Bergische Universität Wuppertal
Referenten: Sogol Mir Abedini und Nadia Ait Lamat
Seminar: Euklidische Geometrie
Dozent: Prof. Dr. Detlef Lind
Semester: SS 2007

Thema: Abbildungen in der Halbebene

Um eine verständliche Basis zu schaffen, nutzen wir unser Grundwissen aus der euklidischen Geometrie und übertragen dieses auf die hyperbolische Welt. Im Grunde unterscheiden sie die beiden „Welten" bezüglich der Abbildung und ihrer Konstruktion nur sehr minimal. Falls es Abweichungen gibt, werden diese gesondert genannt, ansonsten gibt es keine Unterschiede. Wir wünschen euch viel Spaß beim ausprobieren :-)

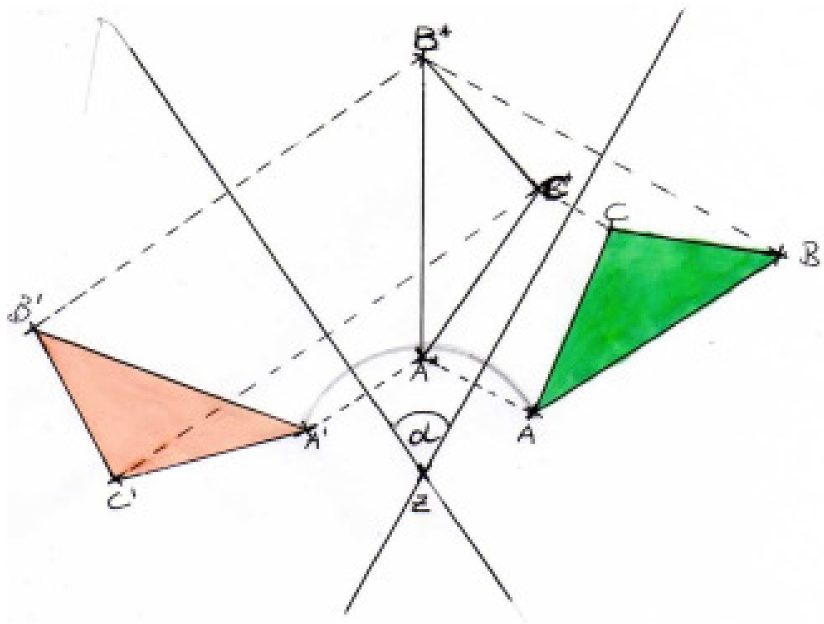
Drehung

Definition: Unter einer Drehung versteht man in der Geometrie eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich mit folgender Eigenschaft: Es gibt einen Punkt Z, welcher das so genannte Drehzentrum ist, und einem Winkel 2α, dem so genannten Drehwinkel, so dass für alle Punkte P der Ebene und ihr Bild P' folgendes gilt:

