichst passenden Einstieges und die Anregung zu Handlungen und Fragen und das Bereitstellen von Material.

Es ist fast immer möglich, einen begrifflichen Zusammenhang der Schulmathematik in *realen Situationen* zu verkörpern, sei es in alltäglichen, sei es in begrifflich schon teilweise vorstrukturierten Situationen.

Der Eigenschaftsbegriff „Primzahl“ erscheint z.B. verkörpert in Situationen mit Gruppen (Mengen) von Kindern, die sich nicht „richtig“ in gleichstarke Grüppchen, Riegen (Teilgruppen) zerlegen lassen.

Der wesentlich komplexere Begriff „Stellenwertsystem“ kann in Verpackungssituationen dargestellt werden.

Auch Sachverhalte (Gesetze, Sätze) lassen sich in Alltagssituationen repräsentieren:

Gesetz von der *wiederholten Subtraktion*: $a - b - c = a - (b + c)$.

Situation: Geldausgeben beim Einkauf.

Die Verkörperung von begrifflichen Zusammenhängen in konkreten Alltagssituationen ist nicht etwa eine Veranschaulichung in dem vordergründigen Sinn als vorübergehende oder nur für lernschwächere Schüler notwendige Verständniskrücke. Vielmehr muss der offenkundigen Tatsache Rechnung getragen werden, dass Verstehen immer an spezifisches Vorstellungsmaterial gebunden ist und nicht in einem freien abstrakten Raum operiert. Wenn dem aber so ist, so erscheint es didaktisch sinnvoll, begriffliche Zusammenhänge möglichst in solchen Situationen darzustellen, die den Schülern aus zahlreichen früheren Alltagserfahrungen vertraut sind. Man darf dann ein höheres Maß an emotionaler Beteiligung (Motivation), an Einsicht und nicht zuletzt an gedächtnismäßiger Verankerung erwarten. Allerdings ist das Verhältnis Begriff - Repräsentation des Begriffs keineswegs von einfacher Natur. Eine Alltagssituation ist nicht von sich aus schon eine Verkörperung eines Begriffs, sie wird es erst, wenn man sie im Licht des Begriffes sieht, interpretiert.

Beispiel: von einem Tablett fallen Gläser herunter

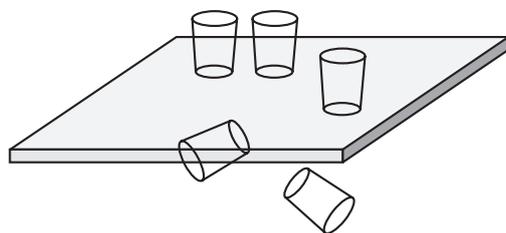


Fig. 1

Damit diese Situation als Subtraktionssatz $5 - 2 = 3$ gedeutet werden kann, muss nicht nur die Alltagssituation verstanden werden, sondern es muss schon vorhandenes arithmetisches Wissen eingebracht, in die Situation *hineingesehen* werden.

Eine Alltagssituation ist in diesem Zusammenhang um so besser als Verkörperung von mathematischen Inhalten, je mehr sie begrifflich ausgebeutet werden kann und nicht nur eine eng umgrenzte, singuläre und unbewegliche Vorstellung abgibt. Die obige Subtraktionssituation lässt eine Fülle wichtiger Subtraktionserfahrungen zu: Je mehr Gläser herunterfallen, um so weniger bleiben stehen. Stellt man für jedes heruntergefallene Glas ein neues aufs Tablett, dann sind es wieder so viele wie vorher (Umkehraufgabe, Zusammenhang von Addition und Subtraktion).

Beispiel: Netze (Graphen) als Straßennetze

Durchlaufbarkeit kann gedeutet werden, z.B. als Durchfahren mit einem Kehrwagen.

Häufig wird im Unterricht die (eine) angestrebte Repräsentation eines Begriffes als Einstiegssituation gewählt. Geschieht die Entwicklung eines neuen Begriffes durch die Aufarbeitung und Neudeutung einer hinreichend tragfähigen Situation, so spricht man von *exemplarischem* oder *paradigmatischem Lernen* (nach Wagenschein).

In der heutigen Schulpraxis ist Sachrechnen häufig noch als *Übungsrechnen* verbreitet: Zum Zweck der Einübung eines Begriffes oder - vor allem - eines rechnerischen Verfahrens werden sogenannte *eingekleidete Aufgaben* aus den verschiedensten Gebieten gelöst, und das ist keineswegs auf die Grundschule beschränkt. Meist gibt es eine Zweiteilung des Lernprozesses: In der ersten Phase wird die Theorie (der Begriff, das Rechenverfahren) entwickelt, die in der zweiten Phase geübt wird. Die meisten Schulbücher bieten

hierzu ganze *Aufgabenplantagen* an, oft noch nach Schwierigkeitsgrad oder Sachgebieten sortiert. Diese Zweiphasigkeit ist lokal und global ausgeprägt.

Lokal: Nach der Behandlung eines eng umgrenzten arithmetischen Inhalts (z.B. Addition reiner Zehner in Klasse 2) erfolgt sofort ein sachrechnerisches Üben (z.B. Aufgaben mit Briefmarken, Preisen in 10 Ct-Münzen, Dezimetern).

Global: An die Durcharbeitung eines umfangreicheren Stoffgebietes (z.B. schriftliches Dividieren) werden zur Einprägung längerfristige Übungen mit eingekleideten Aufgaben angeschlossen.

Diese nachgereichte Anwendung dient nur bedingt der Förderung sachrechnerischer Fähigkeiten, ein solcher Anspruch wird auch häufig nicht erhoben. Aber wozu macht man es dann? Die Schüler sollen in erster Linie Sicherheit und Geläufigkeit in arithmetischen Fertigkeiten erlangen, die sachliche *Verkleidung* soll dieses Üben abwechslungsreicher und farbiger machen. Die Sachthemen beschränken sich auf alltägliche Situationen, damit vor dem Rechnen nicht erst noch viel geklärt werden muss, sie wiederholen sich sehr stark und sind untereinander weitgehend austauschbar. Die Entschlüsselung des Textes erfordert keine ernsthafte Auseinandersetzung mit der geschilderten Situation. Wichtig ist allein die zahlenmäßige Lösung, eine Rückinterpretation in die Situation findet nicht statt.

Beispiele:

a) Bericht aus dem Praktikum SS 1996:

Thema Division Klasse 4:

Sonderangebot: Zwei Wochen Mallorca kosten für zwei Personen DM 1250.

Was kostet die Reise für eine Person?

b) Bericht in der WZ vom 5. Juni 1996:

Ein thailändisches Berufungsgericht hat einem Verurteilten Recht gegeben, der gegen eine Haftstrafe von 4220 Jahren Berufung eingelegt hatte. Die Strafe des Beamten, der wegen Veruntreuung von Spendengeldern verurteilt worden war, wurde (auf 2110 Jahre) halbiert.

Wenn das Sachrechnen nahezu ausschließlich ein solches reproduktives Einübungsrechnen ist, ist die Gefahr besonders groß, dass Schüler Textaufgaben nur als Rechenaufgaben deuten und sich um das Verständnis der Sache erst gar nicht bemühen. Ein solches Übungssachrechnen könnte aber (neben dem Übungseffekt für das Zahlenrechnen, der nicht unterschätzt

werden soll) doch auch einen bescheidenen Beitrag zur Förderung der eigentlichen sachrechnerischen Kompetenz darstellen, wenn es stärker als Übung im *Transferieren* betrieben würde, wenn dem Schüler das Anwenden mehr zum Bewusstsein käme. Möglichkeiten in dieser Richtung wären:

- Der Schüler soll selbst eine Frage stellen (auch wenn dadurch Schwierigkeiten beim Kontrollieren und Bewerten entstehen).
- Es sollen Aufgaben bewusst und im einzelnen miteinander verglichen werden. Wie passen z.B. die folgenden Texte zueinander?
 „Die Brotverkäuferin hatte um 10 Uhr 118 € in ihrer Kasse. Eine Stunde später, um 11 Uhr, zählte sie 143 €.“
 „Am 1. Januar 1984 wog der Vater von Rosi 73 kg, und am 1. Januar 85 wog er 81 kg.“
- Es werden Aufgaben eingestreut, die nicht zum Typ passen, vielleicht sogar *Kapitänsaufgaben*.
- Vor allem: Die Schüler sollen selbst Aufgabentexte herstellen, z.B.:
 Erzählt eine Verteilungsgeschichte mit Gewichten.
 Erzählt eine Unterschiedsgeschichte zum Lebensalter von Menschen.
 Erzählt eine Geschichte über das Abfüllen von Milch.

Insgesamt bedeutet Sachrechnen als Lernprinzip, dass Bezüge zur Realität für das Lernen mathematischer Begriffe und Verfahren ausgenutzt werden, um die Schüler stärker am Lernen zu interessieren, ihr Verständnis zu fördern und ihre Kenntnisse und Fertigkeit besser zu festigen.

Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung

Dies ist die umfassendste Funktion des Sachrechnens, sie schließt Sachrechnen als Lernstoff und als Lernprinzip ein.

Entscheidend ist der *Primat der Sache*: Sachsituationen sind nicht nur Mittel zur Anregung, Verkörperung oder Übung, sondern selbst der Stoff, den es zu bearbeiten gilt. Sachrechnen ist damit *auch* Sachkunde. Die Schüler sollen befähigt werden, umweltliche Situationen durch mathematisches Modellieren klarer, bewusster, auch kritischer zu sehen. Dabei sollen sie auch erfahren, dass die mathematischen Modelle lediglich Entwürfe, Konstruktionen darstellen, die nur gewisse Aspekte der Realität erfassen und andere

mehr oder weniger vollständig ausschließen. Insofern bedarf die mathematisch orientierte Erschließung der Umwelt immer noch anderer Weisen der Interaktion zwischen Mensch und Welt.

Das Wort *Modell* wird hier als Bezeichnung für einen innermathematischen (in der Regel arithmetischen) Zusammenhang verwendet, der seinerseits in Worten, Symbolen, Grafiken dargestellt ist und der als eine Interpretation, als ein (mathematisches) Deutungsmuster eines realen Phänomenbereiches dient. So ist die Zahlenreihe 1, 2, 3, ... mit der Prozedur des Zählens ein Modell für Situationen, in denen Gegenstände voneinander unterschieden werden können, die also wenigstens eine Zeitlang konstant bleiben. Dieses Modell passt zu Situationen wie „Schüler im Klassenzimmer“ , „Autos auf einem Parkplatz“ , nicht aber zu Situationen wie „Wolken am Himmel“ oder „Milchtropfen in der Tasse“ . Das Modell erlaubt es, Mächtigkeitsfragen („Wie viele ...?“) und Rangfragen („Der wievielte ...?“) zu stellen und zu beantworten. Dabei werden die gezählten Gegenstände als Individuen ohne Eigenschaften, als statistische Einheiten, als Zähleinheiten angesehen. In der Feststellung „Im Wartezimmer warten z.Z. 8 Patienten“ werden die Patienten als untereinander austauschbar angesehen, weitere Merkmale (Alter, Geschlecht, Einkommen, Beruf, Aussehen, Religion usw.) sind ausgeblendet.

Der eigentliche Inhalt des Sachrechnens im Dienste der Umwelterschließung besteht darin, zu umweltlichen Bereichen mathematische Modelle aufzubauen, man kann dies als *Situationen mathematisieren* bezeichnen. Dies ist ein äußerst kompliziertes Unternehmen. Das Modell springt nicht einfach durch Beobachtungen aus der Situation heraus ins Auge, insofern ist Modellbildung ein konstruktiver, kreativer Akt. Der Beobachter muss schon über Begriffe, Symbole, Verfahren usw. verfügen, aus denen er - zunächst versuchsweise - ein Modell bildet. Somit ist Modellierung immer auch an Vorwissen als Material gebunden. Mit dem Vorwissen wird ja bereits die Situation beobachtet; das Vorwissen diktiert in starkem Maße mit, was überhaupt wahrgenommen wird. Kurz: Die Modellbildung ist keine Einbahnstraße von der Situation zur begrifflichen Aufarbeitung, sondern viel eher ein Wechselspiel aus Wahrnehmen und Hineindeuten.

In idealtypischer Weise kann man die Mathematisierung einer Sachsituation als Prozess darstellen, in dem verschiedene Stufen mit zunehmendem

Komplexitätsgrad durchlaufen werden (MÜLLER/WITTMANN: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe):

1. Situation wahrnehmen, Muster erkennen, Fragen entwickeln
2. Modell (oder mehrere alternative Modelle) entwerfen, evtl. weitere Daten beschaffen
3. im Modell Informationen verarbeiten, Fragen im Modell lösen
4. gewonnene Modelllösung auf die Situation zurück übertragen und bewerten, Tragweite des Modells erkunden (Transfers versuchen)

Aus später noch vorzustellenden Unterrichtsbeispielen (bzw. Inhalten) wird zu erkennen sein, wie unterschiedlich das Mathematisieren im einzelnen gestaltet sein kann. Wichtig, ist, dass die Schüler auf allen Stufen eines Mathematisierungsprozesses die Möglichkeit zur *Selbsttätigkeit* haben.

In der Stufe 1. ist die Entwicklung von Fragen besonders bedeutungsvoll. „Welche Aufgaben, welche Fragen könntest du hier stellen? Was fällt auf? Hast du eine Erklärung?“ KÜHNEL hat bereits 1922 gefordert: „... dass nichts so wichtig ist für alle intellektuelle und ethische Bildung, als dass das Kind sich selbst Aufgaben stellen, selbst Probleme suchen, finden, formulieren und zerlegen lerne.“ Die Sensibilisierung für Wahrnehmen, Teilhaben, Fragen dürfte heute eher noch notwendiger sein als zu Kühnells Zeiten.

Die Stufe 2. ist sozusagen per definitionem eine schöpferische Stufe: „Was ist hier die Hauptsache? Wie hängen die Sachen untereinander zusammen? Wie kannst du dir den Zusammenhang klar machen? Wie kannst du die Sache darstellen?“ Dies sind einige allgemeine Impulse, die zur Modellbildung anregen können.

Die Stufe 3. ist stärker reproduktiv, häufig werden bereits gelernte Rechenverfahren angewendet. Es ergibt sich aber nicht selten das Bedürfnis oder die Notwendigkeit, neue Rechenprozeduren zu entwickeln oder bekannte abzuändern. „Wie kannst du möglichst geschickt das Ergebnis, die Ergebnisse abschätzen/bestimmen/ausrechnen/zeichnen/ darstellen ...?“

In der Stufe 4. ist das Bemühen um das Übertragen des Modells auf neue Situationen das eigentlich kreative Moment. „Wo gibt es etwas Ähnliches?“

Wo kannst du das Gelernte auch noch benutzen? Was kannst du jetzt auch besser verstehen?“ sind hier mögliche Schlüsselfragen.

Mathematisierungsprozesse sind also Problemlöseprozesse mit der zusätzlichen Komponente, dass die Probleme weniger von außen (Lehrer, Schulbuch) gegeben, als bei der Analyse der Situation entwickelt werden. Beim Mathematisieren sollen die Schüler nicht nur etwas Sachkundliches und nicht nur etwas Mathematisches lernen, von ebensolcher Bedeutung ist der Erwerb von allgemeinen Problemlösefähigkeiten, also von Heuristiken, wie:

- Texte mit eigenen (anderen) Worten wiedergeben
- Texte gliedern
- verdeutlichende Skizzen anlegen, Skizzen deuten
- Tabellen herstellen und lesen
- eine Sache von einer anderen Seite her sehen
- eine Situation umdeuten
- eine Vermutung testen
- ein Ergebnis abschätzen usw.

Welche Situationen für eine Mathematisierung lohnenswert und ergiebig erscheinen, kann kaum griffig und scharf formuliert werden, es ist auch eine Frage der regionalen und lokalen Verhältnisse und der besonderen Interessen der Lehrerin. Es gibt eine unerschöpfliche Fülle von Möglichkeiten. Eine kleine Zusammenstellung:

- Häusliches Leben: Eine neue Wohnung wird gesucht.
- Geschwister: Yvonne hat ein Brüderchen bekommen
- Schulleben: Schulwege - wo wohnst du?
- Spielen: Pfeile werfen - wer trifft ins Schwarze?
- Sport: Bundesjugendspiele
- Freizeit: Anja wünscht sich einen Hund.

- Post: Ein Brief nach München oder Remscheid.
- Fliegen: Wie groß ist ein Jumbo-Jet?
- Eisenbahn: Wir fahren nach Bonn.
- Fahrrad: Wie schnell, noch schneller?
- Telefonieren: Kleingeld gefragt.
- Einkaufen: Angebote in der Zeitung.
- Sparen: Bei welcher Bank oder Sparkasse?
- Verkehr: Der Bus hat Verspätung.
- Wasser: Wieviel Wasser verbrauchen wir?
- Ferien: Nach Mallorca oder in den Schwarzwald?
- Bauernhof: Hennen und Eier.
- Hotel: Schon ausgebucht.
- Fabrikarbeit: Arbeit und Verdienst - früher und heute.
- Theater: Gute Plätze - teure Plätze.

Von Natur aus ist umwelterschließendes Sachrechnen *fächerübergreifend*, und es kann nur überzeugend unterrichtet werden, wenn die Lehrerin weit über den Rechenzaun blicken kann und ihr Allgemeinwissen ständig erweitert.

Als überzeugendste Organisation ist für diese umwelterschließende Sachrechnen der *Projektunterricht* anzusehen. Alle Aktivitäten der Schüler (und Lehrerin) sind auf ein Thema, auf eine Aufgabenstellung konzentriert. Er ist eine Art Gesamtunterricht oder Epochenunterricht, der in der Grundschule eine lange Tradition hat, allerdings auch oft umstritten war und ist, der von allen Reformströmungen in verschiedener Ausprägung immer wieder gefordert wurde. Ist Projektunterricht im eigentlichen Sinne nicht durchzuführen, so ist es jedoch in der Regel gut möglich, im Mathematikunterricht zusammen mit dem Sach- und Sprachunterricht in weiten zeitlichen

und thematischen Grenzen *projektartig* zu unterrichten. Dies kann zumindest in dem Sinne geschehen, dass in einem möglichst überzeugendem Maße die Sachsituation als originär und authentisch erlebt werden kann.

Beispiele aus MÜLLER/WITTMAN: Der MU in der Primarstufe („Blaue Bibel“):

- Einrichten eines Aquariums
- Entwurf einer Ampelanlage
- Von Dortmund nach Nürnberg
- Schulmilchtüten
- Nägel schätzen
- Mini-Gruppen-Karte der DB

Auch in ausländischen Mathematikkursen gibt es Beispiele für Projekte zur Umwelterschließung, z. B. im englischen Nuffield-Programm. Die weit verbreitete Sorge, dass die vom mathematischen Stoff geforderte Systematik zu kurz kommt ist zum einen nicht aus innermathematischen Gründen für die Grundschule begründbar, zum anderen auch nicht stichhaltig: Es wird nicht gefordert, dass der *gesamte Mathematikunterricht* aus einer Serie von Anwendungsprojekten bestehen soll. Außerdem ist das Lernen weitaus weniger systematisch als üblicherweise unterstellt wird. Systematischer Unterrichtsaufbau einerseits und Erkenntnisgewinn und Fähigkeitsertüchtigung im Kopf der Kinder andererseits verlaufen oft nicht parallel. Mathematisierungsprojekte können zu Pfeilern des Verständnisses werden, auf denen das Gebäude des mehr systematisch organisierten Mathematikwissens beruht, was sich freilich aber nicht von selbst ergibt.

