Inzidenz-, Anordnungs- und Teilungsaxiome im Halbebenenmodell

Elham Niazi
Kerstin Wagner

Das Poincarésche Halbebenenmodell

1. Punkte sind alle euklidischen Punkte in der oberen Halbebene ohne die Ordinatenachse.
2. Geraden sind alle euklidischen Halbkreise oder Halbgeraden in der oberen Halbebene,
   deren Mittelpunkt bzw. Anfangspunkt auf der Ordinatenachse liegt.
3. Die Winkelmessung erfolgt“ euklidisch“.

Das Poincarésche Halbebenenmodell der H-Geometrie

- Nach Poincaré werden wir aus der oberen Halbebene der komplexen (Gaußschen) Zahlebene ein solches Modell gewinnen. Wir sehen die obere komplexe Halbebene $\mathrm{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0 \}$ als Menge P der Punkte einer Geometrie an und nennen solche Punkte der Deutlichkeit halber H-Punkte. Wir werden sie auch die nichteuklidische Ebene nennen.

Nichteuklidische Geraden

- Eine Teilmenge $g \subset \mathrm{H}$ heißt nichteuklidische Gerade, wenn

Typ A: Entweder gibt es $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$g := \{ z \in \mathrm{H} \mid \mathrm{R} z = a \}$

<u>Abbildung</u>

Geraden vom Typ A sind euklidische Strahlen in H, die von der reellen Achse ausgehen und parallel zu imaginären Achse sind.

Nichteuklidische Geraden

- Typ B: es gibt a $\in \mathbb{R}$, r>0 so, dass gilt
  g: $= \{ z \in H \mid |z-a|^2 = r^2 \}$
  Geraden vom Typ B sind Halbkreise in H, deren Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt.
  Abbildung

  Im Fall A heißt Re (z)= a, im Fall B heißt $|z-a|$ =r
  die Gleichung der nichteuklidischen Geraden.

Nichteuklidische Geraden

Euklidische Halbkreise und euklidische Halbgeraden, die orthogonal zur x-Achse Sind ,übernehmen demnach die Rolle der H-Geraden.

Inzidenzaxiome

Das Paar (P,H) genügt den Inzidenzaxiomen.

- Jede Gerade g enthält mindestens einen Punkt und mindestens drei Punkte P,Q,R existieren, ist offensichtlich.

  Abbildung

  Abbildung

Konstruktion

Anordnungsaxiome

(Typ1) Wenn die Gleichung für g die Form g: Re (z) =a hat, definieren wir $\prec$ für u, v$\in$ g durch

$u \prec v :\Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) < \operatorname{Im}(v)$

Anordnungsaxiome

(Typ2) Wenn die Gleichung für g die Form g: $|z-a|^2 = r^2$ hat, definieren wir $\prec$ für u, v $\in$ g durch

u $\prec$ v $:\leftrightarrow$ Re (u) < Re (v)

Anordnungsaxiome

Für jede Gerade g ist in der Menge der in g enthaltenen Punkte eine Relation $\prec$ (zu lesen als …“liegt vor…“) definiert, für die gilt:

(A1) Für keinen Punkt P $\in$ g gilt P $\prec$ P

(A2) $\prec$ ist *transitiv*, d.h. für alle P, Q, R $\in$ g gilt:
aus P $\prec$ Q und Q $\prec$ R folgt P $\prec$ R

Beweis: (Typ1) g: Re (z) = a

$P = a + ib_1$

$Q = a + ib_2$

$R = a + ib_3$

$$P \prec Q \iff Im(P) < Im(Q)$$

$$P \prec R \iff Im(P) < Im(R)$$

$$\Longrightarrow Im(P) < Im(Q) < Im(R)$$

$$P \prec R \qquad \square$$

Beweis: (Typ2) g: $|z-a|^2 = r^2$

$$P \prec Q \iff Re(P) < Re(Q)$$

$$P \prec R \iff Re(P) < Re(R)$$

$$\Rightarrow Re(P) < Re(Q) < Re(R)$$

$$\Rightarrow P \prec R \qquad \square$$

Anordnungsaxiom:

A(3) Sind P und Q verschiedene Punkte aus g, so gilt stets $P \prec Q$ oder $Q \prec P$.

A(4) Zu je zwei Punkten $P \in g$ und $Q \in g$ mit $P \prec Q$ gibt es mindestens drei weitere Punkte $A, B, C \in g$ mit $A \prec P \prec B \prec Q \prec C$.

Teilungsaxiome

Bei der Definition von Halbebenen wird wieder zwischen den beiden Typen von H-Geraden unterschieden.

Teilungsaxiome

(Typ 1) Wenn die Gleichung für g die Form
g: $Re(z) = a$ hat, definieren wir
Eg und E‘g durch

$Eg: = \{z \in H \mid Re(z) < a\}$ und

$E'g: = \{z \in H \mid Re(z) > a\}$

Teilungsaxiome

(Typ 2) Wenn die Gleichung für g die Form
g: $|z-a|^2 = r^2$ hat, definieren wir
Eg und E‘g durch

$Eg: = \{z \in H \mid |z-a| < r\}$ und

$E'g: = \{z \in H \mid |z-a| > r\}$

Teilungsaxiome

Zu jeder Geraden g gibt es zwei nichtleere Teilmengen Eg und E‘g von P, so dass gilt:

(T1) Eg U E‘g = P \ g.

(T1) ist nach Definition offensichtlich erfüllt, da wir die Trägergerade g bei der Definition ausgeschlossen haben und jeder sonstige Punkt von H entweder in Eg oder in E‘g liegt.

Teilungsaxiome

(T2) Für alle $P \in$ Eg und alle $Q \in$ E‘g gilt
$P \neq Q$ und die Strecke PQ enthält einen
Punkt $S \in g$.

Teilungsaxiome

(T3) Sind P und Q *verschiedene* Punkte, die beide zusammen in Eg oder E‘g liegen, so enthält die Strecke PQ *keinen* Punkt von g.