



Nichteuklidische Geometrie

D. Lind

Bergische Universität Wuppertal

SS 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Axiome der ebenen Geometrie	1
1.1	Euklidische Geometrie	1
1.2	Das Parallelenpostulat bei Euklid	3
	Beweisversuche	3
1.3	Unabhängigkeitsnachweise für das Parallelenaxiom	5
	Johann Carl Friedrich Gauss, János Bolyai und Nikolai Ivanowitsch Lobatschewski	5
	Georg Friedrich Bernhard Riemann, Eugenio Beltrami, Felix Klein und Henri Poincaré	6
1.4	Axiome der ebenen hyperbolischen Geometrie	9
2	Die beiden Poincaré-Modelle der H-Geometrie	11
2.1	Die Ebene der komplexen Zahlen	11
2.2	Das Poincarésche Halbebene-Modell der H-Geometrie	17
2.3	H-Bewegungen im Poincaréschen Halbebene-Modell	21
2.4	Längen- und Winkelmessung im Poincaréschen Halbebene-Modell	29
	Die H-Längenmessung	29
	Die H-Winkelmessung	30
2.5	Das Poincarésche Kreisscheibenmodell der H-Geometrie	34
	Die Cayleytransformation	34
	Ausblick auf die hyperbolische Figurenlehre	38
	H-Kreise:	39
	H-Dreiecke:	39

1 Axiome der ebenen Geometrie

1.1 Euklidische Geometrie

Es soll zunächst eines der vielen „modernen“ Axiomensystem für die ebene Euklidische Geometrie angegeben werden, wie es in heutigen Grundvorlesungen zur Geometrie gebracht wird:

Gegeben sind eine nichtleere Menge \mathcal{P} , der Elemente *Punkte* heißen, und eine nichtleere Menge \mathcal{G} , deren Elemente Teilmengen von \mathcal{P} sind und *Geraden* heißen.

$(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt genau dann ein Modell der **ebenen euklidischen Geometrie**, wenn gilt:

Inzidenzaxiome

- (I1) Jede Gerade g enthält mindestens zwei Punkte P, Q .
- (I2) Zu je zwei Punkten P, Q gibt es *genau eine* Gerade g , die P und Q enthält.

- (I3) Es gibt mindestens drei Punkte P, Q, R , die *nicht* zusammen in einer Geraden enthalten sind.

Parallelenaxiom

- (P) Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g mit $P \notin g$ existiert *genau eine* Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \{\}$.

Anordnungsaxiome

Für jede Gerade g ist in der Menge der in g enthaltenen Punkte eine Relation \prec (zu lesen als ... „liegt vor“ ...) definiert, für die gilt:

- (A1) Für *keinen* Punkt $P \in g$ gilt $P \prec P$.
- (A2) \prec ist *transitiv*, d.h. für alle $P, Q, R \in g$ gilt:
aus $P \prec Q$ und $Q \prec R$ folgt $P \prec R$.
- (A3) Sind P und Q *verschiedene* Punkte aus g , so gilt stets $P \prec Q$ oder $Q \prec P$.

- (A4) Zu je zwei Punkten $P \in g$ und $Q \in g$ mit $P \prec Q$ gibt es mindestens drei weitere Punkte $A, B, C \in g$ mit $A \prec P \prec B \prec Q \prec C$.

Sind P, Q verschiedene Punkte, so definiert man die (offene) Strecke PQ als die Menge aller Punkte auf der durch P und Q bestimmten Geraden, die im Sinne von \prec *zwischen* P und Q liegen.

Als *Halbgerade* PQ^+ wird die Teilmenge aller Punkte R von g bezeichnet, für die $R = Q$, $R \in PQ$ oder $Q \in PR$ gilt (PQ^+ wird auch der *Strahl mit Anfangspunkt P durch Q* genannt).

Teilungsaxiome

Zu jeder Gerade g gibt es zwei nichtleere Teilmengen Σ_g und Σ'_g von \mathcal{P} , so dass gilt:

- (T1) $\Sigma_g \cup \Sigma'_g = \mathcal{P} \setminus g$.
- (T2) Für alle $P \in \Sigma_g$ und alle $Q \in \Sigma'_g$ gilt $P \neq Q$ und die Strecke PQ enthält einen Punkt $S \in g$.
- (T3) Sind P und Q verschiedene Punkte, die beide zusammen in Σ_g oder Σ'_g liegen, so enthält die Strecke PQ keinen Punkt von g .

Σ_g und Σ'_g heißen die beiden *Halbebenen* mit der *Trägergeraden* g . Man kann *beweisen*, dass die Menge $\{\Sigma, \Sigma'\}$ eindeutig durch die zugehörige Gerade g und diese Forderungen bestimmt ist.

Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte, so versteht man unter ABC^+ die Halbebene mit der Trägergeraden g_{AB} , in der C liegt.