Die sachkundlichen Ausgangssituationen lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten unterscheiden. Die wichtigsten sind

- Authentizität (von „unmittelbar aus dem Leben gegriffen“ bis zu „fingiert/frisiert“)
- Zugänglichkeit (von „direkt beobachtbar“ bis „durch Medien vermittelt“)

- Reichhaltigkeit gegenüber Problemstellungen (von „offen für viele verschiedene Fragestellungen“ bis „eingengt auf eine Frage“)
- Praxisnähe der Problemstellung (von „direkt im Leben verwertbar“ bis „von eher theoretischem Interesse“)
- Schwierigkeit bei der Modellbildung (von „erfordert mehrere Umstrukturierungen“ bis zu „lässt sich unmittelbar auf Routinefall reduzieren“)

Hiermit ist - wenn man noch die unerschöpfliche Vielfalt im Thematischen hinzunimmt - eine enorme Variabilität gegeben, die es ermöglicht, sehr unterschiedlichen Gegebenheiten und Zielvorstellungen gerecht zu werden. Nicht zuletzt finden sich hier Ansatzpunkte für die Differenzierung im Unterricht.

Insgesamt ist das umwelterschließende Sachrechnen nicht ein nachgeordnetes methodisches Detail, sondern ein anspruchsvolles, voraussetzungsreiches didaktisches Programm, in das tiefere Dimensionen pädagogischen Arbeitens eingehen: die übergeordneten Ziele des Mathematikunterrichts (sein möglicher Beitrag zur Entfaltung der Kreativität und zur Sensibilisierung für die Probleme unserer Welt) und das Bild, das man vom Menschen und vom menschlichen Lernen hat. Von diesem Konzept darf man dann aber auch eine Steigerung der Sachrechenfähigkeit erwarten.

2.2 Hilfsmittel im Sachrechnen

Textaufgaben

Allgemeine Gesichtspunkte: Sachaufgaben werden im weit überwiegenden Maße durch *Texte* vermittelt. Die Schüler haben häufig Schwierigkeiten beim Erfassen des Sachverhalts, so daß die sprachliche Gestaltung einer Aufgabe von entscheidender Bedeutung sein kann. Im folgenden sollen zuerst allgemeine Gesichtspunkte zur Bedeutung und sprachlichen Gestaltung von Textaufgaben gesammelt werden. Da ein wesentlicher Teil aller Sachaufgaben an mathematischen Mitteln nicht mehr als die sogenannten Grundrechenarten voraussetzt, wird dann näher auf die sprachlichen Wendungen eingegangen, die auf solche Rechenoperationen hinweisen und die

- obwohl sie nicht immer eindeutig sind - vom Schüler richtig erfaßt werden müssen. Schließlich gehört zum Lösen elementarer Sachaufgaben auch die richtige Verkettung der einzelnen Rechenoperationen. Das *Simplex-Komplex-Verfahren* und die *Rechenbäume* bieten sich hier als methodisches Hilfsmittel an und ermöglichen zugleich eine Analyse der Struktur der jeweiligen Aufgabe (genauere Erläuterungen zu diesen Hilfsmitteln folgen später).

Das Anwenden von Mathematik und mathematisches Denken im außerschulischen Bereich vollzieht sich vielfach in Problemsituationen, die kaum auf eine bestimmte Zielfrage hin eingegrenzt sind, und oft tritt eine solche Zielfrage oder überhaupt eine Verbalisierung des Problems gar nicht auf. Man könnte deshalb fragen, ob es noch sinnvoll ist, Textaufgaben zu stellen, wie sie von jeher die Rechen- und Mathematikbücher durchziehen. Die Alternative wäre, sich im Mathematikunterricht ganz auf solche Fragestellungen und Probleme zu beschränken, die

- dem Schüler in seiner Umwelt (Lebenswelt) unmittelbar begegnen
- oder sich in einer Spielsituation im Unterricht stellen lassen
- oder die im Rahmen eines umfassenderen, evtl. mehrere Unterrichtsfächer übergreifenden Projekts erarbeitet werden.

All dies würde der Kritik am traditionellen Sachrechnen Rechnung tragen. Doch auch wenn man diese Kritik ernst nimmt, gibt es wichtige Gründe für das Arbeiten mit Textaufgaben:

Es gibt Sachbereiche und Sachprobleme, die für den Schüler wichtig sind, die sich aber nur über sprachliche Vermittlung zum Unterrichtsgegenstand machen lassen. Textaufgaben können einen Anstoß geben, einen solchen Sachbereich zu analysieren, und zwar sowohl in Bezug auf die dabei auftretenden mathematischen Verfahrensweisen als auch in Bezug auf die inhaltlichen Zusammenhänge.

Es ist denkbar, daß eine Textaufgabe, so verstanden, oftmals nur den Ausgangspunkt bildet für ein kleineres oder größeres Unterrichtsprojekt.

Mathematische Begriffsbildungen und Techniken müssen durch Übungen gefestigt werden. Zu üben ist aber in vielen Fällen nicht

ein Rechenverfahren als solches, sondern seine immer wieder neue und andere Anwendung auf verschiedene Sachprobleme, Werkstatt, Tankstelle, Sparkassenschalter, Bastelarbeit, eine Vielzahl von Situationen, auf die mathematische Kenntnisse und Verfahrensweisen anzuwenden sind, werden immer wieder durch Sprache vermittelt.

Für die Stellung eines Problems und zur Motivation kann man auch andere Medien heranziehen, z.B. Filme, Bilder, Spielsituationen oder (physische) Modelle. Aber auch dann sind die Situationen von der Lehrerin vermittelt und nicht unmittelbar vom Schüler erfahren. Das Medium *Sprache* ist jedoch so wichtig, daß man im Mathematikunterricht nicht auf die Möglichkeit verzichten sollte, das Vorstellungsvermögen der Schüler in Bezug auf sprachlich repräsentierte Sachverhalte zu schulen. Nicht nur global in Bezug auf die Vorstellung einer Situation, sondern auch in Bezug auf die Einzelheiten eines Textes gilt:

Ein sinnvoller Weg zur Lösung eines mit dem Text gegebenen Problems wird sicherlich nur dann gefunden, wenn der Schüler die auftretenden Begriffe und Ausdrücke genau erfaßt und wenn er ihre Beziehungen sowohl untereinander als auch zu evtl. anwendbaren mathematischen Mitteln durchschaut. Das Lösen von Textaufgaben zwingt also zu einem bewußteren Umgang mit der Sprache. Der Schüler soll lernen, einen Text daraufhin zu überprüfen, was er über ein Sachproblem aussagt, und er soll lernen, die gegebenen Informationen genau zu erfassen und zu ordnen.

Typen von Textaufgaben: Den verschiedenen Zielsetzungen bei Textaufgaben entsprechend wird mitunter auch terminologisch zwischen verschiedenen Aufgabentypen unterschieden, so z.B. zwischen *Sachaufgaben*, *Textaufgaben* und *Einkleidungen* von Rechenoperationen.

Bei *Sachaufgaben* geht es vor allem um Einsicht in den *Sachzusammenhang*. Rechenoperationen und sonstige mathematische Methoden sind Hilfsmittel dazu. Die Aufgabenstellung kann z.B. in einem Arbeitsauftrag bestehen: „Vergleiche die Einwohnerzahlen der Großstädte in NRW.“ Sie könnte auch durch die Bereitstellung von geeignetem Material wie Zeitungsausschnitten, Tabellen oder anderen Objekten erfolgen.

Den Gegenpol zu den Sachaufgaben bilden *eingekleidete Aufgaben*. Das Erkennen und Üben einer Rechenoperation bzw. eines Lösungsverfahrens

steht ganz im Vordergrund und der jeweilige Sachzusammenhang ist austauschbar und fast ohne Bedeutung. Gelegentlich kommt dies schon in der Aufgabenstellung zum Ausdruck:

- 5 kg einer Ware kosten 8,50 €. Wieviel kosten 7 kg?

Unter „einer Ware“ kann man sich alles oder nichts vorstellen. Das Rechnen allein ist hier wesentlich. Solche Aufgaben erfüllen durchaus ihren Zweck, das Erkennen von Rechenoperationen und Verfahren im Text zu üben, beim obigen Beispiel also etwa die Schlussrechnung. Wenn aber in dieser Weise für eine anonyme Ware Ein- und Verkaufspreise, Preissteigerungen, Gewinnspannen usw. berechnet werden, so ist die Gefahr der Blindheit gegenüber Inhalten besonders groß.

Von einer *Textaufgabe* ist erst dann zu sprechen, wenn der Sachzusammenhang mitdiskutiert wird, so daß ein ausgewogenes Verhältnis zwischen rechnerisch mathematischem Aspekt und Erörterung eines Sachverhaltes entsteht.

Die Grenzen zwischen den Aufgabentypen sind fließend. Entscheidend ist vor allem, in welcher Weise die Aufgaben jeweils behandelt und mit welcher Zielsetzung sie eingesetzt werden. So könnte in der Sekundarstufe I eine Aufgabe zur Prozentrechnung lauten:

Eine Ware kostet beim Großhändler 6,50 € und wird beim Einzelhändler 2 € teurer verkauft. Wie hoch ist die Handelsspanne?

Hier ist lediglich die Berechnung eines Prozentsatzes eingekleidet, doch es entsteht sofort eine interessante Sachaufgabe, wenn man nur einige Zusatzfragen stellt (bzw. von den Schülern finden lässt), z.B.

- Ist die Handelsspanne nicht sehr hoch?
- Um was für eine Ware könnte es sich handeln?
- Wie hoch sind die Handelsspannen in verschiedenen Branchen?
- Woher kommen diese Unterschiede und sind sie gerechtfertigt?
- Welche Funktion hat der Großhandel in unserer Wirtschaft?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Umsatzhöhe und Handelsspanne?

Eine große Zahl scheinbar belangloser Textaufgaben gewinnt durch solche Zusatzfragen den Charakter kleinerer Umterrichtungsprojekte. Umgekehrt wäre eine derartige Ausweitung der Aufgaben nur eine Belastung, wenn es darum geht, ein gerade kennengelerntes Rechenverfahren zu üben. Das Erkennen des Lösungsweges aus dem Text heraus und das Umgehen mit den für verschiedene Sachbereiche charakteristischen Größen müssen bis zu einer gewissen Sicherheit entwickelt werden, und dies ist ohne Übung anhand einfacher Textaufgaben kaum möglich. Nur selten dürfte es möglich sein, gewissermaßen abstrakt das mathematische Instrumentarium bereitzustellen, um dann unmittelbar „richtige Sachprobleme“ in Angriff zu nehmen.

Zur Gestaltung von Aufgabentexten: Durch Arbeitsweise und Zielsetzung bei der Behandlung von Textaufgaben werden auch die in Bezug auf ihre sprachliche Gestaltung meist gestellten Fragen relativiert. Diese Forderungen lassen sich unter den Stichworten *Vollständigkeit*, *Eindeutigkeit* und *Verständlichkeit* des Textes zusammenfassen.

Die Forderung nach *Vollständigkeit* betrifft vornehmlich die für die Bearbeitung eines Sachproblems erforderlichen Angaben und Daten, die ja die Voraussetzung für die weitere Arbeit der Schüler bilden.

Beispiel:

Bei Familie Hermann soll das 28 m² große Wohnzimmer renoviert werden. Die Wände sollen neu tapeziert werden, die Decke soll gestrichen und der Fußboden soll mit Teppichfliesen ausgelegt werden. Welche Kosten sind ungefähr zu erwarten?

Hier wären noch zahlreiche weitere Angaben notwendig: Welche?

Man kann den Text aber auch als Aufforderung an die Schüler verstehen, all diesen Fragen selbständig nachzugehen, die Raumhöhe in einem Wohnhaus im Vergleich zum Klassenzimmer zu schätzen, Preise für verschiedene Materialien zu erkunden oder - bei mehr mathematischer Akzentsetzung - um zu erfahren, dass der Flächeninhalt der Seitenflächen durch den des Fußbodens und die Raumhöhe durchaus noch nicht festgelegt ist, dass man aber zeigen kann, welchen Umfang das Zimmer mindestens haben muss, usw.

Nach BREIDENBACH gehört zur Vollständigkeit eines Aufgabentextes auch, dass er die Frage mit enthält. Man könnte dem vielleicht zustimmen, wenn

es z.B. bei Hausaufgaben um Übungen zur Berechnung einzelner ganz bestimmter Größen geht, obwohl auch hier der Hinweis von W. OEHL gilt, dass bei vielen Aufgaben die Fragestellung eindeutig aus dem geschilderten Text hervorgeht und dass der Schüler zielempfindlich werden soll, dass er lernen soll, zu erfassen, worauf es ankommt. Bei einer Sachaufgabe im Sinne der obigen Erklärung könnte eine Frage nach einer einzelnen Größe eher schaden, indem die Betrachtungen von vornherein auf dieses Einzelergebnis fixiert sind, so dass die den Gegenstandsbereich erschließenden Fragen gar nicht mehr gestellt werden. Ob es sinnvoll ist, eine Aufgabenstellung mit einer klaren Fragestellung abzuschließen, kann man also keinesfalls einheitlich beantworten, sondern dies hängt vom jeweiligen Ziel und der jeweiligen Aufgabenstellung ab.

Verzichtet die Lehrerin auf die Frage, so muss sie allerdings bereit sein, auch Fragen und Lösungen zu akzeptieren, die vom Erfahrungshintergrund eines Kindes her Sinn machen. So hielt z.B. vor 20 Jahren eine Lehrerin bei der Aufgabenstellung

- Eine Wäscherei hat zwei ihrer Autos in der Autowerkstatt zur Inspektion gehabt. Beim ersten waren 470 DM an die Werkstatt zu zahlen, beim zweiten waren es 650 DM.

in einer Klassenarbeit (!) nur die Frage „Wie viel DM sind insgesamt zu zahlen?“ für sinnvoll und „richtig“. Es gab allerdings eine Schülerin, deren Lösung nicht in dieses Konzept passte:

- Frage: Wie viel DM war die Rechnung beim zweiten Auto höher?
- Rechnung: $650 \text{ DM} - 470 \text{ DM} = 180 \text{ DM}$.
- Antwort: Für das zweite Auto waren 180 DM mehr zu zahlen.

Würden Sie auch für die Frage und die Antwort wegen „Unsinnigkeit“ 0 Punkte geben und nur die richtige Rechnung werten? (Das Kind kam aus einem Elternhaus, in dem in Gesprächen der Eltern öfters festgestellt wurde, dass der kleinere Zweitwagen bei Inspektionen teurer wegkam als das grosse Familienauto!)

Die Forderung nach *Eindeutigkeit* des Textes ist weniger problematisch. Die scheinbar eindeutige Arbeitsanweisung „vergleiche Einkaufs- und Verkaufspreis“ kann mindestens auf dreierlei Weise ausgeführt werden: Man

kann den Differenzbetrag bestimmen, man kann das Verhältnis der beiden Beträge bilden, oder man kann den Preiszuschlag in Prozent des Einkaufspreises berechnen. Um eindeutig zu sein, müsste es z.B. heißen:

Um welchen Betrag ist die Ware teurer geworden?

Bestimme das Verhältnis von Einkaufs- und Verkaufspreis!

Um wieviel Prozent des Einkaufspreises verteuert sich die Ware?

Und doch kann das mehrdeutige „vergleiche“ seine Berechtigung haben, nämlich dann, wenn die verschiedenen Möglichkeiten des Vergleichens selbst zur Diskussion gestellt werden sollen.

Was schließlich die *Verständlichkeit* eines Textes betrifft, so sind vor allem die folgenden Kriterien zu beachten:

Vertrautheit des Schülers mit den auftretenden Begriffen,

einfache Syntax

und nach Möglichkeit eine Übereinstimmung der für die Aufgabenlösung notwendigen Rechenschritte mit der Reihenfolge, in der die betreffenden Daten im Text erwähnt werden.

Im Einzelnen: Neue Begriffe müssen erklärt werden, und komplizierte Satzgebilde sollten durch eine Kette einfacher Hauptsätze ersetzt werden, in denen die benötigten Rechenoperationen in der *richtigen* Reihenfolge vorkommen. Man wird sich dieser Forderung nach einer einfachen Sprache kaum verschließen können, doch bleibt Folgendes zu bedenken: Die Sprache der Aufgaben sollte auch ihrer syntaktischen Kompliziertheit nach altersgemäß sein. Wenn Schüler z.B. mit Konditionalsätzen nicht richtig umgehen können, so müssen sie dies gerade im Mathematikunterricht nach und nach lernen, und es wäre töricht, grundsätzlich alle Konditionalsätze in Sachaufgaben meiden zu wollen. Die folgende Textaufgabe verstößt z.B. gegen einige der oben genannten Forderungen zur Textgestaltung :

Herr Maurer hat 5500,- € Schulden und verkauft ein gebrauchtes Auto. Er überlegt: Ich bekomme ja noch 500,- € Nachzahlung für Überstunden seit Januar. Wenn ich die zusammen mit dem Geld für das Auto zur Tilgung verwende, bleibt nur noch eine Restschuld von 3000,- €.

Welchen Preis erwartet er für sein Auto ?

Man wird zugeben müssen, dass der Konditionalsatz hier nicht willkürlich verwendet wird und dass es auch sinnvoll ist, die Schuld, die den Ansatzpunkt der Überlegung bildet, als erste Größe zu nennen, obwohl dies *nicht* dem Vorgehen bei der Lösung entspricht.

Umgangssprache und mathematische Operationen bei Sachaufgaben

Die mathematischen Kenntnisse und Methoden, die schon dem Grundschüler bei der Bewältigung einfachster Sachaufgaben zur Verfügung stehen, sind sehr begrenzt. Funktionale Zusammenhänge wie der zwischen Seitenlänge und Umfang oder Flächeninhalt eines Quadrats treten nur in Einzelfällen auf. Kompliziertere Formeln, etwa die für die Volumina verschiedener Körper kommen in der Grundschule nicht vor. Die Proportionalitäten, als spezielle lineare Funktionen, werden in der Regel erst im 7. Schuljahr behandelt, nicht-lineare Funktionen, wie sie schon für einfache physikalische Zusammenhänge, etwa bei den Fallgesetzen, wichtig werden, noch später.

Im Wesentlichen bildet also eine Anwendung der sogenannten vier Grundrechenarten den mathematischen Kern der elementaren Text- bzw. Sachaufgaben, wie sie dem Grundschüler überhaupt nur zugänglich sind, wie sie aber auch weit in die Sekundarstufe I hinein immer wieder auftreten. Das Lösen einer solchen Aufgabe reduziert sich - theoretisch gesehen - auf zwei Probleme: das Erkennen der benötigten Rechenoperationen und das Auffinden der richtigen Verkettung der einzelnen Operationen, im wesentlichen also das Auffinden einer zweckmäßigen Reihenfolge für ihre Anwendung.

Dass nach aller Erfahrung die Schwierigkeiten der Schüler bei der Bearbeitung einfacher Textaufgaben ganz erheblich sind, mag in manchen Fällen an fehlender Motivation liegen, es dürfte aber auch in der Sache selbst begründet sein:

1. Den vier Grundrechenarten und ihrer Verkettung auf der einen Seite steht auf der anderen Seite eine riesige Fülle von Sachbereichen gegenüber, die in den Aufgaben angesprochen werden, und ebenso ist die Vielfalt der umgangssprachlichen Wendungen fast unübersehbar, hinter denen sich ein Hinweis auf die benötigten Rechenoperationen

verbergen kann, die aber ebenso auch irreführend sein können. Der Schüler hat also jeweils neu einen Abstraktionsprozess vom im Text gegebenen Sachverhalt zur nüchternen Rechnung zu leisten.