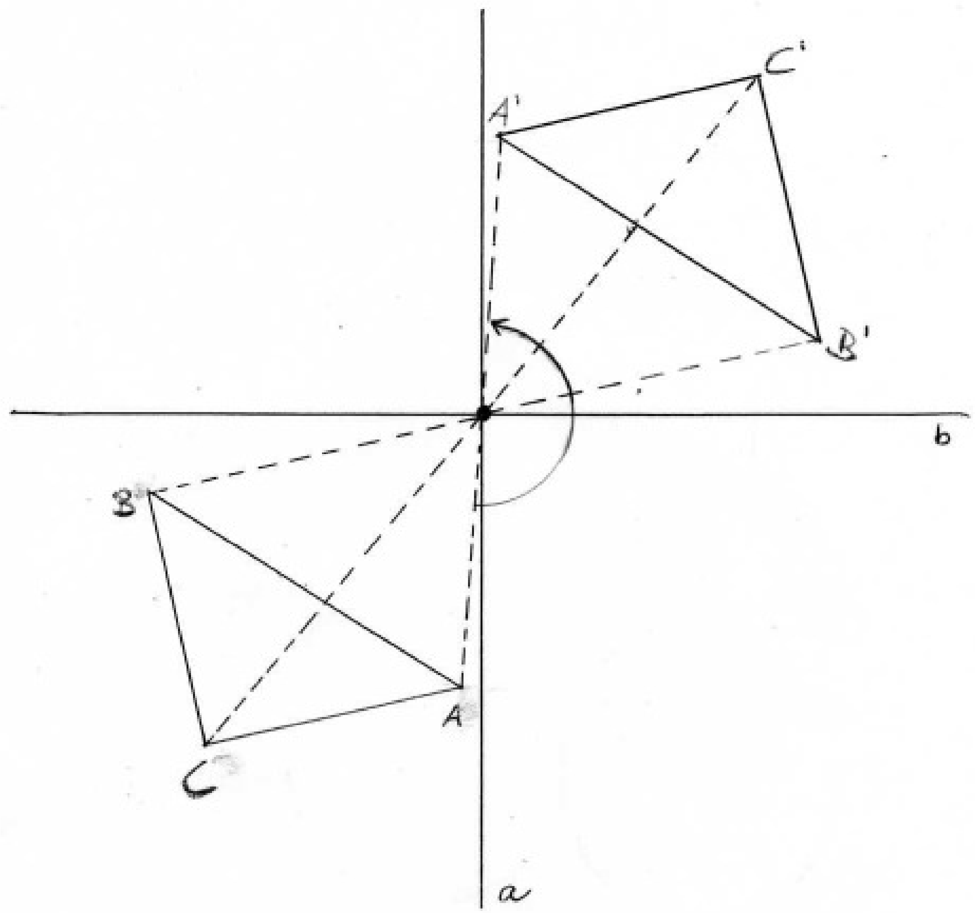
1. P und P' haben die gleiche Entfernung von Z:
2. Der Winkel PZP' ist 2α.

Die Drehung kann man auch als zweifache Spiegelung an zwei sich unter dem Winkel α scheidenden Geraden darstellen.

Euklidisch:



Sonderfall: Wenn die Spiegelachsen a, b orthogonal zueinander stehen, dann beträgt der Drehwinkel 180 Grad. Somit ist diese Drehung auch als Punktspieglung darstellbar.



Hyperbolisch: → Abb1.cdy und → Abb2.cdy

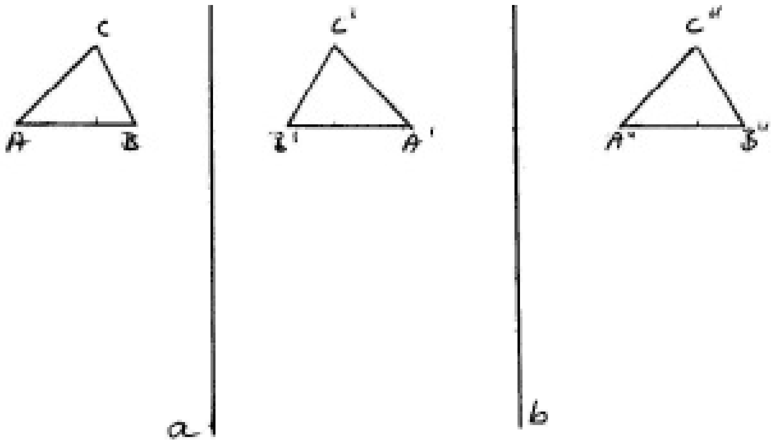
Ein besonderer Fall, denn in der euklidischen Welt gibt es ihn nicht, ist die **Grenzdrehung**. Man spricht von einer Grenzdrehung, sobald sich die Geraden am Rand der Welt schneiden. Das kann im ersten Poincaré-Modell entweder auf der x-Achse oder gegenüber im „Unendlichen" sein. Dieser zweite Schnittpunkt ist für uns leider nur vorstellbar und nicht sichtbar!

Hyperbolisch: → Abb3.cdy

Verschiebung:

Eine Doppelspiegelung an parallelen Geraden a und b definiert eine Verschiebung.

Im **Euklidischen** findet eine Verschiebung an zwei Parallelen überall rechtwinklig zu a um das Doppelte des Abstandes von a nach b statt:



Wichtig ist, dass Spiegelungen nicht vertauschbar sind.

Im **Hyperbolischen** ist die Aussage über den Abstand von P und P' nur auf dem gemeinsamen Lot von a und b richtig:

→ Abb4.cdy

Achsenspiegelung:

Definition: Diese Abbildung ist durch eine Gerade a (Spiegelachse) gegeben. Die Spiegelung an der Achse a ordnet jedem Punkt P der Zeichenebene einen Bildpunkt P' zu, der dadurch bestimmt ist, dass die Verbindungsstrecke [PP'] von der Achse a rechtwinklig halbiert wird.
Die Achsenspiegelung ist geraden-, längen- und winkeltreu.