Bewegungsaxiome

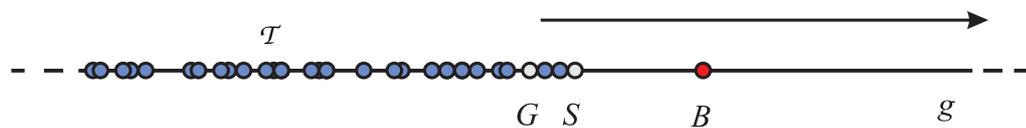
Es gibt eine Menge \mathcal{B} umkehrbar eindeutiger Abbildungen von \mathcal{P} auf \mathcal{P} , so dass gilt:

- (B1) (\mathcal{B}, \circ) ist eine *Gruppe*.
- (B2) Für alle $P, Q \in \mathcal{P}$ mit $P \neq Q$ und alle $\tau \in \mathcal{B}$ gilt $(PQ)^\tau = P^\tau Q^\tau$.
- (B3) Sind A, B, C nicht-kollineare Punkte und auch A', B', C' nicht-kollineare Punkte, so gibt es genau ein $\tau \in \mathcal{B}$ mit $A^\tau = A', B^\tau \in A'B'^+$ und $C^\tau \in A'B'C'^+$.
- (B4) a) Zu je zwei Punkten A, B gibt es $\tau \in \mathcal{B}$ mit $A^\tau = B$ und $B^\tau = A$.
b) Zu je zwei Halbgeraden AB^+ und AC^+ mit gemeinsamem Anfangspunkt A gibt es *genau ein* $\tau \in \mathcal{B}$ mit $(AB^+)^\tau = AC^+$, und $(AC^+)^\tau = AB^+$.

Man nennt (\mathcal{B}, \circ) die *Gruppe der Bewegungen* (oder *Kongruenzabbildungen*). Mit Hilfe dieser Abbildungen kann man die Längenmessung bei Strecken definieren.

Vollständigkeitsaxiom

- (V) Für alle nichtleeren Teilmengen \mathcal{T} einer durch \prec angeordneten Gerade g gilt:
Gibt es auf g einen Punkt B mit $T \prec B$ für alle $T \in \mathcal{T}$, so gibt es einen Punkt S auf g mit:
(1) $T \preceq S$ für alle $T \in \mathcal{T}$.
(2) Zu jedem $G \in g$ mit $G \prec S$ gibt es mindestens einen Punkt $T \in \mathcal{T}$ mit $G \prec T$.



1.2 Das Parallelenpostulat bei Euklid

Um 300 v. Chr. schrieb EUKLID die *Elemente*, die als eines der berühmtesten jemals geschriebenen Bücher gelten können. EUKLID formulierte fünf Postulate, auf die er alle seine Sätze gründete:

Gefordert soll sein

1. *dass man von jedem Punkt nach jedem (anderen) Punkt die Strecke ziehen kann,*
 2. *dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,*
 3. *dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,*
 4. *dass alle rechten Winkel einander gleich sind.*
5. *Postulat: Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann müssen die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich auf der Seite treffen, auf der die beiden Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*

Offensichtlich unterscheidet sich das fünfte Postulat von den anderen vier. Auch EUKLID war nicht mit ihm zufrieden und versuchte, so lange wie möglich ohne es auszukommen. Tatsächlich konnte er die ersten 28 *Propositionen* in den *Elementen* ohne es beweisen.

Offensichtlich nahm EUKLID (und viele Autoren nach ihm) an, dass Geraden keine endlich langen Linien sind. Die Griechen verstanden darunter allerdings nur so etwas, wie eine „beliebig verlängerbare Strecke“.

Beweisversuche

PROKLUS (410-485 n. Chr.) schrieb einen Kommentar zu den *Elementen*, in dem er auch auf Versuche einging, das fünfte Postulat aus den anderen vier herzuleiten. Insbesondere merkte er an, dass PTOLEMÄUS einen fehlerhaften Beweis geliefert hätte. Danach formulierte er allerdings selber einen falschen Beweis. Immerhin stellte er darin eine Forderung auf, die äquivalent zum fünften Postulat ist. Sie lautet in heutiger Sprechweise:

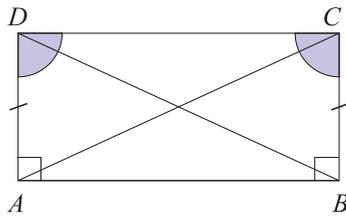
Gegeben eine Gerade und ein nicht auf dieser Geraden liegender Punkt, dann gibt es genau eine Parallele zu dieser Geraden durch den gegebenen Punkt.

Dies ist die Fassung des heute gebräuchlichen Axioms (P).

In der Folgezeit wurden viele vergebliche Versuche unternommen, das fünfte Postulat aus den übrigen vier herzuleiten. Viele dieser Versuche galten sogar längere Zeit als erfolgreich. In jedem der Fälle wurde jedoch schließlich eine unzulässige Annahme aufgedeckt. Diese Fehler liefen alle darauf hinaus, dass ein „offensichtlicher“ Sachverhalt mit herangezogen wurde, der nicht aus den vier anderen Postulaten zu folgern ist und äquivalent zum fünften Postulat ist. So dachte z. B. 1663 JOHN WALLIS, er hätte einen Beweis gefunden. Tatsächlich hatte er nur gezeigt, dass das fünfte Postulat zu folgender Forderung äquivalent ist:

Zu jedem Dreieck gibt es ein ähnliches Dreieck beliebig vorgegebener Größe.