2. Die Kombination oder Verkettung der verschiedenen Rechenoperationen, die für die Lösung benötigt werden, gehorcht keinen festen Gesetzmäßigkeiten und ist oft nicht einmal eindeutig festgelegt. Die Anwendung einer mathematisch durchaus anspruchsvollen Volumenformel ist so gesehen meist einfacher als der variantenreiche Umgang mit den Grundrechenarten.

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst den Übersetzungs- bzw. Abstraktionsprozess vom im Aufgabentext umgangssprachlich wiedergegebenen Sachverhalt zur Rechenoperation näher verfolgen, wobei wir auf die typischen sprachlichen Wendungen und die bei Textaufgaben damit verbundenen Schwierigkeiten eingehen wollen. Dies kann allerdings nicht vollständig sein.

Als sprachliche Hinweise auf eine *Addition* können auftreten:

- und (in einer Aufzählung),
- zusammen, insgesamt (nach einer Aufzählung),
- anwachsen um ..., vermehren um ...;
- hinzunehmen, hinzubekommen, gewinnen,
- Zuwachs, Zuschlag, Gewinn, Anstieg.

Ein sprachlicher Hinweis kann auch ganz fehlen, so dass die Rechenoperationen allein der beschriebenen Sachsituation zu entnehmen sind:

Peter ist unordentlich. Er hat in seiner rechten Hosentasche zwei 1 €-Münzen, in der linken fünf 10 Ct-Münzen, in der Jacke eine 2 €-Münze. Kann er sich einen Schiffsbausatz zu 6,75 € leisten?

Bei dieser Aufgabe sind - von der nachfolgenden Differenzbildung abgesehen - die verschiedenen zu addierenden Posten gewissermaßen räumlich nebeneinander gegeben. Es gibt jedoch auch Aufgaben, in denen das zeitliche Nacheinander vorkommt:

Jemand kauft ..., dann ..., dann ... und schließlich noch Reicht ein Guthaben von 200,- € auf der Geldkarte dafür aus?

Weit verwirrender und für den Schüler schwerer zu erfassen sind die sprachlichen Wendungen, die im Zusammenhang mit der Subtraktion verwendet werden können. Dabei ist interessant, dass der mathematische Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion ein deutliches Analogon in der Umgangssprache besitzt:

1. Die *Subtraktion* ist die Umkehroperation der Addition. In einem rein mathematischen Aufbau des Zahlensystems wird in der Regel definiert:

$$b = c - a \iff a + b = c$$

Umgangssprachlich:

Der Wasserspiegel von 3,0 m ist um 1,2 m angestiegen. Welchen Pegelstand hat man jetzt? (Addition)

Der Wasserspiegel ist von 3,0 m auf 4.2 m angestiegen. Wie groß war der Anstieg? (Subtraktion)

Der Wasserstand ist um 1,2 m auf 4.2 m angestiegen. Welches war der vorhergehende Pegelstand ? (Subtraktion)

Die Formulierung "angestiegen", die auf eine Addition hinzuweisen scheint, beschreibt hier im wesentlichen also nur die Gleichung

$$\text{alter Pegelstand} + \text{Anstieg} = \text{neuer Pegelstand.}$$

Ob zu addieren oder zu subtrahieren ist, hängt allein davon ab, nach welcher der drei Größen gefragt ist.

2. Wie das obige Beispiel gezeigt hat, ergeben sich aus $a + b = c$ die beiden Differenzbildungen $b = c - a$ und $a = c - b$. Es gilt

$$c - b = a \iff c - a = b.$$

Auch dies kommt in der Umgangssprache zum Ausdruck, wobei dann das benutzte Verb auf eine Differenzbildung hinweist:

absinken von ... auf ...

absinken um ...,

In der Gleichung

$$\text{alter Wasserstand} - \text{Abnahme} = \text{neuer Wasserstand}$$

kann einmal nach dem neuen Wasserstand (der Differenz) und einmal nach der Abnahme (dem Subtrahenden) gefragt werden. Eine solche Gleichung beschreibt also den zugrunde liegenden Sachverhalt eigentlich deutlicher als der ursprüngliche Aufgabentext und kann deshalb auch als Zwischenglied auf dem Weg vom Lesen einer Textaufgabe zu ihrer rechnerischen Lösung eine wichtige Hilfe sein.

Vielfach wird auch mit dem Modell

Zustand – Handlung (oder Vorgang) – Zustand
 (alter Wasserstand) – (Abnahme) – (neuer Wasserstand)

gearbeitet. Wenn man eine feste Abnahme als Operator (Abbildung) auffasst, durch den jedem Anfangszustand ein bestimmter Endzustand zugeordnet wird, so ergibt sich das Schema:

$$c \xrightarrow{-b} a$$

Die psychologische Genese der Rechenoperation von Handlungen her ist dabei noch deutlich, doch muss man beachten, dass die Äquivalenz

$$c - b = a \iff c - a = b$$

dann nicht trivial ist, da einmal ein Zustand und einmal ein Operator erfragt wird.

Wir geben in Stichworten noch einige weitere sprachliche Wendungen zur Subtraktion an:

- Ein Schüler erreicht in einem Test fünf Punkte weniger als ...
- Um wieviel ist ... größer als ...?
- übrig bleiben,
- wegnehmen, verlieren, ausgeben,
- Rest, Unterschied,
- Vergleiche ... und, ...!

Überprüfen Sie selbst, welche dieser Stichworte eindeutig auf eine Subtraktion hinweisen, welche sowohl bei der Subtraktion und Addition auftreten

können und wie sie verwendet werden, wenn nach der Differenz, nach dem Subtrahenden oder nach dem Minuenden gefragt ist. Überlegen Sie sich auch Beispiele, in denen ein direkter Hinweis auf die Subtraktion ganz fehlt.

Für die *Multiplikation* und *Division* gelten die bisherigen Überlegungen ganz analog. Insbesondere hat man bei der Multiplikation die Möglichkeit der räumlichen und zeitlichen Vorstellung.

Räumlich: Im Regal standen fünf Kisten mit je sechs Flaschen.

Zeitlich: Er ging fünfmal in den Keller und holte jedesmal sechs Flaschen.

Operation und Umkehroperation sind auch hier sprachlich eng aufeinander bezogen, z.B.:

Es ist zu befürchten, dass sich der Brotpreis von gegenwärtig 2,50 € pro kg in den kommenden zwanzig Jahren verdreifachen wird. Wie hoch wird er sein? (Multiplikation)

Schließlich gibt es zwei Möglichkeiten, die Multiplikation umzukehren:

Teilen oder *Verteilen* einerseits und *Aufteilen*, *Einteilen* oder *Messen* andererseits:

Ein Kaufmann hinterlässt ein Vermögen von 150 000,- €. Er hat vier gleichberechtigte Erben. Wieviel erhält jeder? (*Verteilen*, nämlich Verteilen der Erbschaft an vier Erben, gefragt ist nach einer Größe)

Ein Grundstück von 42 m Breite und 30 m Tiefe soll mit Reihenhäusern zu 7 m Breite bebaut werden. Wie viele Häuser kann man unterbringen, wenn jedes 10 m tief ist? (*Aufteilen*, nämlich Aufteilen der Länge 42 m in Längen von 7 m bzw. Messen einer Strecke von 42 m Länge mit einer 7 m langen Strecke als Maßeinheit, gefragt ist nach einer (nat.) Zahl)

Bei beiden Beispielen fehlt übrigens ein sprachlicher Hinweis auf die Rechenoperation!

Insgesamt sind die sprachlichen Hinweise auf Multiplikation und Division aber weniger vielfältig und verwirrend als bei der Addition und Subtraktion. Fast immer finden sich Ausdrücke wie

je, jeweils, jeder,..., -mal,..., -fach,

und wo solche Hinweise ganz fehlen, ist die Situation fast immer dadurch gekennzeichnet, dass

derselbe Vorgang mehrfach wiederholt wird,

eine Anzahl gleicher Teile vorkommt,

gleich starke Gruppen zu bilden sind usw.

Dies erklärt unter Umständen auch, dass bei Untersuchungen zur Erstellung eines Lernprogramms zum Lösen einfacher Sachaufgaben die Multiplikation sich als die am einfachsten zu erkennende Rechenoperation erwies.

Struktur einfacher Textaufgaben – Simplexverfahren und Rechenbäume

Bei der Analogie zwischen umgangssprachlichen Wendungen und Eigenschaften der Subtraktion wurde bereits auf die Bedeutung der dabei auftretenden Größentripel, z.B.

alter Wasserstand – Abnahme – neuer Wasserstand

hingewiesen. Dass solche Tripel von Größen bei allen Sachaufgaben auftreten, die mit Hilfe der elementaren Rechenoperationen gelöst werden können, liegt in der Natur der Sache. Eine Rechenoperation lässt sich als dreistellige Relation auffassen, wie es z.B. in der Formulierung

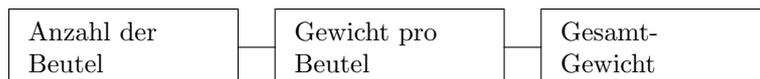
„z ist Summe von x und y“

zum Ausdruck kommt. Es ist deshalb naheliegend, die in Sachaufgaben auftretenden *Größentripel* hervorzuheben, und zwar unter mehreren Gesichtspunkten, nämlich

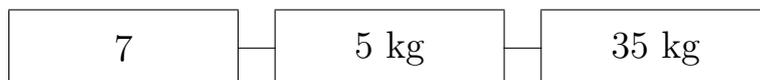
1. für den Schüler als Hilfe bei der Analyse des Sachverhalts und für das Erkennen der jeweiligen Rechenoperationen,
2. zur Verdeutlichung der Verkettung und Abfolge mehrerer Rechenoperationen beim Lösen der Aufgabe,
3. für den Lehrer als Hilfe bei der Analyse von Aufgaben im Bezug auf ihre Komplexität und den Schwierigkeitsgrad.

Nach BREIDENBACH wird ein derartiges Größentripel als *Simplex* bezeichnet und schematisch wie im folgenden Aufgabenbeispiel dargestellt:

Herr Meister kauft 7 Beutel Kartoffeln. Jeder Beutel enthält 5 kg Kartoffeln. Wie schwer sind die Kartoffeln insgesamt?



Oder unter Verwendung der speziellen Größen:



Abstrahiert man wie in der ersten Darstellung von den speziellen Maßeinheiten und Maßen der Größen in den einzelnen Aufgaben, so erhält man Modelle wichtiger Sachzusammenhänge, die sich unter Einschluss der jeweils zugehörigen Rechenoperation dem Schüler nach und nach einprägen und die dann gewissermaßen als Bausteine für komplexere Sachprobleme dienen können:

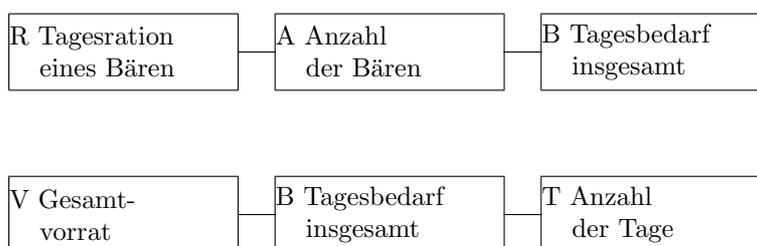
Nettogewicht	+	Verpackungsgewicht	=	Gesamtgewicht
Geldbetrag	-	Preis der Ware	=	Restbetrag
Stückzahl	·	Gewicht des Einzelstücks	=	Gesamtgewicht
Gesamtkosten	:	Stückzahl	=	Stückpreis
Anzahl d. Liter	·	Literpreis	=	Gesamtpreis
Gesamtverbrauch	:	Anzahl der Tage	=	Tagesbedarf
Geschwindigkeit	·	Fahrzeit	=	zurückgelegte Wegstrecke
usw.				

Bei den letzten Beispielen fällt auf, dass die zu einem Simplex gehörenden Größen, z.B. Wegstrecken (Längen), Fahrzeiten (Zeitspannen) und Geschwindigkeiten, verschiedenen Größenbereichen angehören. Der begriffliche Hintergrund für Ausdrücke wie „Wegstrecke pro Zeiteinheit“, „€ je Liter“, bei denen man auch von abgeleiteten oder zusammengesetzten Größen, von Größenverhältnissen oder bei geeigneter Interpretation auch von Quotienten verschiedener Größen sprechen kann, ist durchaus nicht leicht zu erfassen. In Bezug auf das elementare Sachrechnen ist jedoch

festzuhalten: Dies abgeleiteten Größen sind für den Schüler selbständige Größen. In der Tat gelten für sie die Gesetze des Größenbereichs, und ihr Zusammenhang mit anderen Größen, wie er in einem Simplex zum Ausdruck kommt, wird vom Schüler der Erfahrung entnommen und intuitiv erfasst.

Was die Zusammenfassung oder Verkettung von mehr als einem Simplex zu einer komplexeren Teilaufgabe betrifft - man spricht kurz von einem *Komplex* - soll an einem Beispiel erläutert werden:

Für vier Bären hat der Tierpfleger 48 kg Fleisch gekauft. Jeder Bär frisst täglich 2 kg Fleisch. Wie lange reicht der Vorrat?

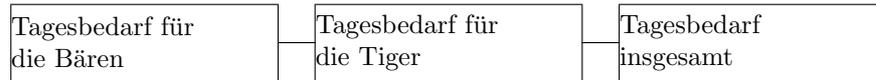


Hier sind im ersten Simplex zwei von drei Größen bekannt, die dritte ist berechenbar. Der Tagesbedarf insgesamt (B) tritt als Hilfsgröße oder Zwischenlösung auf, und damit sind auch im zweiten Simplex zwei von drei Größen bekannt, die dritte ist berechenbar.

Wie aber erkennt der Schüler die zweckmäßige Reihenfolge der Simplexe, die wir von vornherein gewählt haben? Das Problem wird noch deutlicher, wenn die Aufgabe etwas umfangreicher ist:

Ein Tierpfleger hat vier Bären und sechs Tiger zu versorgen. Jeder Bär frisst täglich 2 kg, jeder Tiger 2,5 kg Fleisch. Wie lange reicht ein Fleischvorrat von 115 kg?





Hier sind die Simplexe willkürlich angeordnet und die zu benutzende Reihenfolge ist nicht vorgegeben. Außerdem ist sie nicht eindeutig.

Wir gehen noch einmal zum ersten der beiden Beispiele zurück, um mit anderen Lösungswegen zu vergleichen. Statt den Tagesbedarf für vier Bären (B) und dann die erfragte Anzahl der Tage zu berechnen, könnte man aus dem Gesamtvorrat (V) und Anzahl der Bären (A) im ersten Schritt auch den Vorrat pro Bär (V_B) bestimmen, also

$$V : A = V_B$$

und aus diesem und der Ration eines Bären (R) dann die Anzahl der Tage, also

$$V_B : R = T.$$

Diese Lösungsmöglichkeit ist in der obigen Darstellung nicht zu erkennen, ein Nachteil, der bei einer von H. BAUERSFELD vorgeschlagenen Variante des Simplexverfahrens wegfällt:

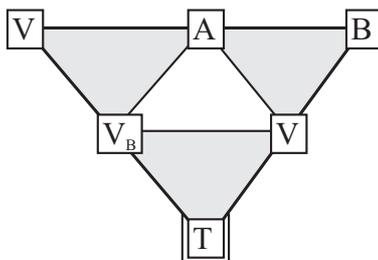


Fig. 1

Die drei Ecken eines Simplex bilden jeweils die Ecken eines Dreiecks. Jedoch nicht alle Tripel bilden ein sinnvolles Simplex, sondern nur die an den Ecken der gefärbten Dreiecke stehenden. Schließlich bilden auch die drei „äußeren Ecken“ mit V, B und T ein Simplex.

Die Figur ist also noch zu vervollständigen:

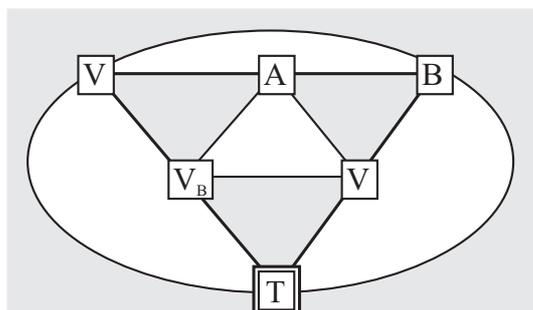


Fig. 3

Damit sind alle Beziehungen zwischen den in der Aufgabe auftretenden Größen erfasst. Der Lösungsweg ist beliebig, es kommt nur darauf an, bei einem Simplex zu beginnen, von dem zwei der drei Größen bekannt sind. Die symmetrische Struktur dieser einfachen Aufgabe wird besonders deutlich, wenn man sich das entstandene Netz räumlich, etwa über eine Kugel gespannt vorstellt.

Hierbei fällt auf, dass die verschiedenen Simplexe immer nur an den Ecken zusammenstoßen, und man könnte daher vermuten, dass sich zwei Größen - wenn überhaupt - mit Hilfe der elementaren Rechenoperationen nur auf eine einzige Weise zu einer dritten verknüpfen lassen. Dass dies nicht so ist, kann man jedoch bei den Größen Länge, Fläche und Volumen eines Körpers erkennen:

Ein Quader hat eine Grundfläche (F) von 32 cm^2 und eine Länge (L) von 8 cm . Er ist ebenso breit wie hoch (H). Man bestimme sein Volumen (V).

Man erhält folgende Simplexdarstellung:

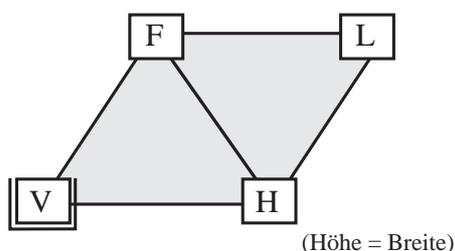


Fig. 1

In der Simplexdarstellung, gleich welcher Variante, ist die jeweilige Rechenoperation nicht zu erkennen. Man kann dies positiv sehen: Für ein und dasselbe Größentripel kommt ja mit einer Rechenoperation stets auch ihre Umkehrung in Frage, je nachdem, welche der drei Größen zu bestim-

men ist. Andererseits wird auch nicht deutlich, ob es sich um eine additive oder multiplikative Verknüpfung handelt.