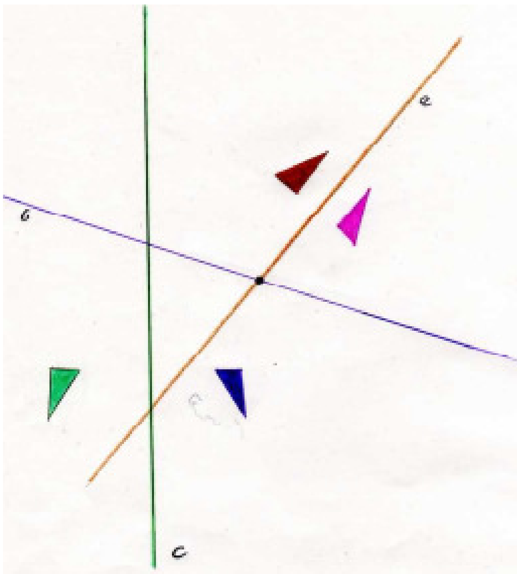
Einfachspiegelung: Eine Spiegelung an einer Geraden a (Achsenspiegelung mit der Spiegelachse a) ist durch folgende Bedingungen festgelegt:
1. jeder Punkt der Achse a ist Fixpunkt, also ist P'=P.
2. Wenn P nicht auf a liegt, dann ist a die Mittelsenkrechte der Strecke PP'.

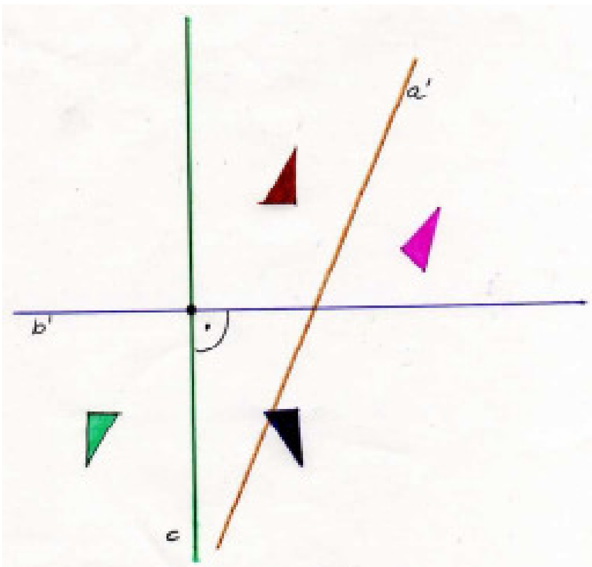
Im ersten Poincaré-Modell ist die Achsenspiegelung nur bei Achsen des Typs 1 (Parallelen zur y-Achse) euklidisch. Bei Achsen des Typs 2 (Halbkreise) handelt es sich um die Inversion am jeweiligen Kreis.

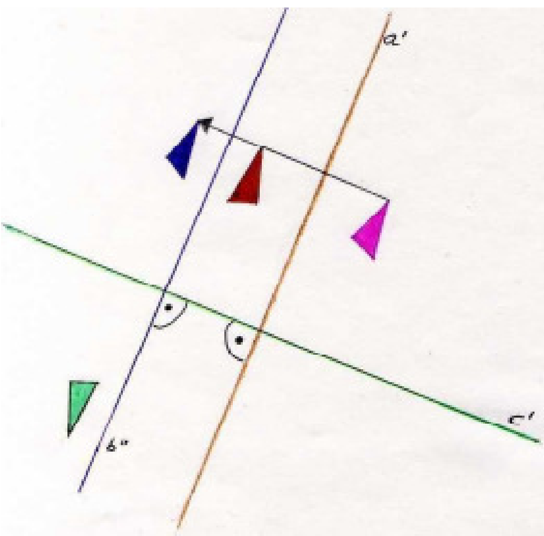
Hyperbolisch: → Abb5.cdy

Zweifachspiegelung: Die Zweifachspiegelung nennt man auch Doppelspiegelung. Es handelt sich entweder um eine Drehung (→ **Abb6.cdy**), eine Grenzdrehung oder eine Verschiebung
(diese Fälle wurden bereits besprochen).