Der 1697 von GIROLAMO SACCHERI aufgestellte Beweis ist insofern wichtiger als die meisten anderen, als Saccheri einen Widerspruch aus der Annahme herleiten wollte, das fünfte Postulat sei falsch. Er verwendete dazu folgende Beweisfigur, die er *Quadrilateral* nannte:



$\triangle ABC$ ist kongruent zu $\triangle BAD$.
(zwei Seiten und eingeschl. Winkel)

Also: $\overline{AC} = \overline{BD}$ und damit
 $\triangle ADC$ kongruent zu $\triangle BCD$.
(drei Seiten)

Also: $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD$.

Fig. 1

Saccheri bewies wie in der Argumentation in Fig. 1, dass in dieser Figur die „Gipfelwinkel“ bei D und C gleich groß sind.

Im Beweis werden nur Eigenschaften kongruenter Dreiecke verwendet, die Euklid in den Propositionen 4 und 8 ohne Verwendung des fünften Postulats gezeigt hatte.

Saccheri unterschied danach drei Fälle:

- Die Gipfelwinkel sind $> 90^\circ$ (Stumpfwinkelhypothese).
- Die Gipfelwinkel sind $< 90^\circ$ (Spitzwinkelhypothese).
- Die Gipfelwinkel sind $= 90^\circ$ (Rechtwinkelhypothese).

Euklids fünftes Postulat ist c). Saccheri zeigte, dass die Stumpfwinkelhypothese das fünfte Postulat nach sich zieht, und erhielt damit für diesen Fall einen Widerspruch. Anschließend untersuchte Saccheri die Spitzwinkelhypothese und folgerte aus ihr viele Sätze der nichteuklidischen Geometrie ohne zu bemerken, was er da eigentlich „trieb“. Es gelang ihm erst, einen Widerspruch aus der Spitzwinkelhypothese herzuleiten, als er die (unzulässige!) Annahme machte, dass es einen „unendlich fernen Punkt“ gibt.

1766 verfolgte JOHANN HEINRICH LAMBERT eine ähnliche Beweislinie wie Saccheri. Er verfiel jedoch nicht dem Trugschluss von Saccheri und untersuchte die Spitzwinkelhypothese ohne die Herleitung eines Widerspruchs.

Lambert stellte fest, dass in einer solchen neuen Geometrie die Innenwinkelsumme eines Dreiecks mit kleiner werdendem Flächeninhalt des Dreiecks wächst.

ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) arbeitete 40 Jahre seines Lebens am Problem des Parallelenaxioms. Seine Resultate finden sich als Anhänge zu den verschiedenen Auflagen seines höchst erfolgreichen Buches *Eléments de Géométrie*. Legendre bewies, dass Euklids fünftes Postulat äquivalent ist zu:

Die Innenwinkelsumme im Dreieck ist gleich zwei rechten Winkeln.

Legendre zeigte wie schon Saccheri über 100 Jahre zuvor, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht größer als zwei Rechte sein kann. Wie Saccheri brauchte er dazu die Unendlichkeit von Geraden.

Beim Versuch, die Unmöglichkeit einer Winkelsumme unter 180° zu beweisen, nahm Legendre an, dass man durch jeden Punkt P im Inneren eines spitzen Winkelfeldes eine Gerade legen kann, die beide Schenkel trifft. Dies ist wiederum nur ein Äquivalent zum Parallelenaxiom. Legendre bemerkte diesen Trugschluss nie.

Die Elementargeometrie wurde in diesen Jahren völlig von der Problematik des Parallelenaxioms überschattet. JEAN LE ROND D'ALEMBERT nannte dies 1767 den Skandal der Elementargeometrie.

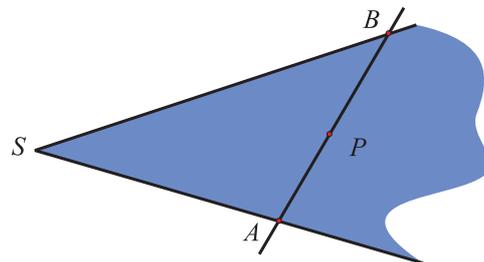


Fig. 2

1.3 Unabhängigkeitsnachweise für das Parallelenaxiom

Johann Carl Friedrich Gauss, János Bolyai und Nikolai Ivanowitsch Lobatschewski

Der erste, der das Parallelenproblem wirklich verstand, war JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855). Schon als Fünfzehnjähriger versuchte er 1792, das Parallelenpostulat aus den übrigen vier Postulaten herzuleiten. Nachdem er bis 1813 nur wenig Fortschritte erzielt hatte, schrieb er:

Bei der Theorie der Parallelen sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid. Dies ist ein beschämender Teil der Mathematik...

Um 1817 war Gauss jedoch zur Überzeugung gekommen, dass das fünfte Postulat unabhängig von den übrigen vier ist. Er fing daher damit an, die Konsequenzen einer Geometrie herauszuarbeiten, in der es zu einer Geraden und einem außerhalb der Geraden gelegenen Punkt mehr als eine Parallele durch diesen Punkt gibt. Gauss hat seine Überlegungen nie veröffentlicht und behielt seine Resultate für sich. Die Beschäftigung mit dem Parallelenaxiom war damals nämlich nicht gut angesehen.

So dominierten zum Beispiel in der Philosophie die Ansichten Immanuel Kants, und dieser hatte behauptet, die Euklidische Geometrie sei eine unvermeidbare Denknötwendigkeit.