Bei den sogenannten *Rechenbäumen*, wie sie vor allem von H. WINTER und T. ZIEGLER empfohlen wurden, wird auch die jeweilige Rechenoperation im grafischen Schema einer Sachaufgabe angegeben. Im Gegensatz zur Simplexdarstellung gehören dann allerdings zu verschiedenen Lösungswegen ein und derselben Aufgabe stets auch verschiedene Rechenbäume. Für das obige Beispiel der Bärenfütterung sieht dies so aus:

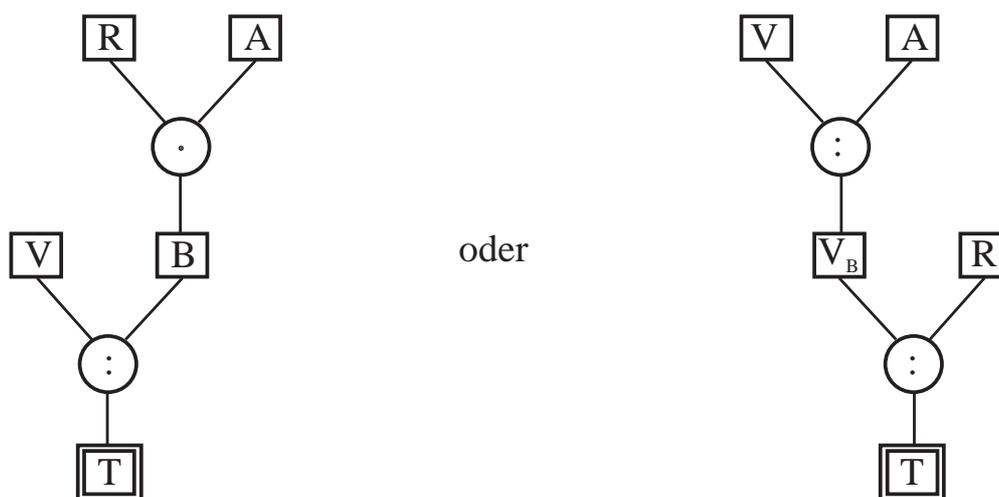


Fig. 2

In Bezug auf Subtraktion und Division muss man sich dabei an die Vereinbarung halten, dass das Schema zeilenweise von links nach rechts zu lesen ist, also

$$\begin{array}{l} R \cdot A = B \quad \text{und} \quad V : B = T \quad \text{bzw.} \\ V : B = V_B \quad \text{und} \quad V_B : R = T. \end{array}$$

Von Vorteil ist, dass sich die Rechenbäume auch bei Aufgaben anwenden lassen, die nicht mehr streng in das Simplex-Komplex-Schema passen:

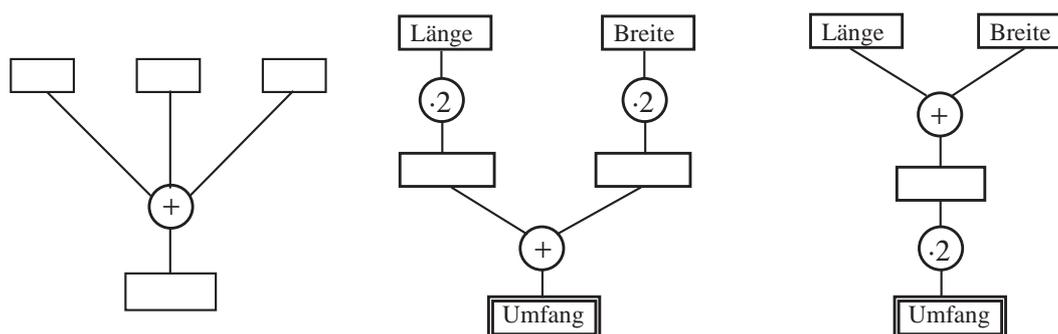


Fig. 1

Dies gilt für die dargestellte Addition mehrerer Posten, für einfachste funktionale Zusammenhänge, wie der Verdoppelung der Seiten eines Rechtecks bei der Berechnung des Umfangs, und insbesondere für Aufgaben (wie die bereits vorgestellte Schuldenaufgabe), die auf eine Bestimmungsgleichung führen:

Herr Maurer hat 5500,- € Schulden (S) und verkauft ein gebrauchtes Auto. Er überlegt: Ich bekomme ja noch 500,- € Nachzahlung (N) für Überstunden seit Januar. Wenn ich die zusammen mit dem Geld für das Auto zur Tilgung (T) verwende, bleibt nur noch eine Restschuld (R) von 3000,- €.

Welchen Preis erwartet er für sein Auto ?

Die Gleichung aus der P zu bestimmen wäre, lautet:

$$S - (N + P) = R,$$

also ist

$$P = S - R - N.$$

Der Rechenbaum unterscheidet sich von den vorhergehenden Beispielen nur dadurch, dass die erfragte Größe am Anfang, also am Ende eines „Zweiges“ steht, so dass der Lösungsweg bei der „Wurzel“ des Baumes beginnend von unten nach oben führt. Dabei ist allerdings folgendes zu beachten:

An die Stelle von Addition und Multiplikation tritt die jeweilige Umkehroperation, bei Subtraktion und Division jedoch nur dann, wenn der Minuend bzw. der Dividend zu bestimmen sind.

Bei Simplex-Darstellungen ebenso wie bei Rechenbäumen stellt sich schließlich die Frage, ob in die Schemata jeweils Begriffe wie „Tagesbedarf“ , Größenangaben bzw. -einheiten wie kg, km usw. oder nur deren Maßzahlen eingesetzt werden sollten:

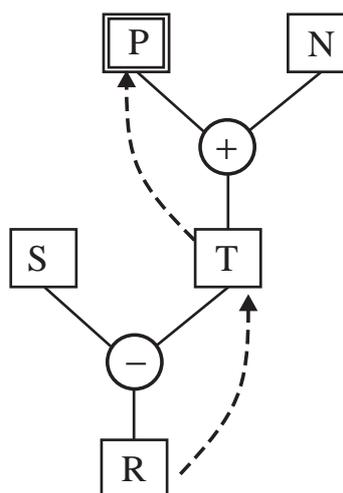


Fig. 1

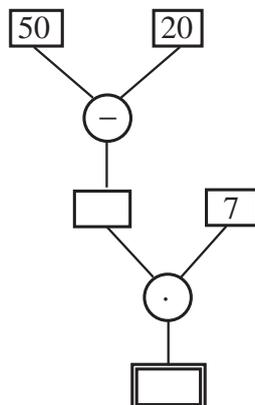


Fig. 2

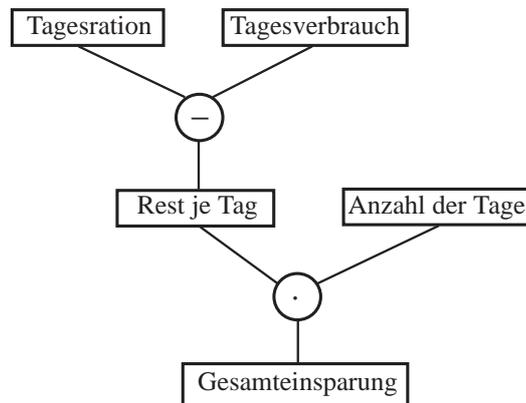


Fig. 3

Ein Rechenbaum zu einer Sachaufgabe wie in Fig. 1 führt zwar ganz unmittelbar auf den für die Lösung benötigten Rechenausdruck (Term) $(50 - 20) \cdot 7$, doch dürfte im allgemeinen die Fixierung eines Sachzusammenhangs wie Fig. 2 wichtiger sein.

Eine solche Darstellung kann trotz aller Kürze und Schematisierung dem Schüler immer noch eine Vorstellung des konkreten Sachverhalts vermitteln, während schon bei einer Beschränkung auf die Angabe der Maßeinheiten nach Art der Dimensionsgleichungen in der Physik jeweils eine Fülle verschiedener Sachsituationen auf dasselbe Schema passen würde.

Nach unseren Überlegungen dürfte eine Angabe von Stichworten vorzuziehen sein, und zwar auch dann, wenn das betreffende Stichwort im Text nicht direkt vorkommt, sondern von Schüler erst gesucht werden muss. Allerdings fällt den Schülern die Formulierung von Begriffen, die nicht explizit im Text vorkommen, oft schwer.

Eine Untersuchung von A. MITSCHKA über Schülerleistungen zu Beginn der Hauptschule erbrachte nicht zuletzt in Bezug auf den Test zum Lösen elementarer Sachaufgaben erschreckend schlechte Ergebnisse. Neben der besonderen Schwierigkeit beim Erkennen der Division zeigte sich dabei vor allem ein sprunghaftes Ansteigen der Fehlerquote beim Übergang von eingliedrigen zu mehrgliedrigen Aufgaben, also vom Simplex zum Komplex. Gerade dieses Ergebnis legt ein Arbeiten mit den hier besprochenen Verfahren zur Darstellung der Struktur einer Sachaufgabe nahe.

Sowohl bei den Rechenbäumen als auch in Bezug auf das Simplex-Komplex-Verfahren lässt sich einwenden, dass man die Struktur einer Aufgabe in dieser Weise nur sichtbar machen kann, wenn man die Zusammenhänge bereits durchschaut hat, dass also die eigentliche Lösung vorausgehen muss und dass somit die geschilderten Verfahren für den Schüler nur eine ge-

ringe Hilfe beim Lösen von Sachaufgaben sein können. Der Einwand ist durchaus berechtigt. Darüber hinaus überzeugt man sich leicht davon, dass es z.B. bei der von BAUERSFELD vorgeschlagenen Simplexdarstellung für etwas umfangreichere Aufgaben gelegentlich schwer sein kann, die Eckpunkte der Simplexe so anzuordnen, dass das entstehende Netz überhaupt noch zu überschauen ist. Trotzdem können Simplexdarstellungen und Rechenbäume wertvolle Hilfsmittel beim *Rückblick* auf Lösungswege sein. Wir fassen daher die bereits genannten Gesichtspunkte, die für eine Beschäftigung mit den genannten Schemata sprechen, noch einmal zusammen:

1. Bei umfangreicheren Aufgaben kann insbesondere die einfacher Darstellung nach BREIDENBACH für den Schüler eine erste Hilfe sein, Übersicht über den Sachverhalt zu gewinnen und zu behalten. Die Probleme der Verkettung mehrerer Rechenoperationen spielen bei der Aufstellung eines solchen Schemas, das ja schon als Gedächtnisstütze von großem Wert ist, keine Rolle.
2. Die Simplexdarstellungen in der von BAUERSFELD vorgeschlagenen Form oder die Rechenbäume können auch für den Schüler *gemeinsame Strukturen* bei *verschiedenen* Aufgaben sichtbar machen. Bei solchen Betrachtungen wird auch bei ganz elementaren Sachaufgaben das allgemeine Lernziel Struktur erfassen mit angesprochen. Werden gleiche oder analoge Lösungswege bei Aufgaben aus verschiedenen Sachbereichen dem Schüler bewusst gemacht, z.B. dadurch, dass man die Problemstellung umkehrt und den Schüler zu gegebenen Simplexkonstellationen oder Rechenbäumen selbst „Geschichten“ erfinden lässt, so trägt dies unter Umständen zur Lösung der einzelnen Aufgabe nur wenig bei. Unabhängig davon, ob ein Transfer zu später zu lösenden Aufgaben stattfindet oder nicht, ist jedoch anzunehmen, dass hier schon bei ganz bescheidenen Problemen deutlich wird, wie anwendungsorientiertes Sachrechnen und abstrakte mathematische Betrachtungsweisen integriert werden können.
3. Für die Lehrerin ist - neben anderen Kriterien - die Zahl der Rechenoperationen, die für die Lösung einer Aufgabe benötigt werden, also die Anzahl der Simplexe und die Art ihrer Verkettung ein wichtiges Maß für den Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung. Dass die Analyse einer Aufgabe für den erfahrenen Lehrer auch im Kopf

erfolgen kann, mindert nicht grundsätzlich die Bedeutung der Erfassung der Aufgabenstruktur mit Hilfe der angegebenen Schemata. Dass die Analyse einer Aufgabe für die erfahrene Lehrerin auch im Kopf erfolgen kann, mindert nicht grundsätzlich die Bedeutung der Erfassung der Aufgabenstruktur mit Hilfe der angegebenen Schemata.

2.3 Grafische Darstellungen im Sachrechnen

Zur Rolle von Veranschaulichungen

Bei den Überlegungen eines Lehrers zur Vorbereitung von Mathematikunterricht oder allgemeiner in der Mathematikdidaktik bei der Entwicklung neuer Curricula lassen sich zwei entgegengesetzte Ansatzpunkte unterscheiden, die sich jedoch wechselseitig bedingen: Man kann von einem Begriff oder Sachverhalt ausgehen, dessen Relevanz unbestritten ist, und kann versuchen, ihn in Mathematikunterricht zu übersetzen, d.h., ihn auf der Ebene der Auffassungsmöglichkeiten der Schüler zu *veranschaulichen*, ein geeignetes *Modell* zu konstruieren oder *anschauliche Beispiele* zu finden. Umgekehrt kann man von einem in der Umwelt gegebenen Sachverhalt ausgehen und versuchen, ihn mit mathematischen Mitteln zu beschreiben, zu ordnen, durchschaubar zu machen und ein mit ihm gegebenes Problem zu *mathematisieren*.

Gerade vom Ansatz des Sachrechnens her könnte man die These vertreten, dass grundsätzlich alles Lernen von Mathematik ein vom anschaulich gegebenen Sachverhalt ausgehender Mathematisierungsprozess sein sollte. Aber selbst dann, wenn sich dieser Ansatz auch in der Praxis konsequent durchhalten ließe, wären Schemata und Skizzen - also Veranschaulichungen - unentbehrliche Hilfsmittel, um die Ergebnisse oder Zwischenergebnisse eines Mathematisierungsprozesses zu klären und zu fixieren.

Veranschaulichungen spielen also in jeder Hinsicht eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht. Daher sollen zuerst die Begriffe *Veranschaulichung*, *Modellbildung* und *Anschaulichkeit* voneinander abgegrenzt werden, um so für die große Vielfalt der im Zusammenhang mit dem Sachrechnen auftretenden Darstellungen ordnende Gesichtspunkte zu gewinnen.

Anschaulichkeit und Veranschaulichungen im Mathematikunterricht

Unter einer *Veranschaulichung* eines mathematischen Sachverhalts wollen wir eine Darstellung verstehen, die einerseits alle wesentlichen Begriffs- und Strukturmerkmale enthält und so den mathematischen Sachverhalt *unmittelbar sichtbar* macht, die aber andererseits möglichst frei von Inhalten ist, die für den zu klärenden Begriff oder Sachverhalt nicht charakteristisch sind. In dem Maße wie diese beiden Kriterien erfüllt sind, kann eine Veranschaulichung ihrem Gegenstand mehr oder weniger *angemessen* sein.

Veranschaulichungen mathematischer Begriffe sind häufig grafische Schemata wie *Venn-Diagramme* oder *Pfeildiagramme*. Aber auch die etwas abstrakteren Darstellungen im Koordinatensystem können ebenso der Veranschaulichung dienen wie andererseits die zur Darstellung von Zahlen benutzten Holzstäbe (*Cuisenaire-Stäbe*) oder ein konkretes Legemodell für den Satz des Pythagoras, mit denen der Schüler hantieren kann. Es ist also nicht so, dass der Begriff der Veranschaulichung oder die Angemessenheit einer Veranschaulichung an eine bestimmte Darstellungsebene im Sinne BRUNERS gebunden wäre.

Bei BRUNER wird in Bezug auf die Repräsentation eines Sachverhalts im Intellekt des Betrachters unterschieden zwischen einer *enaktiven* Ebene der Darstellung (hervorgerufen durch Handlungen, z.B. an konkreten Objekten wie Lernmaterialien), einer *ikonischen* Ebene (hier wird die Darstellung durch Bilder oder Schemata hervorgerufen), und einer *symbolischen* Ebene der Darstellung des Sachverhalts durch Zeichen, Sprache usw.

Es erscheint wichtig, auf der ikonischen Ebene zwischen *bildhaften* und *schematischen* Darstellungen zu trennen. Als Beispiel für diese Unterscheidung denke man einerseits an die bildhafte Darstellung von Mengen in 20 Jahre alten Grundschulbüchern, wo die einzelnen Elemente zeichnerisch oder sogar fotografisch wiedergegeben sind, während andererseits ein Venn-Diagramm schematisch nicht diese Objekte selbst, sondern ihre Zusammenfassung zu verschiedenen Mengen und deren Beziehungen untereinander sichtbar machen soll. Beide, Bild und Schema, werden sinnlich wahrgenommen, doch steht das Schema auf einer höheren Abstraktionsstufe und ist deshalb in unserem Zusammenhang besonders wichtig. Gerade die im Sinne der genannten Kriterien angemessenen Veranschaulichungen mathematischer Begriffe und Strukturen sind ja meist relativ abstrakte Darstellungen. Sie müssen den Allgemeingrad des mathematischen Begriffs

wahren und dürfen durch die speziellen Eigenschaften eines konkreten Objektes nicht zu sehr belastet sein.

Im Gegensatz dazu meint der Begriff der *Anschaulichkeit* mehr den Einzelfall, das prägnante, treffende Beispiel, das zwar durchaus charakteristisch für den fraglichen mathematischen Sachverhalt sein *kann*, das aber dennoch die Farbigkeit und die für den Schüler mitunter verwirrende Vielfalt der Besonderheiten des Einzelfalles trägt.

Die Begriffe *anschaulich* und *abstrakt* werden oft als Gegensatzpaar angesehen, und diese Gegenüberstellung findet sich sogar in Äußerungen über Zielsetzungen und Methoden verschiedener Schulformen. Richtiger sollte man vom *Abstrahieren* als von einem Prozess sprechen, der bei anschaulich Gegebenem ansetzt, gemeinsame, unter einer bestimmten Fragestellung als wesentlich angesehene Merkmale verschiedener Sachverhalte oder Objekte hervorhebt und zugleich von anderen Merkmalen absieht, *abstrahiert*. Wenn Veranschaulichungen häufig schon auf relativ hoher Abstraktionsstufe stehen, so können sie doch selbst wieder Ausgangspunkt für weitere Abstraktionsprozesse sein. Wenn nämlich z.B. ein mathematischer Strukturbegriff auf verschiedene Weisen veranschaulicht wird, so führt das Herauslösen der gemeinsamen Merkmale dieser Veranschaulichungen ja wieder auf die abstrakte Struktur zurück, oder es führt zu einem übergeordneten, allgemeineren Begriff.

Die bisherigen Überlegungen sollen nun anhand einiger weiterer Beispiele verdeutlicht und ergänzt werden:

Die Symmetrie einer Relation wird in einem Pfeildiagramm unmittelbar sichtbar: Zu jedem Pfeil gibt es einen Gegenpfeil:



Fig. 1

Gleichwohl ist eine solche Darstellung recht abstrakt und allgemein, denn in ihr ist abstrahiert (abgesehen) von der speziellen Relation, um die es sich handelt, von der Beschaffenheit der Elemente der zugrunde gelegten Menge, von deren räumlicher Anordnung usw.

Dasselbe könnte man über Mengenbilder zur Veranschaulichung des Sachverhalts $A \subseteq B$ sagen, mit der Einschränkung allerdings, dass volle An-

gemessenheit im Sinne der genannten Kriterien nur für den Begriff „echte Teilmenge“ gegeben ist, da die Darstellung die Möglichkeit $A = B$ gerade nicht sinnfällig zum Ausdruck bringt:

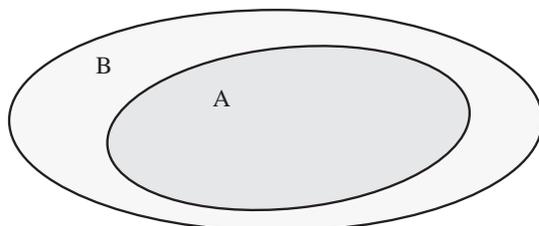


Fig. 1

Im Gegensatz zu diesen Beispielen sind, wenn man von *Anschaulichkeit* spricht, fast immer die einzelnen Objekte selbst bzw. ihr Bild gegeben: z. B. sind das Foto oder die Zeichnung einer Zapfsäule an der Tankstelle, die Abbildung eines Verkehrszeichens mit einer Prozentangabe zur Warnung vor Gefälle, die Wiedergabe einer Schaufensterdekoration oder das Bild einer Gruppe von Personen anschaulich.

Solche Darstellungen lassen zunächst nur in sehr unterschiedlichem Maß erkennen, worauf es ankommt, d.h. unter welcher Fragestellung sie jeweils zu betrachten sind: Bei dem Verkehrsschild ist mit der Angabe 8 % ein Signal gegeben, es sagt aber nichts über die Bedeutung dieses Symbols aus. Bei der Zapfsäule sind zwei Zahlenangaben sichtbar. Die Frage nach ihrem Zusammenhang liegt nahe, doch sagt das Bild - trotz seiner Anschaulichkeit - nichts über diesen Zusammenhang aus. Eine filmische Darstellung, bei der die miteinander gekoppelten Veränderungen der beiden Zahlenangaben zu verfolgen sind, wäre noch anschaulicher und könnte zugleich zu ersten Vermutungen über den Sachverhalt führen. Zu voller Einsicht und Klärung dürften jedoch abstrakte Schemata (z.B. Simplexe oder Rechenbäume, Doppelleitern) wesentlich mehr beitragen.