Dreifachspiegelung:
Jede Dreifachspiegelung, bei der die drei Achsen a, b, c weder eigentlich noch uneigentlich kopunktal sind, noch alle zu einer weiteren Geraden orthogonal sind, kann auch als Verkettung einer Spiegelung mit einer Verschiebung parallel zur Spiegelachse dargestellt werden
Die Verkettung einer Spiegelung mit einer Verschiebung in Richtung der Spiegelachse nennt man eine **Schubspiegelung**. Dabei darf man die Spiegelung mit der Verschiebung vertauschen.
Euklidisch:





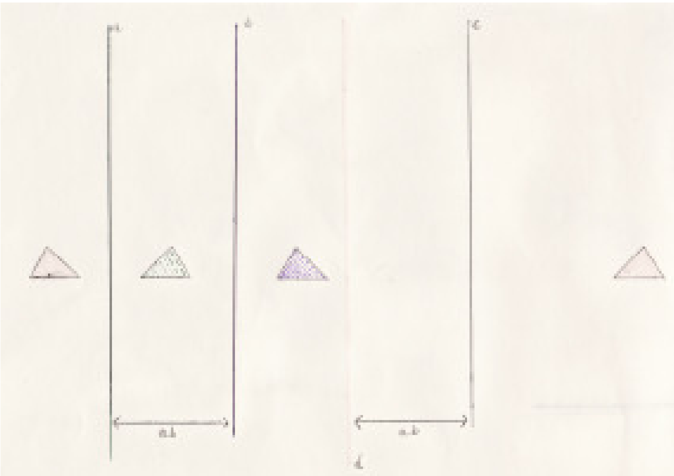


Hyperbolisch: **→ Abb7.cdy**

Sonderfälle der Dreifachspieglung:

Bei gemeinsamer Orthogonalität: Die Dreifachspieglung kann durch die Einfachspiegelung an einer Gerade d, die den Abstand |ab| zu Gerade c hat und ebenfalls gemeinsam orthogonal ist, ersetzt werden.

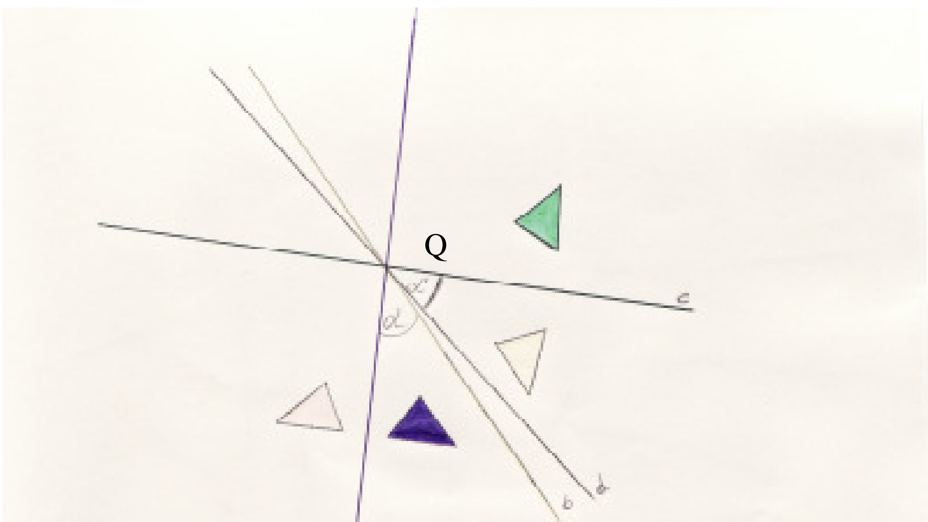
Euklidisch:



Hyperbolisch: → Abb8.cdy

Kopunktalfall: Eine Dreifachspieglung bei der sich alle drei Geraden a, b, c in einem Punkt Q schneiden, kann durch die Einfachspiegelung an einer Gerade d durch Q, welche mit c demselben Winkel α wie der Winkel zwischen a und b zu c bildet, ersetzt werden.

Euklidisch:



Hyperbolisch: → **Abb9.cdy**

Vierfachspieglung

Jede Vierfachspiegelung ist darstellbar als Zweifachspiegelung

Für den Fall zweier H-Verschiebungen: → **Abb10.cdy**