Gauss diskutierte allerdings die Parallelen Theorie mit dem befreundeten ungarischen Mathematiker FARKAS BOLYAI, der mehrere falsche Beweise des Parallelenpostulats geliefert hatte. Farkas Bolyai unterrichtete seinen Sohn János in Mathematik und hatte diesen gewarnt, nur ja keine einzige Stunde an das Problem mit dem fünften Postulat zu verschwenden. JÁNOS BOLYAI wagte sich trotzdem an das Problem.

Im Jahr 1823 schrieb Bolyai an seinen Vater und berichtete: „Ich habe einige so wunderbare Dinge entdeckt, dass ich erstaunt war ... aus dem Nichts heraus habe ich eine fremde neue Welt erschaffen“.

Bolyai brauchte noch zwei weitere Jahre, bis er alles niedergeschrieben hatte und seine *Fremde neue Welt* 1825 als 24-seitigen Anhang an ein Buch seines Vaters publizieren konnte. Zur Verwirrung der Nachwelt erschien dieser Anhang, bevor das Buch selbst gedruckt war. Nachdem Gauss die 24 Seiten gelesen hatte, schrieb er einem Freund: „Ich halte diesen jungen Geometer für einen Genius ersten Ranges“.

Obwohl diese Worte sehr beeindruckend klingen, machte Gauss Bolyai die niederschmetternde Eröffnung, dass er dies alles schon früher entdeckt und nur nicht publiziert habe.

Dies mindert allerdings nicht die Bedeutung von Bolyais unglaublicher Leistung. Diese besteht darin, dass Bolyai zwar ähnliche Wege wie manche Vorgänger gegangen war, aber im Gegensatz zu diesen die neue Geometrie für möglich hielt. Auch die 1829 von NIKOLAI IVANOWITSCH LOBATSCHESKI veröffentlichte Abhandlung über *nichteuklidische Geometrie* ändert nichts an dieser Wertung. Weder Gauss noch Bolyai kannten Lobatschewskis Veröffentlichung, da sie erst einmal nur auf Russisch im *Kasaner Boten* publiziert worden war. Lobatschewskis Versuch, ein breiteres Publikum zu erreichen, war nämlich gescheitert, da der Mathematiker OSTROGRADSKI die Arbeit in einem Gutachten ablehnte.

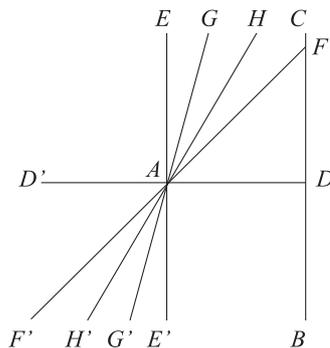
So ging es Lobatschewski denn auch nicht besser als Bolyai, was die öffentliche Anerkennung seiner bedeutenden Arbeit angeht. Er publizierte 1840 seine 61-seitigen *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallelen* und erlebte es auch, dass ein 37-seitiger Bericht darüber in französischer Sprache für eine breitere

Leserschaft in *Crelles Journal zur Mathematik* erschien. Die Mathematikergemeinde war damals jedoch noch nicht reif dafür, derart revolutionäre Ideen zu akzeptieren.

In seinem Büchlein aus dem Jahr 1840 macht Lobatschewski klar, wie seine nichteuklidische Geometrie „funktioniert“:

*Alle Geraden, die in einer Ebene von einem Punkt ausgehen, können bezüglich einer (nicht durch diesen Punkt gehenden) Geraden in zwei Klassen geteilt werden - in schneidende und nichtschneidende. Die Grenzgeraden dieser beiden Klassen sollen **Parallelen zur gegebenen Geraden** genannt werden.*

Die erklärende Skizze dazu ist:



AD ist die Senkrechte von A auf BC .

AE ist senkrecht zu AD .

Innerhalb des Winkels EAD treffen einige Geraden (wie AF) die Gerade BC .

Angenommen, AE ist nicht die einzige Gerade, die BC nicht schneidet.

Sei AG eine weitere solche Gerade.

AF ist eine schneidende Gerade und AG ist eine nichtschneidende Gerade.

Es muss eine Grenze zwischen schneidenden und nichtschneidenden Geraden geben und wir nehmen an, dass AH diese Grenze ist.

Fig. 3

Dies entspricht dem Ersetzen des fünften Postulats durch die Forderung:

Lobatschewskisches Parallelenpostulat:

Zu einer gegebenen Geraden und einem nicht darauf liegenden Punkt gibt es zwei Parallelen durch diesen Punkt.

Lobatschewski arbeitete weiter und leitete viele trigonometrische Beziehungen für Dreiecke her, die in seiner Geometrie gültig waren. Er zeigte dabei, dass sich die euklidischen Beziehungen als Grenzfall ergaben, wenn die Dreieckseitenlängen alle gegen Null gehen.