Die Preisschilder im Schaufenster - also Text und Zahlenangaben und nicht die dargestellten Objekte - enthalten zwar eine Aufforderung zu vergleichen, doch wird die Art des Vergleichs nicht erkennbar.

Beim Bild einer Personengruppe schließlich hat man ohne vorgegebene Fragestellung nicht einmal einen Anhaltspunkt für die Betrachtung. Es könnte um Mengenbildung gehen (z.B. Sortieren nach Art der Kleidung), um eine

Äquivalenzrelation (z.B. ... ist verwandt mit ...) oder um eine Ordnungsrelation (z.B. ... ist größer als ...).

Die Bedeutung von Einzelbeispielen, von Bildern, Filmen oder konkreten Objekten liegt also nicht so sehr in ihrem Beitrag zur Erfassung eines mathematischen Sachverhalts, vielmehr dienen sie dazu, überhaupt erst das Interesse der Schüler für einen Gegenstand zu wecken. Sie sind meist sogar unentbehrlich, und man kann sagen, dass mit der Anschaulichkeit der Darbietung in der Regel auch das Interesse am Gegenstand wächst. Vereinfachend kann man zusammenfassen:

Die *Anschaulichkeit* bildhafter Darstellungen dient der *Motivation*,
Veranschaulichungen dienen der *Klärung* und *Einsicht*.

Zwischen Veranschaulichungen in weitgehend abstrakten schematischen Darstellungen einerseits und anschaulichen Einzelbeispielen andererseits halten sogenannte *mathematische Modelle* eine Mittelstellung: Man kann z.B. den *Gruppenbegriff* repräsentieren in den Regeln verschiedenartiger Spiele mit konkreten Objekten (Drehen und Wenden symmetrischer Figuren) oder Personen (Plätze-Tauschen nach bestimmten Regeln). Dabei ist die mathematische Struktur zweifellos das Primäre, so dass von Veranschaulichung gesprochen werden muss. Andererseits geht hier die Konkretisierung so weit, dass die individuellen Merkmale der im Spiel benutzten Objekte oder die einzelnen Handlungen durchaus anschaulich sind. Nicht immer gelingt es, didaktische Modelle zu finden bzw. zu konstruieren, die in dieser Weise sowohl Motivation als auch Repräsentation des mathematischen Sachverhalts zu leisten vermögen. Aber selbst wo dies gelingt, enthebt es den Mathematikunterricht nicht der Aufgabe, immer wieder von dem Schüler vertrauten Umweltsituationen her Mathematisierungsprozesse einzuleiten, eine Aufgabe, die gerade für das Sachrechnen charakteristisch ist.

Zur Veranschaulichung der im Sachrechnen auftretenden Begriffe

Wir wollen versuchen, diese Überlegungen auf die mathematischen Begriffe und Zusammenhänge des Sachrechnens und insbesondere auf den zentralen Punkt der Abbildungen zwischen Größenbereichen anzuwenden. Dabei werden wir uns auf diejenigen Darstellungen konzentrieren, die der Veranschaulichung und Klärung der mathematischen Zusammenhänge dienen;

denn die im vorigen Abschnitt angeführten Beispiele für Anschaulichkeit als motivierendes Element waren bereits weitgehend dem Bereich des Sachrechnens entnommen.

Die Analyse von Begriffen wie Größe oder Proportionalität zeigt, dass alle derartigen Begriffe in ein enges Netz von Beziehungen und Querverbindungen zu anderen Begriffen eingebunden sind und dass man sie deshalb unter mehreren Aspekten betrachten kann. So kann man beim Größenbegriff z.B.

die Klassenbildung in einem Repräsentantenbereich,

das Ordnen und Addieren von Größen

oder aber das Messen

hervorheben. Beim Begriff der Proportionalität kommen zusammen:

der Abbildungsbegriff,

der Begriff der monotonen und linearen Abbildung,

Additions- und Multiplikationsbedingung als besondere Eigenschaft,

der Verhältnis- und Bruchbegriff,

die Quotientengleichheit

und der Proportionalitätsfaktor als Faktor in einem Produkt.

Wenn wir nun die in den Schulbüchern zu findenden Veranschaulichungen im Sinne des letzten Abschnitts auf ihre *Angemessenheit* hin untersuchen, so zeigt sich, dass in der Regel nur einer der verschiedenen Aspekte hervorgehoben wird, während die übrigen weitgehend zurücktreten. Am Beispiel

der *Proportionalität* und ihrer Behandlung in der Sekundarstufe I soll dies weiter verfolgt werden:

Der Abbildungsbegriff im Sinne der *Zuordnung* wird in einer *Pfeildarstellung* besonders deutlich sichtbar:

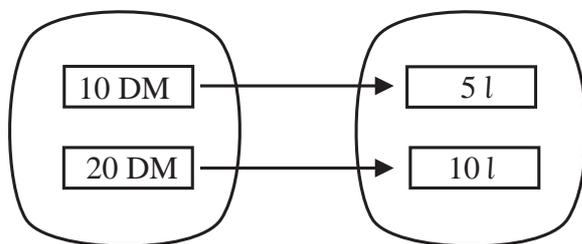


Fig. 1

Die besonderen Eigenschaften der Abbildung sind hier jedoch nicht *sichtbar*, sondern nur durch Rechnung aus den Zahlenangaben des Schemas zu ermitteln.

Die *Monotonie* der Abbildung tritt bei der Darstellung mit Hilfe einer Doppelleiter hervor:

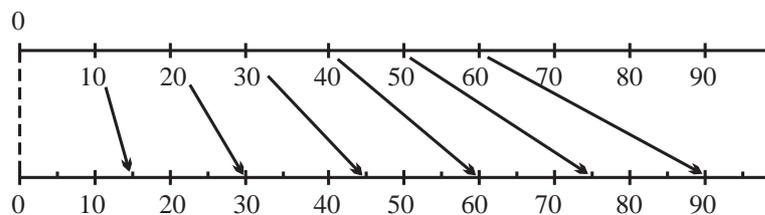


Fig. 2

Bei einer monoton wachsenden Abbildung können sich keine zwei Pfeile in dieser Darstellung überschneiden. Im Gegensatz dazu **müssen** sich bei

einer streng monoton fallenden Abbildung, also z.B. bei einer *Antiproportionalität*, zwei beliebige Pfeile stets kreuzen:

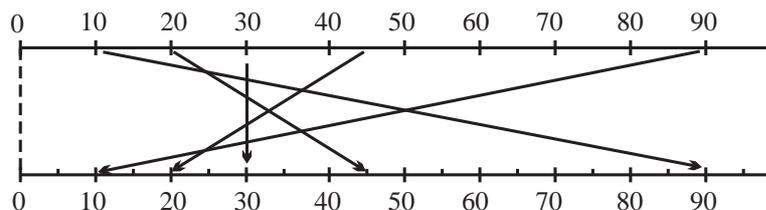


Fig. 1

Die Darstellung im *kartesischen Koordinatensystem* zeigt *Monotonie* und *Linearität*:

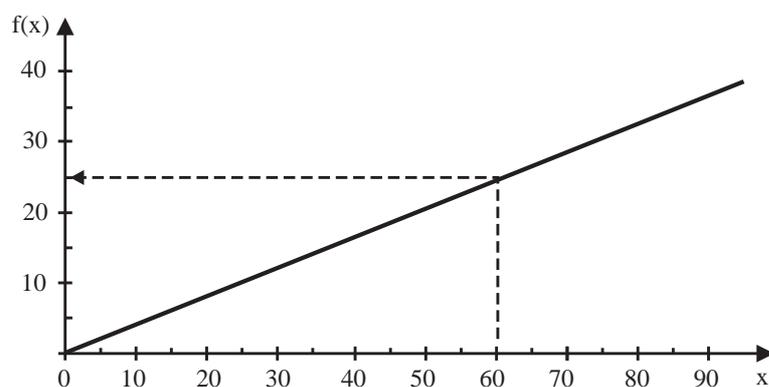


Fig. 2

Der Gedanke der Zuordnung wird hier weniger deutlich, sofern er nicht durch einen zusätzlichen Pfeil angedeutet wird. In der Regel sollte aber die Darstellung einer Abbildung im kartesischen Koordinatensystem den Schülern bei der Behandlung der Proportionalitäten bereits bekannt sein, so dass es nur darauf ankommt, die Eigenschaften einer speziellen Abbil-

dung deutlich zu machen. Und hier erweist sich das kartesische Koordinatensystem als sehr wirksames Mittel.

Additions- und *Multiplikationsbedingung* lassen sich einprägsam festhalten mit Hilfe von Operatordiagrammen:

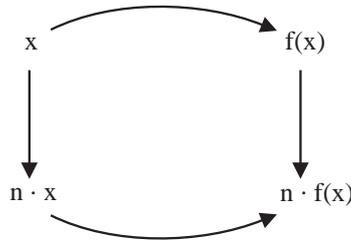


Fig. 1

Doch diese Schemata lassen wiederum die Linearität der Abbildung nicht erkennen.

Die *Quotientengleichheit* kann man verdeutlichen mit Hilfe des entsprechenden geometrischen Sachverhalts bei *ähnlichen* Dreiecken bzw. über die *Strahlensätze*:

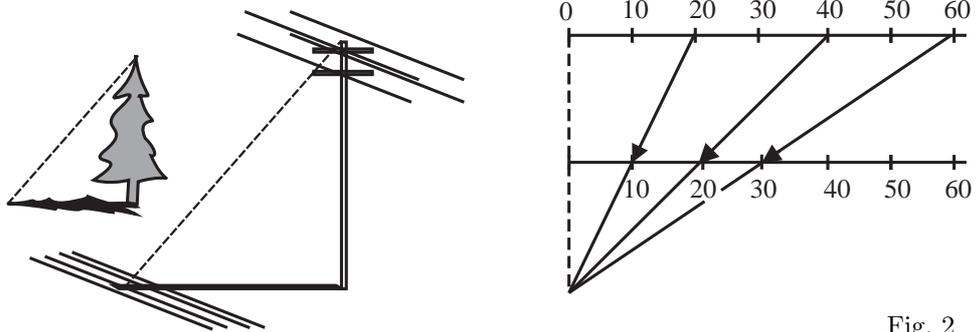


Fig. 2

Hier enthält die linke Darstellung auch anschauliche Elemente. Der Nachteil bzw. Unvollkommenheit beider Darstellungen besteht wieder darin, dass nur einzelne Größenpaare miteinander in Beziehung gesetzt werden, während es sich doch um eine Abbildung zwischen Größenbereichen handelt.

Die Doppelleitern können auch verschiedene Maßstäbe haben, und zwar zweckmäßigerweise so, dass die Zuordnungspfeile parallel sind:

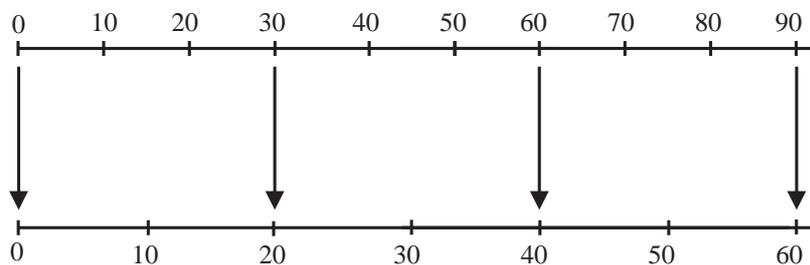


Fig. 1

Dieses Bild ergibt sich mit Hilfe eines konkreten Modells, wenn man eine der beiden Skalen auf einem Gummiband hat und streckt:

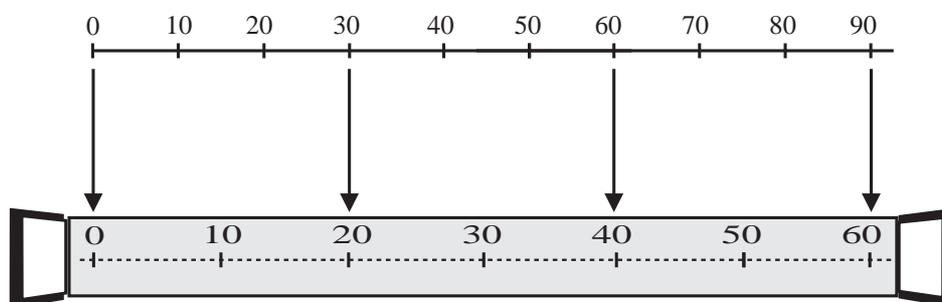


Fig. 2

Mit der Streckung ist aber auch die Beziehung zur Operatorauffassung von Brüchen hergestellt. Der Operatoraspekt kann auch kurz durch einen einzelnen Zuordnungspfeil angedeutet werden, wobei der Proportionalitätsfaktor k wie üblich als Operator markiert wird:

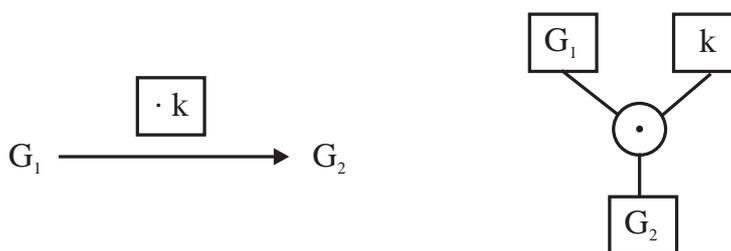


Fig. 1

Es handelt sich um eine Multiplikation mit dem Faktor k und diese Verknüpfung kann auch durch einen Rechenbaum dargestellt werden.

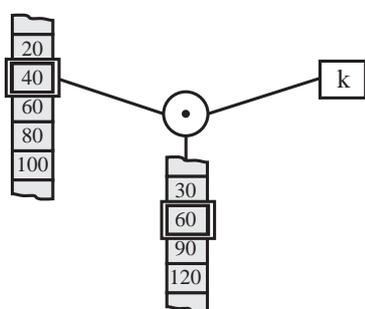


Fig. 2

In nebenstehender Skizze ist dieser Gedanke kombiniert mit dem Aspekt der Abbildung. Die Streifen deuten an, dass *jedem* Element des ersten Größenbereichs durch Multiplikation mit dem festen Faktor k ein Element des zweiten Größenbereichs zugeordnet ist. Die Zuordnung wird dabei über das Rechnen mit *Maßzahlen* vermittelt.

Bruch- und Prozentrechnung: Auch hier wird von grafischen Darstellungen Gebrauch gemacht. Am häufigsten werden dabei Streifen- bzw. Rechteck- und Kreisdiagramme verwendet:

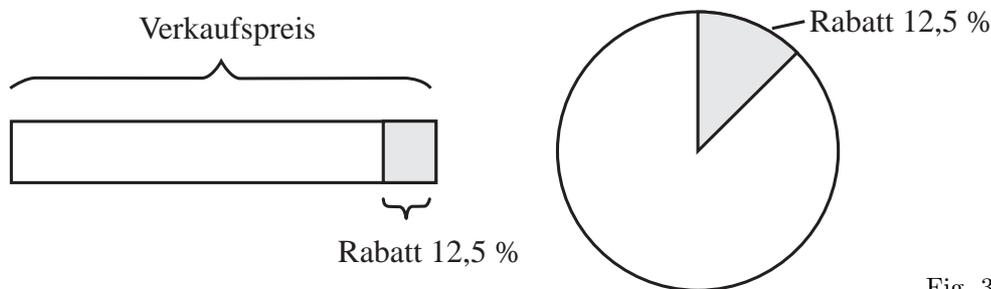


Fig. 3

Diese Diagramme machen aber nicht den Bruch- oder Prozentoperator als Abbildung deutlich, sie zeigen vielmehr Repräsentanten konkreter Brüche bzw. Repräsentanten des Prozentwertes. Andererseits ist zu beachten, dass jedes derartige Kreis- oder Rechteckdiagramm selbst auf einer Abbildung im mathematischen Sinne beruht, nämlich auf einer Proportionalität zwischen Bruchzahlen und Größen: Der Zahl 100 (oder auch $100\% = 1$) wird eine bestimmte Länge bzw. ein Flächenstück - das Ganze - zugeordnet und der Zahl p (oder auch der Bruchzahl $\frac{p}{100}$) der entsprechende Teil davon.

Die Rechteckdiagramme zeichnen sich durch eine uneingeschränkte und besonders einfache Unterteilungsmöglichkeit aus, während bei Kreisdiagrammen besonders gut zu erkennen ist, dass eine Teil-Ganzes-Beziehung vorliegt. Allerdings ist bei Kreisdiagrammen, von Sonderfällen abgesehen, das *genaue* Verhältnis von Teil und Ganzem nur schlecht zu erkennen.

Die Beziehung eines Teils zum Ganzen wird auch sehr deutlich, wenn nach Art eines Mengendiagramms eine Teilmenge einer gegebenen Menge ausgezeichnet wird:

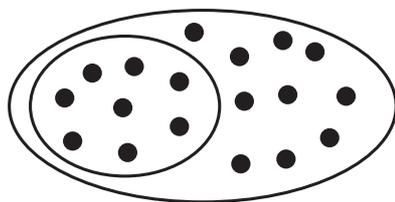


Fig. 1

Doch bleibt hier die Teilbarkeitseigenschaft unberücksichtigt, die man bei einer Behandlung der Bruchzahlen mit Hilfe von Größen und auch bei den Proportionalitäten meist voraussetzt.

Für die Arbeit mit grafischen Darstellungen im Unterricht ergibt sich aus unseren Betrachtungen eine einfache, aber wichtige Konsequenz: Es geht

nicht nur darum, die gewählten Veranschaulichungen - im Einklang mit einem von DIENES formulierten Prinzip - überhaupt zu variieren, es sollte auch so variiert werden, dass möglichst viele Komponenten eines Begriffs und möglichst viele der bestehenden Querverbindungen zu anderen Begriffen sichtbar werden. Eine einseitige Bevorzugung einzelner Darstellungsformen ist nicht nur eine Frage des persönlichen Geschmacks, sondern bedeutet meist auch eine Einseitigkeit der dem Schüler vermittelten Information über den Unterrichtsgegenstand.

Information und Irreführung durch grafische Darstellungen

Gute Veranschaulichungen vermitteln nicht nur Einsicht in einen Sachverhalt, sie haben auch immer da, wo der Lernende dem Sachverhalt noch zweifelnd gegenübersteht, ein hohes Maß an Überzeugungskraft. Nach der Analyse des Begriffs Veranschaulichung liegt das in der Natur der Sache, denn die beiden Merkmale der Einsichtigkeit im Sinne sinnlicher Wahrnehmbarkeit einerseits und eines relativ hohen Abstraktions- bzw. Allgemeingrads andererseits führen dazu, dass man nicht nur Klarheit und Deutlichkeit sondern auch Gesetzmäßigkeit und Richtigkeit mit einer solchen Darstellung assoziiert.