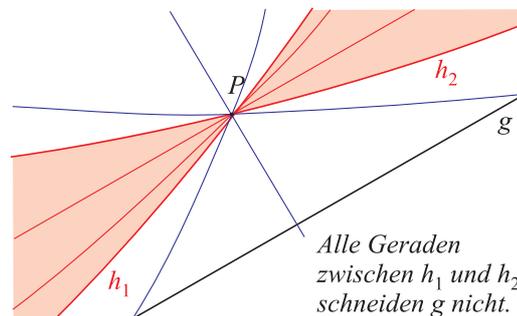


Fig. 4

Georg Friedrich Bernhard Riemann, Eugenio Beltrami, Felix Klein und Henri Poincaré

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866), der seine Dissertation unter der Aufsicht von Gauss geschrieben hatte und nach Annahme seiner Habilitationsschrift eine Probevorlesung halten musste, formulierte am 10 Juni 1854 in dieser Vorlesung das ganze Konzept der Geometrie neu.

Er sah dabei die Geometrie als einen Raum mit genug Zusatzstruktur an, um etwas wie Längen messen zu können. Diese Vorlesung wurde erst 1868, also zwei Jahre nach Riemanns Tod, veröffentlicht und hatte einen tiefgreifenden Einfluss auf die Entwicklung einer Vielzahl neuer Geometrien. Riemann hatte z.B. in Kurzform auch eine „sphärische“ Geometrie diskutiert, in der jede Gerade durch einen Punkt P außerhalb einer Geraden AB die Gerade AB schneidet. In dieser Geometrie gibt es überhaupt keine Parallelen im Sinne des Nichtschneidens.

Wichtig ist, dass weder Bolyais noch Lobatschewskis Beschreibungen ihrer neuen Geometrien auf *Widerspruchsfreiheit* geprüft worden waren. Das galt zwar auch für die Euklidische Geometrie, doch hier waren die

Mathematiker wegen der Jahrhunderte langen Erfahrungen mit der Euklidischen Geometrie davon überzeugt, dass wohl keine Widersprüche mehr in dieser Geometrie aufgedeckt würden.

Der erste, der die Bolyai - Lobatschewskische nichteuklidische Geometrie auf das gleiche Fundament wie die Euklidische Geometrie stellte, war EUGENIO BELTRAMI (1835-1900). Er schrieb 1868 eine Veröffentlichung mit dem Titel *Aufsatz zur Interpretation der nichteuklidischen Geometrie*, in der er ein Modell der 2-dimensionalen nichteuklidischen Geometrie innerhalb der 3-dimensionalen Euklidischen Geometrie angab. Das Modell war auf der Rotationsfläche einer *Traktrix* um ihre Asymptote definiert. Diese Fläche wird manchmal auch *Pseudo-Sphäre* genannt:

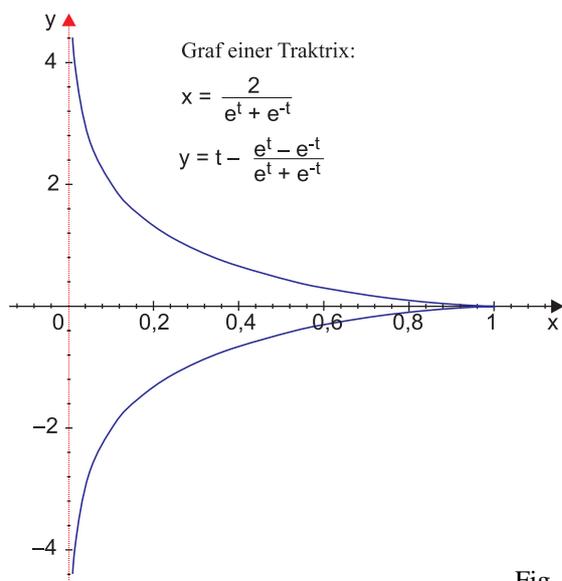


Fig. 5

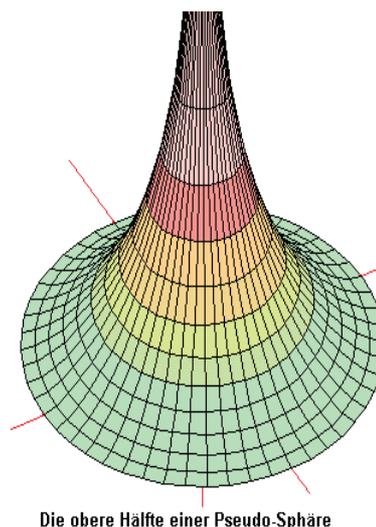


Fig. 6

Beltramis Modell ist zwar unvollständig, es ermöglichte aber sicherlich eine endgültige Entscheidung über das fünfte Postulat von Euklid, da in diesem Modell die ersten vier Postulate galten, das fünfte jedoch nicht.

Beltramis Arbeit über ein Modell der Bolyai - Lobatschewskischen nichteuklidischen Geometrie wurde 1871 von FELIX KLEIN vervollständigt. Klein kam dabei weiter und gab auch Modelle für andere nichteuklidische Geometrien wie Riemanns sphärische Geometrie an. Klein stützte sich dabei auf eine DISTANZNOTATION, die CAYLEY im Jahr 1859 als Verallgemeinerung der üblichen Distanzfunktion vorgeschlagen hatte (vgl. Fig.8).

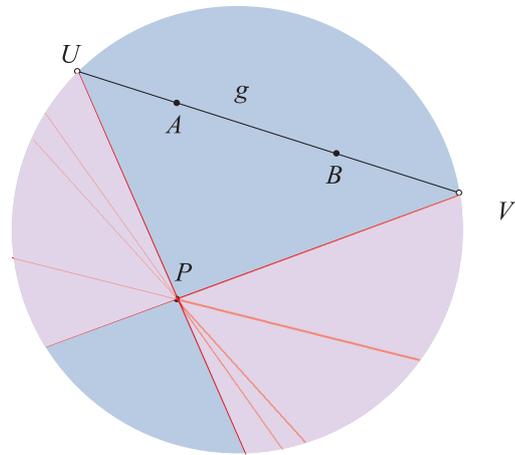
Klein zeigte, dass es drei grundsätzlich verschiedene Arten der ebenen Geometrie gibt:

- Beim Bolyai - Lobatschewskischen Geometrietyp besitzt jede Gerade AB zwei „unendlich ferne“ Punkte U und V .
- In der Riemannschen sphärischen Geometrie besitzen Geraden keine (bzw. zwei imaginäre) unendlich ferne Punkte.
- Die Euklidische Geometrie ist ein Grenzfall, bei dem die unendlich fernen Punkte zusammenfallen.

Wir nennen ab jetzt die Bolyai - Lobatschewskische ebene Geometrie kurz *Nichteuklidische Geometrie*, da nur in ihr alle eingangs aufgeführten Axiome der Axiomgruppen (I), (A), (T), (B) und das Vollständigkeitsaxiom neben der Verneinung des Parallelenaxioms gelten. In der sphärischen Geometrie lassen sich nicht alle Axiome der Anordnung und Teilung erfüllen.

Das Kleinsche Modell für die Nichteuklidische Geometrie hat folgende Eigenschaften:

1. Punkte sind alle euklidischen Punkte im Inneren einer Kreisscheibe (ohne den Rand).
2. Geraden sind alle euklidischen Kreissehnen (ohne die Endpunkte).



$$|AB| = \ln \left(\frac{\overline{AU} \cdot \overline{BV}}{\overline{BU} \cdot \overline{AV}} \right)$$

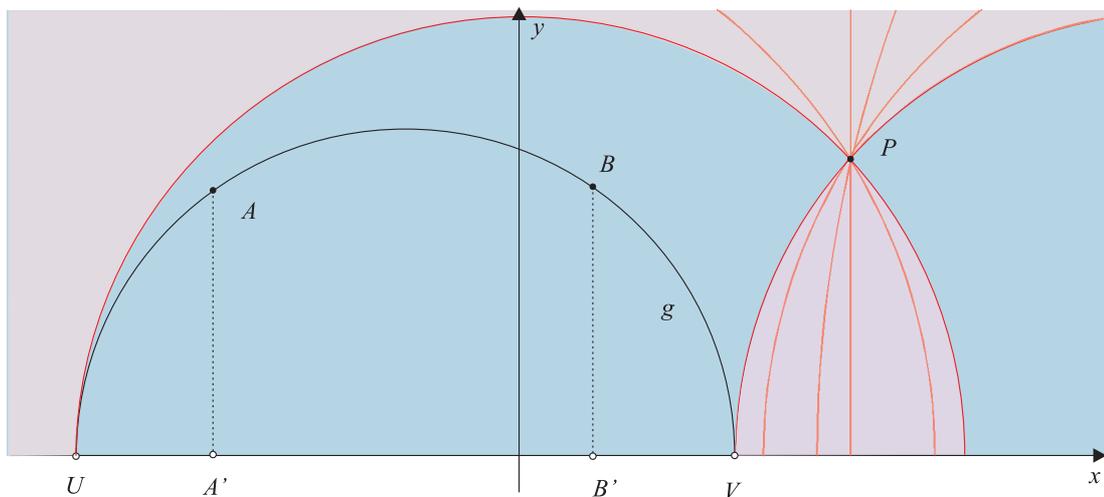
Fig. 7

Der Hauptnachteil des Modells ist, dass auch die Winkelmessung nicht „euklidisch“ erfolgen kann.

Der französische Mathematiker HENRI POINCARÉ (1854-1912) stand wegen der Theorie automorpher Funktionen in Korrespondenz mit Klein und veröffentlichte in einer Arbeit über eine spezielle Funktionenklasse zwei weitere Modelle der Nichteuklidischen Geometrie. Das erste dieser beiden Modelle ist der Schule durchaus zugänglich, das zweite wird in der Geometriesoftware Cinderella als „hyperbolische Zeichenfläche“ verwendet.

Erstes Modell:

1. Punkte sind alle euklidischen Punkte in der oberen Halbebene des Koordinatensystems (ohne die Punkte der x -Achse).
2. Geraden sind alle euklidischen Halbgeraden und Halbkreise in der oberen Halbebene mit Fußpunkten auf der x -Achse.
3. Die Längenmessung erfolgt wie in Fig. 8 angegeben. Die Winkelmessung erfolgt „euklidisch“ zwischen den Kurven.



$$|AB| = \ln \left(\frac{\overline{A'U} \cdot \overline{B'V}}{\overline{B'U} \cdot \overline{A'V}} \right)$$

Fig. 8

Zweites Modell:

1. Punkte sind alle euklidischen Punkte im Inneren einer Kreisscheibe (ohne den Rand).
2. Geraden sind alle euklidischen Durchmesser und Kreisbögen, die an beiden Enden orthogonal zum Rand sind.
3. Die Winkelmessung erfolgt „euklidisch“ zwischen den Kurven.