Hier liegt jedoch eine Gefahr, der man im Mathematikunterricht bewusst entgegenarbeiten sollte. Denn auch mathematische Betrachtungsweisen und grafische Darstellungen ihrer Ergebnisse können täuschen und den eigentlichen Sachverhalt verfälschen. Wir haben im letzten Abschnitt hervorgehoben, dass schon in Bezug auf die Veranschaulichung einzelner mathematischer Begriffe und Strukturen die grafischen Darstellungen meist einzelne Aspekte besonders akzentuieren. Um wie viel mehr gilt das, wenn man eine solche Darstellung mit dem in einer sehr komplexen Wirklichkeit gegebenen Sachverhalt vergleicht! Die Gefahr liegt darin, dass quantitative Aussagen über einen Sachverhalt durchaus korrekt sein können, dass aber

durch die Wahl und Isolierung der betrachteten Aspekte,

durch die Wahl der Bezugsgrößen,

durch das Nennen oder Verschweigen dieser Bezugsgrößen und nicht zuletzt

durch die Anordnung der wiedergegebenen Daten, also durch die psychologische Wirkung verschiedener Darstellungen desselben Inhalts

die über einen Sachverhalt gemachten Aussagen nicht nur unvollständig sein können, sondern dass ihre Wirkung auf den unkritischen Betrachter manipulierbar wird. Kommt nun eine im Sinne „überzeugende“ Veranschaulichung hinzu, so gewinnt eine lückenhafte oder einseitige Aussage leicht den Charakter des Bewiesenen und Gesicherten. Der Betrachter wird nicht zuletzt dadurch getäuscht, dass eine gute Grafik im Gegensatz zu Worten oder Zahlen leicht und ohne viel Nachdenken aufgenommen werden kann. (Und man kann „gute“ Grafiken einfach herstellen!)

Das hier theoretisch beschriebene Phänomen ist durchaus bekannt. Das „Lügen“ mit „Statistik“ ist schon sprichwörtlich geworden, doch macht man sich selten bewusst, wie sehr diese Problem auch bei einfachsten quantitativen Angaben eine Rolle spielt, also überall dort, wo Größen genannt werden. Die Formen und Möglichkeiten der Irreführung durch Zahlenangaben und Grafiken sind äußerst vielfältig, daher sollen einige besonders typische und wichtige Fälle an Beispielen verdeutlicht werden:

1. *Der Maßstab auf den Achsen eines Koordinatensystems ist frei wählbar und der Nullpunkt einer Koordinatenachse muss nicht der Schnittpunkt der Achsen sein.*

Die folgenden Grafiken zur Steigerung der Lebenshaltungskosten sind beide korrekt. Die Wahl des Maßstabes ändert jedoch die psychologische Wir-

kung des Schaubilds so, dass ein „leichter Anstieg“ bei Bedarf „steil und alarmierend“ erscheint:

Lebenshaltungskosten in den alten Bundesländern (1995 = 100%)
(Quelle: Statistisches Jahrbuch 1999 des Statistischen Bundesamtes)

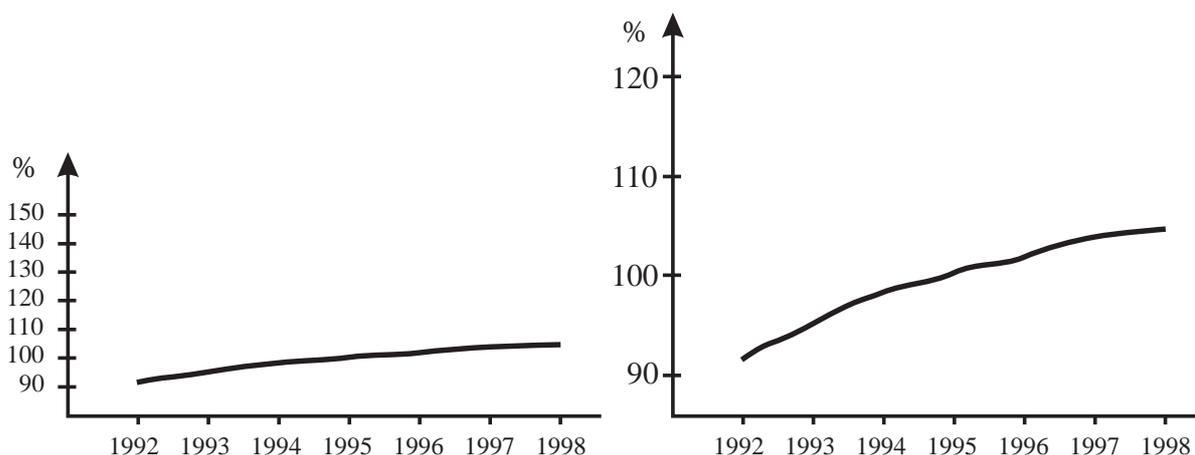


Fig. 1

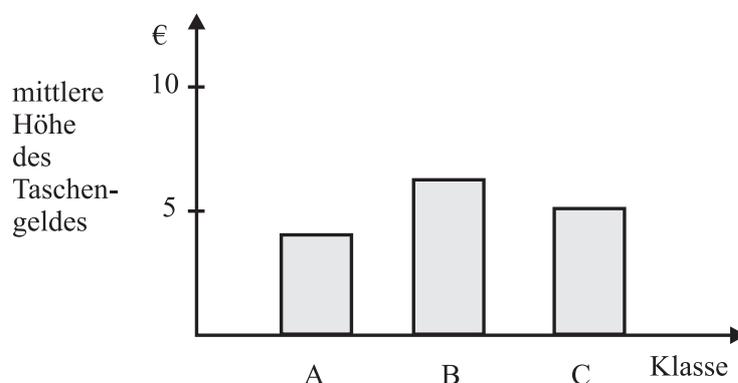
Eine erste Beurteilungsmöglichkeit - die mit Schülern zu diskutieren wäre - ergibt sich aus dem Vergleich mit anderen Ländern und vor allem aus dem Vergleich mit der Einkommensentwicklung. Bei letzterem müsste man die Nettoeinkommen heranziehen und außerdem die Einkommensstreuung beachten, denn es ist denkbar, dass das mittlere Nettoeinkommen nur durch hohe Einkommenssteigerungen eines kleinen Bevölkerungsteils mit der Preisentwicklung Schritt hält, während gleichzeitig für große Bevölkerungsteile Einkommens- und Preisentwicklung auseinanderfallen.

2. *Absolute Zahlen als Bezugspunkt für einen prozentualen Vergleich fehlen bzw. werden nicht berücksichtigt.*

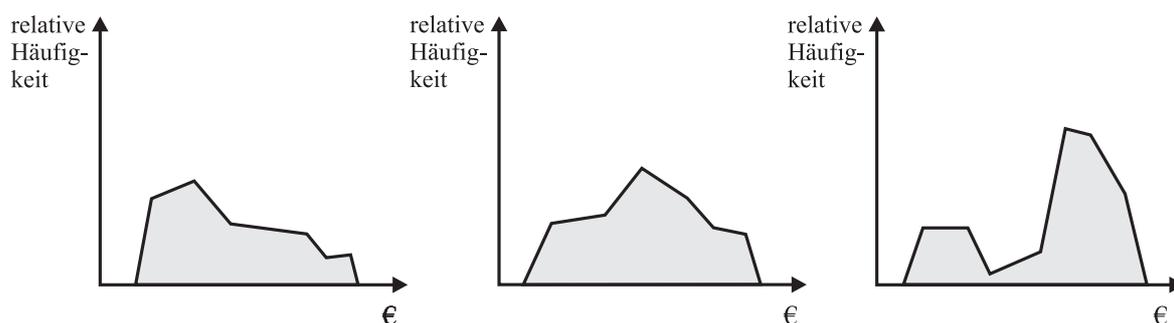
Beispiel: Arbeitslosenzahlen in zwei kleinen Gemeinden mit etwa gleicher Einwohnerzahl. (Angegeben wurde nur der prozentuale Anstieg, aber die folgende Darstellung ist vollständig.)

Gemeinde	Arbeitslose (absolut)		Anstieg in %
	1975	1976	
A	10	20	150
B	100	130	30

3. Bei Mittelwertvergleichen fehlt ein Streuungsmaß.



Dabei wird unterschlagen, dass ein solcher Mittelwert stark verzerrt wird, wenn einige wenige Schüler über sehr große Summen verfügen. Die Häufigkeitsverteilungen könnten z.B. etwa so aussehen:



Das Auseinanderfallen in zwei Gruppen, wie es die letzte Skizze andeutet, wird durch die Mittelwertbildung verwischt. Die dadurch mögliche Irreführung gewinnt an Gewicht, wenn man bedenkt, dass sich die fraglichen Mittelwerte ebenso wie auf die vergleichsweise „harmlosen“ Taschengeldsummen auch auf das Pro-Kopf-Einkommen in verschiedenen Industrie- und Entwicklungsländern beziehen können.

4. Mittelwertbildungen sind als solche oft problematisch.

Schulleistungen werden bewertet mit „Sehr Gut“, „Gut“, usw. Zur Abkürzung (!!!) übersetzt man diese Beurteilung in Zahlen. Für diese Zahlen werden dann Mittelwerte gebildet, sowohl für eine Schulklasse als auch in Bezug auf den einzelnen Schüler, als auch über Fächergrenzen hinweg. Was bedeutet der Mittelwert der Noten in Mathematik, Deutsch und Kunst?

2.4 Problemlösen im Sachrechnen

Wozu Problemlösen?

Das Interesse eines Schülers an einer Sachaufgabe kann auf sehr unterschiedlichen Motiven beruhen. Zweifellos wird aber der Lernprozess besonders dann nachhaltig beeinflusst, wenn die Motivation von der Sache ausgeht, wenn es gilt, Neues zu entdecken und wenn dabei Probleme zu lösen sind, die sich der Schüler zu eigen macht oder die er als eigene Probleme und Bedürfnisse von außerschulischen Bereichen her selbst in den Unterricht einbringt. Damit werden grundsätzliche Fragen angesprochen, nämlich die Beziehungen zwischen Sachrechnen, Problemlösen und entdeckendem Lernen. So wie das Wort Sachrechnen immer eine Verbindung und auch ein Spannungsverhältnis von Mathematik und Sachverhalt andeutet, so ergeben sich auch hier zwei Richtungen der Fragestellung: Es geht einerseits um die *Gewinnung neuer mathematischer Einsichten* und Instrumentarien beim Umgang mit Problemen des Sachrechnens und andererseits um das *Erkunden* und *Kennenzulernen* neuer, für den Schüler *relevanter Sachverhalte*.

Mit dem zweiten dieser Aspekte sind aber nicht nur Problemlösevorgänge als solche, sondern zugleich auch Fragen der Unterrichtsinhalte und -organisation angesprochen. Sieht man es nämlich als wesentliche Aufgabe der Mathematik an, die Umwelt zu erschließen und zu beschreiben, versteht man also Mathematik als ein Mittel, so ist es nur konsequent, von der Erkundung eines Sachbereiches auszugehen und die mathematischen Hilfsmittel immer dann zu erarbeiten, wenn sie im Rahmen einer solchen Erkundung wirklich benötigt werden. Das Lernen von Mathematik wäre also einzubetten in die Arbeit an Projekten, die sich auf die Erschließung eines Stücks der den Schüler umgebenden Wirklichkeit richten und die deshalb in der Regel sowohl die traditionellen Fächergrenzen als auch die üblichen Organisationsformen des Unterrichts sprengen.

Fassen wir die angesprochenen Fragen noch einmal kurz zusammen:

- Was ist unter Problemlösen zu verstehen?
- In welchem Maße enthalten Sachaufgaben mathematische Probleme und können zu neuen mathematischen Einsichten führen?
- In welchem Maße kann das Problemlöseverhalten des Schülers im Sachrechnen gesteigert werden?

- Welche Hilfen und Strategien beim Lösen mathematischer Probleme gibt es, und in welchem Maße sind sie erlernbar?
- In welchem Maße können Sachbereiche von Sachaufgaben als Ansatzpunkt her erschlossen werden?
- Was leisten „offene Aufgaben“? Und umgekehrt: Wie können mathematische Einsichten als notwendige Hilfsmittel bei der Arbeit an übergeordneten, mehr auf einen Sachbereich als auf einen traditionellen Unterrichtsgegenstand hin orientierten Projekten gewonnen werden?

Diese Fragen können hier nicht vollständig beantwortet werden, insbesondere da vieles sowohl in psychologischer als auch didaktischer Hinsicht noch weiterer Untersuchungen bedarf.

Psychologische Aspekte des Problemlösens

Die psychologischen Erklärungsversuche für das Problemlösen oder für einzelne Aspekte des Problemlösevorgangs sind sehr unterschiedlich und vielfältig. Mit WEINERT könnte man vom *Problemlösen* als von einem „ungelösten Problem“ sprechen. Fast immer versteht man jedoch unter Problemlösen eine Art des Lernens, und zwar Lernen in seiner höchsten Form.

Nach einem streng verhaltenspsychologischen Ansatz besteht alles Lernen und damit auch das Problemlösen in einer *Verhaltensänderung*.

Nach GAGNÉ ist Problemlösen die höchste Stufe in einer Hierarchie verschiedener Arten des Lernens, wobei eine höhere Stufe jeweils die vorhergehende voraussetzt. Hier sollen die vier höchsten Stufen der Hierarchie genannt werden:

Unter *multipler Diskrimination* ist die Fähigkeit zu verstehen, auf jeden einzelnen aus einer Gruppe von Reizen anders (angemessen) zu reagieren, also z.B. im Mathematikunterricht der Grundschule vorgegebene Bausteine verschiedener Formen und Farben unterscheiden zu können. Mit dem *Begriffslernen* entsteht die Möglichkeit, auf „Dinge oder Ereignisse als Klasse“ zu reagieren, also z.B. bei einer größeren Zahl von Situationen oder Objekten wie etwa Bausteinen die gemeinsame Eigenschaft „dreieckig“ abstrahieren zu können und - das ist wichtig - ein weiteres Objekt dann dem neu gebildeten Begriff unterordnen zu

können.

Das sogenannte *Regellernen* ist nicht etwa nur auf Regeln im engeren Sinne wie Rechenregeln oder geometrische Axiome zu beziehen. GAGNÉ versteht unter Regeln vielmehr ganz allgemein „Ketten von Begriffen“. Regeln stellen die Beziehungen zwischen Begriffen her und bilden das, „was im Allgemeinen Wissen genannt wird“.

Das *Problemlösen* schließlich besteht nicht nur darin, vorhandene Regeln zur Erreichung bestimmter Ziele anzuwenden, sondern es handelt sich zugleich immer um einen Lernprozess, der von gegebenen Regeln zu einer neuen „Regel höherer Ordnung“ führt.

Das Gelernte selbst wird zur Regel, die bei neuen Problemen mit zum Repertoire der für die Lösung benutzbaren Regeln gehört. Das einmal gelöste Problem wird damit zur erinnerbaren Erfahrung.

Dieser hierarchische Aufbau entspricht in mancher Hinsicht den Systemen von Definition (Begriffen) und Sätzen (Regeln), wie sie die Mathematik kennt. Doch darf man diese Analogie nicht zu eng fassen und etwa unter Problemlösen nur noch das Ableiten eines neuen Satzes (einer Regel höherer Ordnung) aus bekannten Sätzen verstehen.

GAGNÉ untersucht nun die Bedingungen, unter denen sich die einzelnen Arten des Lernens vollziehen und unterscheidet dabei zwischen Bedingungen *innerhalb des Lernenden* und *Bedingungen der Lernsituation*.

Für das Problemlösen nennt er als Bedingung innerhalb des Lernenden die Fähigkeit,

für das Problemlösen relevante, früher erlernte Regeln zu erinnern, und als Bedingungen in der Lernsituation die folgenden:

Die relevanten Regeln müssen gleichzeitig oder in enger zeitlicher Folge mobilisiert, d.h. dem Lernenden gegenwärtig gemacht werden. Hilfen zur Erreichung dieser „Kontiguität der Regeln“ können durch sprachliche Instruktion oder durch Fragen gegeben werden, ohne dabei die Lösung eines Problems vorwegzunehmen.

Hilfen können auch in einer Lenkung der Richtung des Denkens bestehen, die sich zumindest auf das Bewusstmachen des zu erreichenden Ziels erstreckt.

Berücksichtigt man die Bemerkung GAGNÉS, dass sich der Lernende eine solche Lenkung auch durch selbst gegebene Instruktionen schaffen kann,

so wird deutlich, dass zumindest in einem sehr allgemeinen Sinne das Problemlösen planbar und lernbar sein muss.

Von einer ganz anderen psychologischen Theorie her hat WERTHEIMER einen Beitrag zur Frage des Problemlösens geleistet, der für das Problemlösen in der Mathematik von besonderem Interesse ist. Aus der Sicht der *Gestaltpsychologie* kommt es darauf an, wie bei einem Objekt, einem Sachverhalt oder einer Problemstellung die Beziehungen der Teile zum übergeordneten Ganzen gesehen werden. Das Problem ist gelöst, die gesuchte Einsicht gewonnen, wenn diese Beziehungen so beschaffen sind, dass sich die Teile, die einzelnen Elemente des gegebenen Sachverhalts, zu einer „guten Gestalt“ organisieren. Die Gestaltpsychologie versucht, die Gesetzmäßigkeiten für den Aufbau des Ganzen aus seinen Teilen zu beschreiben, und ein Problem zu lösen heißt demnach, Lücken und Störungen im Aufbau einer im Sinne dieser Theorie guten Gestalt zu erkennen und zu beseitigen.

Wichtige Schritte in diesem Prozess bestehen

- im Strukturieren des Sachverhalts, d.h. in der Regel in einer Verfeinerung des Beziehungsgefüges von Teilen im Ganzen,
- im Umstrukturieren, d.h. in der Um- und Neuorganisation des gegebenen Beziehungsgefüges,
- im Zentrieren, d.h. im Lenken der Aufmerksamkeit auf einen speziellen Punkt
- und entsprechend im Umzentrieren.

Besonders der Vorgang des Strukturierens bzw. Umstrukturierens ist vielfach für die Lösung eines Problems wesentlich und soll an einem ganz elementaren Beispiel verdeutlicht werden:

Der Mittelpunkt eines Quadrats sei zu bestimmen:



Strukturieren kann hier zunächst ganz konkret als eine Verfeinerung und Anreicherung der gegebenen Figur verstanden werden, so wie es der Schüler intuitiv tut, wenn er ein quadratisches Blatt an den Mittellinien oder an den Diagonalen faltet und damit „Hilfslinien“ erzeugt. Wenn bei einem Quadrat

auf festem Untergrund das Falten ausscheidet, kann die Unterteilung z.B. durch Auslegen mit kleineren Quadraten erreicht werden:

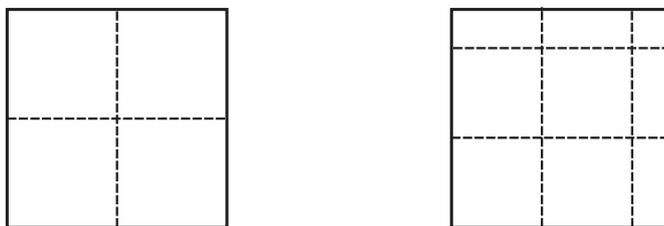


Fig. 1

Hat jedoch das Legematerial keine geeignete Größe und kennt der Schüler kein Verfahren zur zeichnerischen Bestimmung der Seitenmitten, so ist mit einer zufällig gewählten Unterteilung das Problem nicht zu lösen. Umstrukturieren bedeutet dann, die gewählte Unterteilung der Figur und damit auch die gewählten Hilfslinien durch andere zu ersetzen:

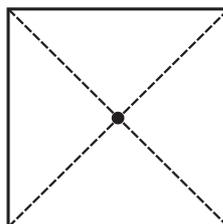


Fig. 1

In Bezug auf die Organisation der Teile zu einem Ganzen in einer „guten Gestalt“ ist festzuhalten, dass das Finden des Mittelpunktes auf den Symmetrieeigenschaften des Quadrats beruht. Dabei denkt man zunächst an die Achsensymmetrie. Verschärft man das Problem dadurch, dass z.B. zwei gegenüberliegende Ecken fehlen,



Fig. 2

so ist erneut umzustrukturieren. Man kann das Quadrat als drehsymmetrische Figur sehen und den Mittelpunkt bestimmen wie es in obiger Skizze rechts angedeutet ist.