Die Längenmessung wird mit Hilfe der Funktion \ln und der Beschreibung von Punkten durch *komplexe Zahlen* erklärt. Dies wird erst in einem späteren Kapitel diskutiert.

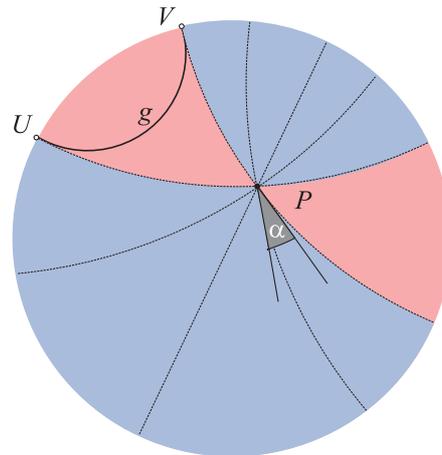


Fig. 9

Abschließend soll noch ein Dreieck in der so definierten „Hyperbolischen Ebene“ gezeigt werden:

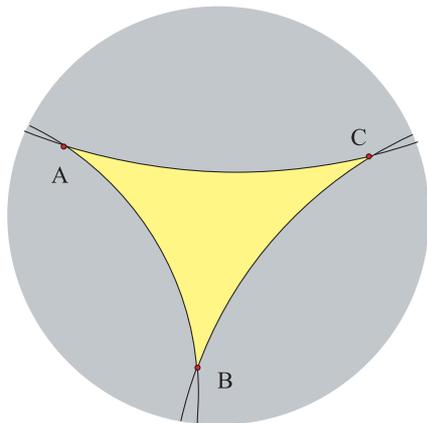


Fig. 10

Offensichtlich ist in diesem Dreieck die Innenwinkelsumme kleiner als 180° . Würde man es immer weiter vergrößern, bis die Punkte A , B und C fast „am Rand der Welt“ liegen, so wären die Innenwinkel alle sehr klein!

1.4 Axiome der ebenen hyperbolischen Geometrie

Es können unter Voraussetzung der Axiome(nguppen) (I), (A), (T), (B) und (V) ohne Verwendung des Parallelenaxioms eine Fülle von Sätzen gezeigt werden, die man *Sätze der absoluten Geometrie* nennt¹. Einige dieser Sätze sind (neben Äquivalenzsätzen im Hinblick auf das Parallelenaxiom):

- In jedem Dreieck ist die Innenwinkelsumme höchstens gleich 2 Rechten.
- Existiert ein Dreieck, dessen Innenwinkelsumme gleich zwei Rechten ist, so hat *jedes* Dreieck diese Innenwinkelsumme.
- Zu jeder Gerade g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es *mindestens* eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \emptyset$.

Damit bleibt bei einer Negation des Parallelenaxioms unter Beibehaltung aller übrigen Axiome nur die Möglichkeit, dass jedes Dreieck eine Innenwinkelsummen *unter* 180° besitzt und das Parallelenaxiom ersetzt werden muss durch:

¹vgl. dazu A. FILLER (1993), Euklidische und Nichteuklidische Geometrie, S. 64-109

Hyperbolisches Parallelenaxiom:

(H) Zu jeder Gerade g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es *mindestens* zwei Geraden u und v mit $u \cap v = \{P\}$, $g \cap u = \emptyset$ und $g \cap v = \emptyset$.

Für eine Konfiguration, wie sie in (H) genannt wird, kann mit Hilfe der Anordnungs- und Teilungsaxiome gezeigt werden, dass es *unendlich viele* Geraden $g_{P,Q}$ gibt, die g nicht schneiden:

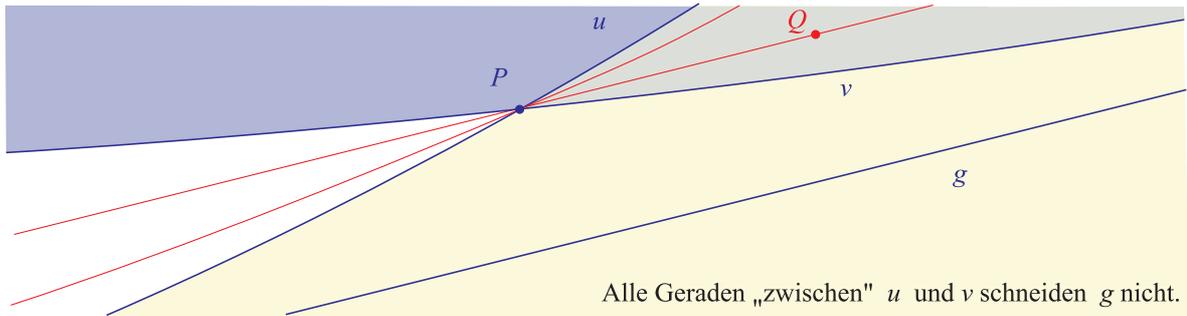


Fig. 11

Von nun an sollen die Axiome(ngruppen) (I), (A), (T), (B), (V) und (H) vorausgesetzt werden und wir wenden uns den beiden Modellen von Poincaré zu, um die Erfüllbarkeit aller Axiome zu zeigen. Um die rechnerischen Behandlung zu vereinfachen, machen wir dabei Gebrauch von *komplexen Zahlen*.