Oder aber das Quadrat ist zuerst zu vervollständigen, um so die Lücken zu schließen - hier ganz wörtlich zu nehmen - und dann einer der beiden ersten Lösungswege zu beschreiten.

Bekannte, von WERTHEIMER selbst angeführte Beispiele für die Rolle des Umstrukturierens beim Problemlösen sind die Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms und der Summe einer arithmetischen Reihe:

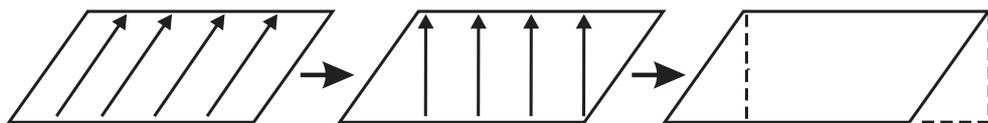


Fig. 1

Die Skizze zeigt, wie die naheliegende, schräg verlaufende Strukturierung des Parallelogramms durch einen anderen Aufbau ersetzt wird und wie dann die „Störungen“ beseitigt werden. Schon eine Änderung der Lage in

der Ebene macht hier ein Umdenken, also erneut ein Umstrukturieren der Gesamtsituation erforderlich:

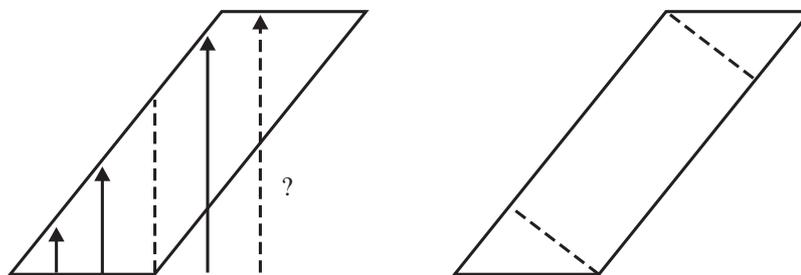


Fig. 2

Die Bestimmung der Summe einer arithmetischen Reihe gelingt durch das Entdecken einer symmetrischen Strukturierungsmöglichkeit:

$$\begin{array}{l}
 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 + 10 \quad \longrightarrow \quad ? \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 + 10 \quad \longleftarrow \quad ? \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 + 10 \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad ! \\
 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 + 10 \\
 \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}
 \end{array}$$

Solche Hinweise zur Strukturierung einer Problemsituation können wesentlich zur Lösung beitragen und entfalten auch dann noch ihre Wirksamkeit, wenn sie als Hilfen nicht von Fall zu Fall durch die Lehrerin gegeben werden, sondern wenn sie systematisch eingesetzt werden. Wie weit allerdings dabei nur ein spezifischer Transfer oder mehr erreicht werden kann, ist offen; d.h. es ist schwer zu prüfen, wie weit durch einsichtiges Lernen im Sinne WERTHEIMERS nur die jeweils folgenden, nach Struktur und Inhalt verwandten Aufgaben vorbereitet werden und nicht zugleich auch ganz allgemein die Fähigkeit zum Problemlösen wächst.

Der *Transferbegriff* ist zweifellos von zentraler Bedeutung für die Erforschung von Problemlösevorgängen. Die zahlreichen psychologischen Untersuchungen zum Transferproblem beziehen sich jedoch mehr auf die Lernübertragung in einem engeren, überschaubaren Rahmen sowie auf verschiedene Formen der Lernübertragung, die sich unter schulischen Bedingungen beobachten lassen, als auf *unspezifischen* Transfer, also z.B. die

Lernübertragung vom Mathematiklernen in der Schule hin zu außerschulischen Bereichen. Den Ergebnissen solcher Untersuchungen lassen sich aber wichtige Aussagen über die Bedingungen und Voraussetzungen für Transfer entnehmen, die von WEINERT in den folgenden Punkten zusammengefasst wurden:

- Umfang und Art der Lernübertragung sind abhängig von den *kognitiven* Voraussetzungen beim Lernenden, insbesondere also auch von seiner Intelligenz,
- von der *Ähnlichkeit* zwischen *Lern-* und *Transferaufgabe*, wobei unter Ähnlichkeit die inhaltlichen oder strukturellen Gemeinsamkeiten oder aber auch das Bereitstehen der für beide Problemstellungen erforderlichen Vorkenntnisse zu verstehen sind,
- von der *Art der Auseinandersetzung mit der früheren Aufgabe*, und hierbei insbesondere von der *Intensität der Übung*, die zur Vermeidung negativen Transfers erforderlich ist, und vom Umfang des *einsichtigen Lernens*,
- sowie schließlich von der *Entwicklung allgemeiner und spezifischer transferfördernder Methoden*, also z.B. von der Bereitstellung von Strategien zur Behandlung mathematischer Probleme.

Es ist bemerkenswert, dass sich eine Lernübertragung auch negativ auswirken kann. Das Lösen einer Reihe von gleichstrukturierten Aufgaben kann dazu führen, dass der einmal gefundene und „bewährte“ Lösungsweg dann ohne Erfolg auf ein nur äußerlich ähnliches Problem angewandt wird. Ein durch Wiederholung eingeübtes Lösungsmuster kann zum Hindernis werden, wo ein Umdenken oder Umstrukturieren, also ein neuer Ansatz erforderlich wäre. Die Forderung nach *mathematischer Variabilität* ist damit auch im Sachrechnen von großer Bedeutung.

Das Problemlösen kann auch im Rahmen der Kognitionspsychologie, in der Denkprozesse als Informationsverarbeitungsprozesse gesehen werden, untersucht werden: Die kognitive (also auf Denken und Erkennen gerichtete) Struktur eines menschlichen Individuums wird von DÖRNER u.A. als zweigeteilt, in eine epistemische und eine heuristische Struktur, angenommen.

Die *epistemische Struktur* denkt man sich als semantisches Netz aufgebaut, wobei im einfachsten Fall den Knoten „Dinge“ eines Realbereiches und den

Kanten Beziehungen zwischen diesen Dingen entsprechen. Das semantische Wissensnetz über einen Realbereich kann unterschiedlich groß sein. Im negativen Extremfall besteht es aus Bäumen im topologischen Sinn, d.h. von Begriffseinheit zu Begriffseinheit gibt es höchstens einen Weg. Was die allzu anschauliche Vorstellung von einem Netz übersteigt ist allerdings die Tatsache, dass es Begriffshierarchien und Stufen der Abstraktion gibt. Gerade für das Mathematiklernen, auch schon in der Primarstufe, ist es typisch, dass das, was auf einer früheren Lernstufe Beziehungen zwischen Dingen sind, später selbst zu Dingen wird, zwischen den Beziehungen gesucht werden.

Über der epistemischen thront gewissermaßen als Metastruktur die *heuristische Struktur*. Ihre Aktivität bezieht sich nicht direkt auf einen außersubjektiven Realbereich, sondern darauf, wie vom Subjekt das Wissen über einen Realbereich im weitesten Sinne organisiert, vor allem gewonnen, umgeformt, miteinander verknüpft, angewandt, bewertet, ... werden kann. Man kann sich mit DÖRNER vorstellen, dass das Verhältnis von heuristischer zu epistemischer Struktur in etwa dem vom Tintenfisch zum Fischer-netz gleicht:

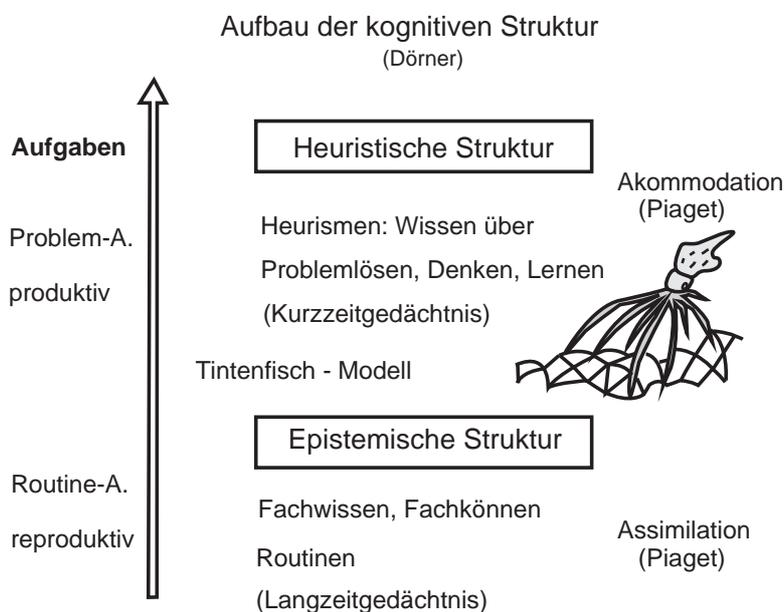


Fig. 1

Mit seinen 8 Tentakeln kann der Tintenfisch maximal 8 Knoten des Netzes betasten, über das er hinwegkrabbelt, was grob die psychische Tatsache wiedergibt, dass im Bewusstsein, im Kurzzeitgedächtnis, etwa 4 bis

7 „Einheiten“ (etwa abgerufen aus dem Langzeitgedächtnis) gegenwärtig sein können. Allerdings wird die Fähigkeit der heuristischen Struktur, Knoten des Wissensnetzes neu mit anderen zu verbinden oder gar neue Teile einzufügen, von der Tintenfischanalogie nicht mehr dargestellt.

Der wesentliche Inhalt der heuristischen Struktur sind Heurismen (heuristische Strategien), also Handlungsprogramme, deren Aktivierung in Problemlöseprozessen weiter helfen kann. Mit ihnen kann man zwar keine Lösung erzwingen (dann läge eine Routineaufgabe vor), jedoch einen weiterführenden Einfall, eine erhellende Entdeckung wahrscheinlicher machen.

Ein auch für den Mathematikunterricht in der Primarstufe unentbehrlicher Heurismus, der hier gesondert herausgehoben werden soll, beinhaltet die Aufforderung, den in der Problemaufgabe angesprochenen Sachverhalt zu *veranschaulichen*, gerade auch dann, wenn im Aufgabentext keine räumliche Situation angesprochen wird (vgl. die „Eismann-Aufgabe“).

Die Untersuchung der Problemlöseprozesse bei dieser und weiteren Aufgaben legen folgende Formulierung nahe: Eine Aufgabe ist für ein Individuum (einen Schüler) in einer bestimmten Situation eine *problemhaltige* Aufgabe, wenn seine epistemische Struktur in ihrem jetzigen Zustand zur Lösung nicht ausreicht und durch Einwirken der heuristischen Struktur eine Verbesserung der epistemischen Struktur gefordert ist. Mit PIAGET könnte man dies so ausdrücken: Die Aufgabe kann nicht dem jetzigen kognitiven Stand des Individuums assimiliert werden, es bedarf der Akkomodation des Individuums an die Aufgabe. Ein Weg von der gegebenen Startsituation (aus dem Aufgabentext zu entschlüsseln) zur erwünschten und gesuchten Zielsituation ist vorerst nicht erkennbar, zwischen beidem liegt eine Barriere. Diese Problembarriere ist unterschiedlich hoch und kann als etwas Lückenhaftes, Dunkles, Widerständiges, Störendes, Fremdartiges, ja Feindliches erlebt werden, das im positiven wie negativen Sinn Spannung erzeugt. Hier kommt der hochsensitive motivationale Aspekt des Problemlösens ins Spiel: Problemlöseaktivitäten setzen Problemlösenwollen voraus, einschließlich der Bereitschaft, Denkarbeit auch dann fortzusetzen, wenn sich Erfolge nicht einstellen wollen. Die Bereitschaft dazu kann nicht einfach vorausgesetzt werden, sie ist zu fördern, und zwar nicht nur durch Ermunterung und Aufforderung, sondern durch genügend starke Herausforderungen, die differenzierbar sein und in der „Zone der nächsten Entwicklung“ (WYGOTZKI) liegen sollen.

Eine Liste wichtiger Heurismen

Die kognitive Seite des Problemlösens ist zwar keineswegs befriedigend aufgehellt, aber man hat einige handfeste didaktische Landmarken. Zur Verbesserung der heuristischen (und damit auch indirekt der epistemischen) Struktur ist es wichtig, nicht nur Problemaufgaben hinreichender Aktivität zu berücksichtigen und über Problemlösen sensibel zu sprechen (Was ist unverständlich? Was macht die Sache schwierig? Wo steht vielleicht eine Falle? Wieso ist es zu diesem Fehler gekommen? usw.), sondern vor allem Heurismen mehr und mehr bewusst zu machen und durch häufigen Gebrauch zum geistigen Eigentum werden zu lassen. Tatsächlich können Heurismen nicht zu Routinen werden, auch nicht zu solchen zweiter Ordnung, denn Routinen (z.B. schriftliche Addition) sind ritualhaft, mechanistisch und formalistisch, das ist ja gerade ihre Stärke, während Heurismen offen, bewusst und inhaltsbezogen sind. Da aber in Such- und Kontrollprozessen immer wieder auf Routinen zurückgegriffen werden muss, werden diese nicht nur immanent geübt, sondern auch leichter verfügbar in die epistemische Struktur eingewebt. Insofern werden beim entdeckenden Lernen, für das Problemorientierung von zentraler Bedeutung ist, scheinbar paradoxerweise Routinen besonders gepflegt.

Die folgende Liste von Heurismen ist sicher unvollständig, aber alle aufgeführten Heurismen sind nachweislich wichtig. Sie werden als Aufforderungen in der Umgangssprache (nicht schon in jedem Fall in der Schülersprache) formuliert. Die Liste stellt selbstverständlich kein Abarbeitungsschema dar, vielmehr ist es prinzipiell in jeder Aufgabe immer wieder offen, welcher Heurismus eventuell weiterführen kann. Mit wachsenden Erfahrungen im Problemlösen wächst aber auch das Gespür dafür, womit man es zunächst versuchen sollte. Für die Primarstufe ist die Förderung der heuristischen Struktur einschließlich der emotionalen Einbettung deshalb von ganz besonderer Wichtigkeit, weil hier Versäumtes später möglicherweise nicht mehr oder nur teilweise nachgeholt werden kann.

1. Mache dir ein Bild von der Sache (von der in Aufgabe beschriebenen Situation). Trage in das Bild möglichst kurz und einfach das Gegebene und Gesuchte ein. Am Bild kannst du sehen, ob und wie du die Aufgabe verstehst. Vielleicht erhältst du dabei auch schon einen Hinweis auf einen Lösungsweg (*Veranschaulichung*).

2. Versuche, in der Sache eine Regelmäßigkeit, ein Muster zu erkennen. Wenn das nicht gelingt, dann versuche, die Sache anders darzustellen oder auszuschnücken oder zu vergrößern. Vielleicht wird dann ein Muster erkennbar (*Strukturierung und Umstrukturierung*).
3. Versuche, dich an eine ähnliche Aufgabe zu erinnern, eine verwandte Aufgabe, die du lösen kannst. Vielleicht hilft das weiter (*Analogiebildung*).
4. Wenn du gar nicht weiter weißt, wie du zu einer Lösung kommen kannst, dann probiere es mutig mit einer „Versuchslösung“. Erweist sie sich als falsch, dann kannst du jetzt aber vielleicht sehen, wie du zu einer besseren „Versuchslösung“ kommen kannst (*Regula-falsi-Methode*).
5. Versuche die Aufgabe in Teilaufgaben zu zerlegen. Oft sind die Teilaufgaben leichter zu lösen, oder wenigstens eine davon. Eine Teilaufgabe zu lösen, ist besser als gar nichts zu versuchen (*Modularisierung*).
6. Ändere die Aufgabe (die Frage, die gegebenen Zahlen, die sonstigen Angaben) ab, und beobachte, was sich dann auch noch ändert und was bleibt. Untersuche insbesondere extreme (Außergewöhnliche, möglicherweise abartige) Fälle (*Variations- und Extremalprinzip*).
7. Tue so, als ob du die Aufgabe schon gelöst hättest, und versuche dann, rückwärts zu arbeiten (*Analysis-Synthesis-Prozedur*).

Illustrieren Sie die Anwendung aller 7 Heurismen an der folgenden Aufgabe:

Petra verschlang in einer Woche ein ganzes Buch mit 133 Seiten. Montags las sie einige Seiten und von da an jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig. Wie viele Seiten las sie an den einzelnen Tagen?

Strategien für das Lösen von mathematischen Problemen und Sachaufgaben

Es gibt verschiedene Versuche, Strategien und Hilfen für das Problemlösen in Form eines Frageschemas oder einer Handlungsanweisung zu formulieren, und zwar sowohl allgemein für das Lösen mathematischer Probleme als auch speziell in Bezug auf Sachaufgaben. Vielfach lassen sich die gemachten Vorschläge allerdings nicht direkt aus psychologischen Theorien ableiten,

sondern sie beruhen mehr auf der Erfahrung aus der praktischen Arbeit mit Schülern oder auch auf dem eigenen Umgang mit mathematischen Problemen und hier insbesondere auch auf der nachträglichen Analyse der Gedankengänge, die zur Lösung geführt haben.

Letzteres kann zugleich als ein Hinweis für den Mathematikunterricht verstanden werden:

Auch der Schüler sollte die eingeschlagenen Lösungswege reflektieren, also nach gefundener Lösung bzw. nach einzelnen Lösungsschritten das eigene Vorgehen noch einmal überdenken.

Dabei geht es nicht nur um ein rückschauendes Nachvollziehen des richtigen Lösungsweges, wozu der Schüler allenfalls beim Vergleich mit anderen Aufgaben zu motivieren ist - z.B. anhand der Rechenbäume zweier Aufgaben - es geht auch um ein Überdenken der Fehlversuche und Irrwege. Langfristig kann dies wesentlich zur Steigerung des Problemlöseverhaltens beitragen und vielleicht sogar dazu führen, dass die Schüler selbst Handlungsanweisungen für ein zweckmäßiges Vorgehen zumindest für gewisse Aufgabentypen formulieren können.

Wenn hier von Handlungsanweisungen und Aufgabentypen gesprochen wird, so liegt der Einwand nahe, dass es sich gar nicht um ein Problemlösen handele, sondern nur um Anwenden bekannter Verfahren. In der Tat versteht man unter Problemlösen vor allem das selbständige Finden von Lösungswegen und denkt dabei an Fälle, die gerade nicht in ein bekanntes Schema passen. Bedenkt man jedoch, welche Schwierigkeiten für jüngere Schüler schon mit dem richtigen Erfassen und Kombinieren der elementaren Rechenoperationen in Textaufgaben verbunden sein können und dass vielfach auch neue Lösungsverfahren anhand bestimmter Aufgabenstellungen entdeckt werden sollen, so erweist sich trotz aller notwendigen Einschränkungen die Frage nach Hilfen für die Bearbeitung mathematischer Aufgaben und insbesondere von Sachaufgaben als durchaus sinnvoll und zum hier diskutierten Zusammenhang gehörig. Es lässt sich ja kaum eine scharf abgrenzende Definition des Begriffs *Problem* angeben, und auch Überlegungen zum Transferbegriff laufen darauf hinaus, dass es zwischen Aufgaben, für deren Lösung das Wesentliche bereits erkannt ist und *Problemen*, bei denen es etwas Neues zu finden gibt, fließende Übergänge geben kann.

Bei allen Versuchen, Strategien und Hilfen für das Problemlösen anzugeben, scheint allerdings eine Schwierigkeit von der Sache her unvermeid-

bar zu sein: Entweder sind die Lösungshilfen von sehr allgemeiner Art und dadurch im Einzelfall oft nur schwer anwendbar oder sie sind konkret und praktikabel, erfassen dann aber nur spezielle Aufgabentypen. Eine der wichtigsten Analysen mathematischer Problemlöseprozesse stammt von dem Mathematiker G. POLYA. Auch er beruft sich ausdrücklich auf die eigenen Erfahrungen im Rahmen seiner Tätigkeit. Er betont, dass Problemlösen lernbar nur durch *Übung* ist, wobei allerdings nicht die Einübung fester Lösungsschemata gemeint ist, sondern der ständige Umgang mit mathematischen Problemen wachsenden Schwierigkeitsgrades. Aufgabe des Lehrers ist es also, die dem Schüler vorgelegten Probleme zu ordnen nach den für die Lösung erforderlichen Vorkenntnissen, nach dem begrifflichen Anspruchsniveau und nach dem Grad der Komplexität.

Bei den von POLYA gegebenen Analysen heuristischen Denkens spielen die Wechselbeziehungen von Verallgemeinern, Spezialisieren und Analogisieren eine wichtige Rolle. Bezogen auf die psychologischen Erklärungsversuche für das Problemlösen erinnert die Frage nach analogen Aufgabenstellungen an den Begriff des strukturellen Transfers. Strukturelle Gemeinsamkeiten mit bereits gelösten Aufgabenstellungen werden bewusst aufgesucht. Auch hier könnte man als einfaches Beispiel an Rechenbäume denken:

Kennst Du einen Rechenbaum, auf den dies Aufgabe passt?

Die Begriffe Spezialisieren und Verallgemeinern erinnern an das Umstrukturieren im gestaltpsychologischen Ansatz. Dieselbe Fragestellung wird einmal auf das Einzelproblem konzentriert und einmal in einen allgemeinen und damit zugleich neuen Zusammenhang gestellt. Oder: Was zunächst Ganzes war, wird als Teil in einem umfassenderen Ganzen gesehen. Die Bedeutung der Spezialisierung liegt vorwiegend in der Hypothesenfindung. Es sei z.B. nach der Art des Zusammenhangs zweier Größen gefragt: Man rechnet Zahlenbeispiele durch und entdeckt vielleicht die Additionsbedingung für Proportionalitäten.

Doch auch Analogiebildungen und Verallgemeinerungen können auf neue Zusammenhänge führen: Man kennt vielleicht den Satz über die Flächengleichheit von Dreiecken, die gleiche Grundseiten und gleiche

Höhen haben, und man vermutet als Analogie im Raum das *Cavalierische Prinzip*.

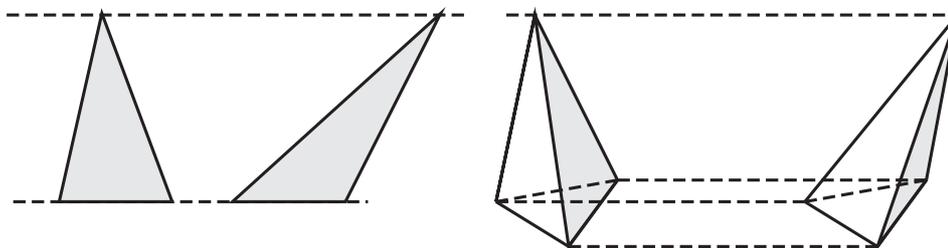


Fig. 1

Man versucht ein Quadrat zu verdoppeln und stößt auf den allgemeinen Fall, den (speziellen) Satz des Pythagoras:

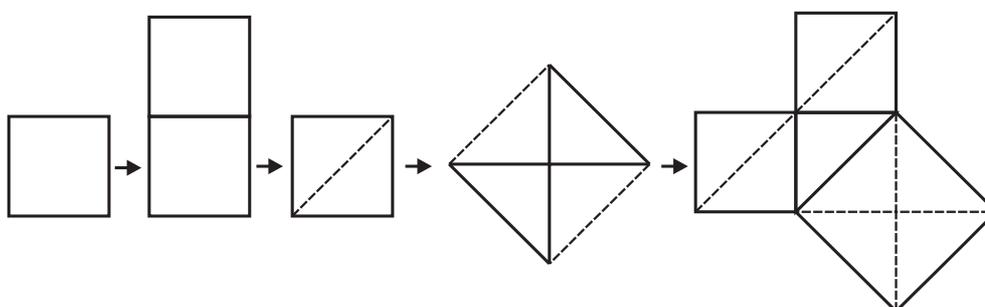


Fig. 2

In seiner Schrift „Schule des Denkens“ hat POLYA versucht, praktische Hilfen für die Bearbeitung eines mathematischen Problems zu geben:

Erstens

Du musst die Aufgabe verstehen.

Zweitens

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten. Du musst vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann. Du musst schließlich einen Plan der Lösung erhalten

Drittens

Führe Deinen Plan aus.

Viertens

Prüfe die erhaltene Lösung.

Für die Durchführung dieser Schritte versucht POLYA dann vor allem durch detaillierte Fragestellungen Hilfen zu geben.

Verstehen der Aufgabe

Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?

Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder kontradiktorisch?

Zeichne eine Figur! Führe passende Bezeichnungen ein!

Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

Ausdenken eines Planes

Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?

Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? Betrachte die Unbekannte! Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.

Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methoden verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?

Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!

Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugängliche verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen?

Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den andere fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kannst Du sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?

Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?

Ausführen des Plans

Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, dass er richtig ist?

Rückschau

Kannst du das Resultat *kontrollieren*? Kannst Du den Beweis kontrollieren?

Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?

Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Versucht man, solche Hinweise auf das Lösen einfacher Textaufgaben anzuwenden, so ist dies für die zunächst gegebenen allgemeineren Hinweise leicht möglich, die gestellten Einzelfragen sind jedoch kaum auf elementare Textaufgaben anwendbar.

Eine Handlungsvorschrift, die speziell auf das Lösen von Sachaufgaben zugeschnitten ist, wurde von W. STEINHÖFEL, K. REICHOLD und L. FRENZEL angegeben:

Handlungsvorschrift für das Lösen von Sachaufgaben:

I. Erfasse und analysiere die Aufgabe!

1. Du musst die Aufgabe verstehen!
 - Lies die Aufgabe gründlich durch!
 - Gib den Inhalt der Aufgabe mit eigenen Worten wieder!
2. Erfasse die gegebenen und gesuchten Größen!
 - Schreibe die gegebenen Größen auf!
 - Schreibe auf, was gesucht ist!
3. Du musst die Beziehungen der Aufgabenstellung erfassen!
 - Lege Bezeichnungen für die gesuchte(n) Größe(n) und für Hilfsgrößen fest.
 - Fertige, wenn möglich, eine Skizze an, die wichtige Beziehungen zwischen gegebenen und gesuchten Größen sowie die Hilfsgrößen verdeutlicht!
 - Stelle einander entsprechende Größen in einer Tabelle dar!
4. Schätze das Ergebnis!

II. *Ermittle den mathematischen Ansatz!*

1. Ist zur Berechnung der gesuchten Größe eine *Formel anwendbar*, gehe zu 2.!
Sonst gehe zu 3!
2. *Stelle die Formel auf!*
 - Überlege dabei, was die Symbole der Formel bedeuten und ob sie mit den Bezeichnungen übereinstimmen, die bei I. festgelegt wurden! Gehe zu 4.!
3. *Bestimme (eine) Gleichung(en), durch die die gesuchte(n) Größe(n) ermittelt werden kann (können)!*
 - Orientiere Dich bei der Auswahl der Rechenoperationen am Text der Aufgabe bzw. an einer aufgestellten Tabelle oder an einer Skizze!
 - Verwende für die Formulierung der Gleichung(en) die Bezeichnungen für gesuchte Größen bzw. Hilfsgrößen! (Führe unter Umständen weitere Hilfsgrößen ein!)
4. Stelle nun einen *Ansatz* für die Berechnung der Hilfsgrößen auf!
Beginne dabei wieder bei II.1.! Gehe dann zu III.

III. *Löse die mathematischen Aufgaben!*

1. *Überschlage!*
2. *Rechne unter Umständen die Maßeinheiten um!*
3. *Berechne die Hilfsgrößen!*
4. *Berechne die gesuchte(n) Größe(n)!*

IV. *Werte das (die) Ergebnis(se) aus!*

1. *Vergleiche den Überschlag* (auch das geschätzte Ergebnis) mit dem erhaltenen *Resultat!*
2. *Überprüfe das Ergebnis am Text der Aufgabe!*
3. *Formuliere den Antwortsatz!*

Hier kann im engeren Sinne von einer Handlungsanweisung gesprochen werden, denn es werden nicht nur Fragen gestellt, um wichtige Überlegungen zur Lösung der Aufgabe anzuregen, vielmehr ergibt sich aus den Anweisungen eine Steuerung der Lösungsschritte nach Art eines Programms (Flussdiagramm, Programmablaufplan). Es handelt sich also um den Versuch,

den Lösungsprozess zu algorithmisieren. Die Schwierigkeit liegt dabei jedoch wiederum in der weitgehenden Einengung auf Aufgaben eines bestimmten Typs, und zwar hier auf solche, die mit Hilfe der Anwendung von Formeln oder Gleichungen lösbar sind.

Um diese Einschränkung zu vermeiden, müsste man auf allgemeinere Fragestellungen und Anweisungen zurückgehen. Dadurch würde aber die direkte und sichere Anwendbarkeit eines solchen „Lösungsalgorithmus“ wesentlich erschwert. Eine Alternative könnte darin bestehen, dass man umgekehrt das Frageschema noch erweitert, indem man sozusagen ein „Methodensuch-Programm“ davorschaltet. Wichtige Fragen dafür könnten z. B. lauten:

Was ist gesucht,
eine Begründung, ein Beweis,
eine Ja-Nein-Antwort,
eine Größe oder mehrere Größen?

Sind die Größen miteinander zu vergleichen?

Sind die Daten zu ordnen (bei statistischen Problemen)?

Kommen (bei endlich vielen Lösungsmöglichkeiten) Probiervverfahren in Frage (Fallunterscheidungen)?

Man erkennt aber sofort, dass fast jede Ja-Antwort auf eine dieser Fragen in einen eigenen Lösungsalgorithmus nach Art des von Steinhöfel vorgelegten münden müsste, womit die Handlungsanweisung insgesamt zu einem umfangreichen Programm anschwellen würde. Ein idealer, praktikabler, allen Aufgabenstellungen und Problemsituationen gerecht werdender Algorithmus dürfte kaum zu finden sein.

Abschließend ist noch auf eine weitere Schwierigkeit aufmerksam zu machen:

Alle bisher diskutierten Vorschläge zum Problemlösen im Mathematikunterricht und speziell bei Sachaufgaben richten sich auf Textaufgaben oder setzen in der Regel ein von der Mathematik her gestelltes Problem voraus. Der Aspekt von der Erkundung eines Sachverhalts, der ebenso zur Bearbeitung eines Sachproblems gehört, wird nicht erfasst; dabei geht es meist um Planung und Steuerung von Aktivitäten ganz anderer Art:

Ein Lexikon ist zu befragen,
die Benutzung einer Bibliothek ist kennenzulernen,
Material ist zusammenzustellen,
Auskünfte von Behörden sind einzuholen,
eine Schülerbefragung ist zu organisieren,
der Bauplan für ein Modell ist zu entwerfen,
die Arbeit in einer Gruppe ist zu regeln, usw.

Die große Vielfalt derartiger Aufgabenstellungen dürfte sich kaum durch übergeordnete Handlungsanweisungen erfassen und steuern lassen. Hier kann sich der Mathematikunterricht nur darum bemühen, dem Schüler im Zusammenhang mit dem Sachrechnen möglichst viele einschlägige Erfahrungen zu vermitteln. Ein hohes Maß an kooperativem Verhalten und verschiedene Formen der Gruppenarbeit sind dabei zugleich eine Voraussetzung für die Realisierung wie auch ein wesentliches Ziel des Unterrichts.

3 Aufgaben

1. Skizzieren Sie am Beispiel der Längen den Zugang zu Größen
 - a) über die Klassenbildung bezüglich des unmittelbaren Repräsentantenvergleichs,
 - b) über die Zuordnung von Maßzahlen durch eine Funktion auf den Repräsentanten (also ein als vorgegeben geltendes Längenmessgerät).
2. Was versteht man unter einem *Größensbereich* $(\mathcal{G}, +, <)$? Geben Sie die Definition an und formulieren Sie die darin genannten algebraischen Gesetze.
3. Welche Größenarten werden im Grundschulunterricht behandelt? Nennen Sie die zugehörigen Größensbereiche möglichst in ihrer Behandlungsreihenfolge und geben Sie bei jeder Größenart jeweils Repräsentanten mit Vergleichsrelationen \sim und $<$ an.
4.
 - a) Was versteht man unter dem *Vervielfachen einer Größe* mit einer natürlichen Zahl?
 - b) Wie lassen sich die Operationen „verteilen an“ und „aufteilen in“ bei Größen definieren? Was haben diese Operationen mit dem *Messen* zu tun?
5.
 - a) Skizzieren Sie zwei (inhaltlich verschiedene) typische Aufgabenstellungen des sogenannten *traditionellen Sachrechnens* und diskutieren Sie an diesen Beispielen knapp mögliche Einwände gegen das traditionelle Sachrechnen.
 - b) Grenzen Sie den Begriff „mathematisieren lernen“ gegen das traditionelle Sachrechnen ab und beschreiben Sie in knapper Form ein Unterrichtsbeispiel, in dem es (auch) um eine Mathematisierung geht.
6.
 - a) Geben Sie ein mögliche „moderne“ Fassung des Begriffs *Sachrechnen* an.

- b) HEINRICH WINTER unterscheidet drei Funktionen des Sachrechnens. Eine davon ist das *Sachrechnen als Lernstoff*. Nennen Sie die beiden anderen und geben Sie in knapper Form jeweils ein Unterrichtsbeispiel an.
7. Zum Sachrechnen als *Lernstoff* gehört auch die Behandlung der „Kommaschreibweise“. Durchsuchen Sie ein Grundschulwerk Ihrer Wahl und beantworten Sie folgende Fragen:
- In welchen Zusammenhängen taucht die Kommaschreibweise im Grundschulunterricht auf?
 - In welcher Bedeutung wird das Komma verwendet?
 - Welche Schwierigkeiten sind zu vermuten? Erläutern Sie Ihre Vermutung an zwei Sachbeispielen.
 - Inwieweit dient die „Kommaschreibweise“ zur Vorbereitung des Dezimalzahlbegriffs?
8. a) Was versteht man unter dem (*arithmetischen*) *Mittelwert* einer Wertereihe? Geben Sie ein Beispiel an, bei dem dieser Wert viel näher beim höchsten Wert der Wertereihe als beim niedrigsten liegt.
- b) Wählen Sie das Beispiel aus a) und erläutern Sie daran, was man unter dem *Zentralwert* einer Wertereihe versteht.
- c) Diskutieren Sie knapp, inwieweit sich die beiden Kennwerte aus a) und b) im Grundschulunterricht behandeln lassen.
9. Geben Sie fünf Situationstypen für die Verarbeitung von Größen an und skizzieren Sie jeweils ein passendes Beispiel.
10. a) Charakterisieren Sie das Sachrechnen als *Übungsrechnen* in traditioneller Sicht.
- b) Wie lässt sich die enge Sicht aus a) durch zusätzliche Schüleraktivitäten aufbrechen?
11. a) Was versteht man unter der *Mathematisierung* einer Sachsituation? Welche Stufen werden dabei im Wesentlichen immer wieder durchlaufen?
- b) Skizzieren Sie eine für den Grundschulunterricht geeignete Sachsi-

tuation und demonstrieren Sie dabei an Hand von Schüleraktivitäten die Stufen aus a).

12. a) Grenzen Sie den Begriff *Projekt* von anderen Sachaufgabentypen ab.
 b) Diskutieren Sie in knapper Form ein solches Projekt mit Vorbereitungsphase(n), Schüleraktivitäten und Präsentationsphase(n). Verwenden Sie dabei **nicht** den Bau eines Aquariums.
13. a) Welche formalen Hilfen kann man Schülern geben, damit sie den Inhalt einer Sachaufgabe besser erfassen?
 b) Welche formalen Lösungshilfen gibt es bei der Planung des Lösungsweges und der Aufgabenkontrolle?
14. a) Manchmal werden die Schüler am Textende von Sachrechenaufgaben aufgefordert: „Schätze erst das Ergebnis, rechne dann!“
 Wie ist hier wohl „Schätzen“ gemeint? Inwieweit ist diese Aufforderung hilfreich?
 b) Diskutieren Sie knapp, was man unter *Schätzen* verstehen muss, wenn es sich nicht um bloßes *Raten* handeln soll.
 c) Was versteht man unter dem *überschlägigen* Rechnen? Grenzen Sie den Begriff vom *Rundungsrechnen* ab!
15. a) Erläutern Sie am Beispiel einer Sachaufgabe mit zwei Bearbeitungsschritten die *Simplexdarstellung* sowohl nach BREIDENBACH als auch nach BAUERSFELD.
 b) Diskutieren Sie kurz, wofür solche Darstellungen von Nutzen sind.
16. a) Was versteht man unter dem *Rechenbaum* einer Sachaufgabe? Erläutern Sie ihn kurz an einem einfachen Beispiel, in dem zwei Operationen auftreten.
 b) Diskutieren Sie kurz, wofür sich Rechenbäume eignen (z.B. ob sie eine Hilfe bei der Umsetzung des Aufgabentextes in Rechenanweisungen sind).
 c) Geben Sie eine etwas komplexere Sachaufgabe an, zu der man

zwei verschiedene Rechenbäume zeichnen kann. Zeichnen Sie diese Rechenbäume mit eingetragenen Größen.

- 17.** a) Beschreiben Sie psychologische Aspekte des Problemlösens (insbesondere nach Gagné) durch Angabe der höheren Stufen in der Hierarchie des Lernens. Erläutern Sie die Begriffe.
- b) Erläutern Sie den Begriff der *Strukturierung* an zwei Beispielen.

4 Literatur

1. Richtlinien Mathematik Grundschule, Köln 1985
2. Überarbeitung der Lehrpläne für die Grundschule in NRW: Entwurf für das Fach Mathematik, Soest 2002
3. Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung: Mathematik, Köln 2003
4. H. Winter: Sachrechnen in der Grundschule, Frankfurt/M. 1992
5. G. N. Müller/E. Ch. Wittmann: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Braunschweig 1984
6. G. N. Müller/E. Ch. Wittmann (Hrsg.): Mit Kindern rechnen, Frankfurt/M. 1995
7. E. Ch. Wittmann/G. N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1, Bd. 2, Stuttgart 1990/92
8. H. Radatz/W. Schipper: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen, Hannover 1983
9. H. Naudersch: Sachrechnen in der Grundschule, München 1992
10. J. Krampe/R. Mittelmann/B. Kern: Schülergerechter Mathematikunterricht in den Klassen 1/2, 3/4, Donauwörth 1983
11. J. Floer/D. Haarmann (Hrsg.): Mathematik für Kinder, Frankfurt/M 1982
12. H. Besuden: Arbeitsmappe Verwendung von Arbeitsmitteln zum Thema Größen im MU der Grundschule, o.O. 1996
13. Offener MU in der Grundschule: Bd. II: Geometrie und Sachrechnen, Sonderdruck Mathematik der Grundschulzeitschrift, Velber 1995
14. G. Polya: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme, Bern 1980

15. G. Polya: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Bd. 2., Basel 1983
16. R. Arbinge: Psychologie des Problemlösens - Eine anwendungsorientierte Einführung, Darmstadt 1997
17. M. Franke: Auch das ist Mathe! Vorschläge für projektorientiertes Unterrichten, Tl. 1, 2, Köln 1995/96
18. M. Franke: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2003
19. Handreichung zum Sachrechnen in den Jahrgangsstufen 3 und 4, Verlag Auer, München 1997