Auf GAUSS geht auch die Idee zurück, die komplexen Zahlen wie in Fig. 16 in einem Koordinatensystem darzustellen:

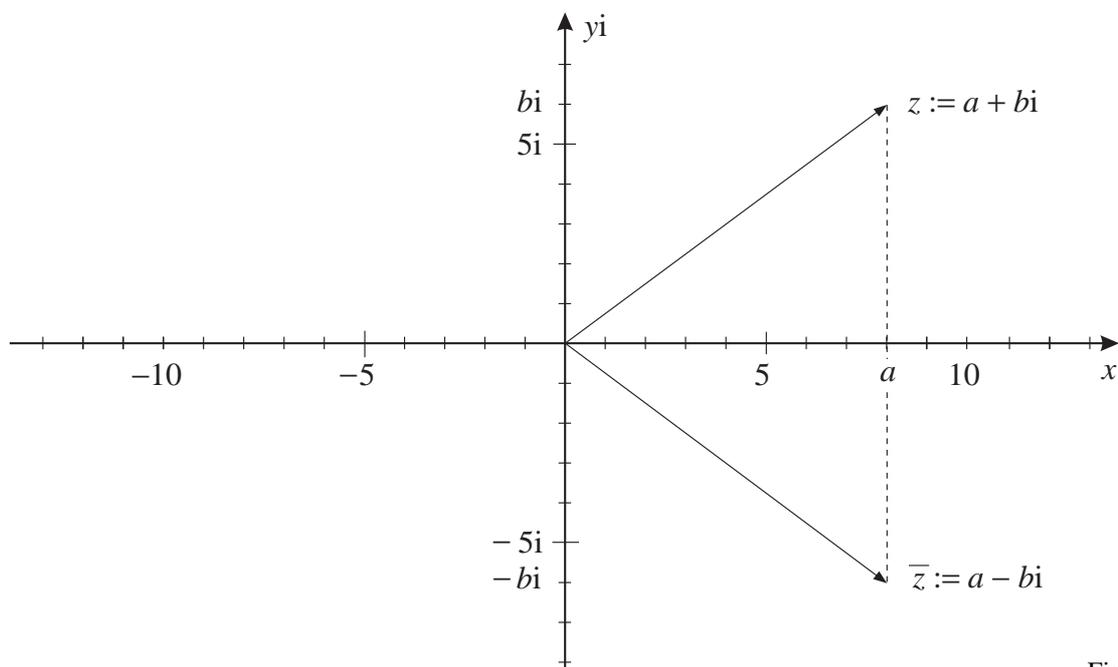


Fig. 1

Wie Fig. 16 zeigt, erhält man zu jeder komplexen Zahl $z := a + bi$ durch Spiegelung an der x -Achse ein „Spiegelbild“ $\bar{z} := a - bi$. Man nennt \bar{z} die zu z *konjugiert komplexe* Zahl. Dieser Name ist insofern gerechtfertigt, als eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Koeffizienten, die eine komplexe Lösung z hat, stets auch die Lösung \bar{z} besitzt (man mache sich dies mit Hilfe der Vereinbarung $\sqrt{-|q|} := \sqrt{|q|}i$ und dem üblichen Lösungsverfahren bei quadratischen Gleichungen klar!). Die konjugiert komplexe Zahl zu z hat folgende wichtige Eigenschaft:

$$\text{Für alle } z := a + bi \in \mathbb{C} \text{ gilt } z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Die Quadratwurzel aus diesem Produkt liefert die Länge des z entsprechenden Pfeils und wird der *Betrag* von z genannt.

Kurzschreibweise:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}; \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Ist $z := a + bi$ eine komplexe Zahl, so heißt a der *Realteil* von z (kurz: $\Re z = a$) und b der *Imaginärteil* von z (kurz: $\Im z = b$).

Während sich die Mengen \mathbb{N} bis \mathbb{R} durch eine Kleinerbeziehung $<$ so ordnen lassen, daß $<$ mit der Addition und der Multiplikation mit „positiven“ Zahlen verträglich ist, kann \mathbb{C} **nicht** in einer solchen Weise angeordnet werden.

Die Addition komplexer Zahlen ist im Prinzip die aus der Linearen Algebra bekannte Vektoraddition. Die Multiplikation ist nicht ganz so anschaulich interpretierbar:

Stellt man die komplexen Zahlen wie in Fig. 2 in der Form $z := a + bi$ und $z' := a' + b'i$ in der Form $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $z' = |z'| \cdot (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$ dar, so erhält man

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= |z| \cdot |z'| \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot (\cos(\varphi') + i \sin(\varphi')) \\ &= |z| \cdot |z'| \cdot (\cos(\varphi) \cos(\varphi') - \sin(\varphi) \sin(\varphi') + i \sin(\varphi) \cos(\varphi') + i \sin(\varphi') \cos(\varphi)) \\ &= |z| \cdot |z'| \cdot (\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')). \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit z ist also geometrisch eine *Drehstreckung* mit dem Ursprung als *Zentrum*, $|z|$ als *Streckfaktor* und φ als *Drehwinkel*.

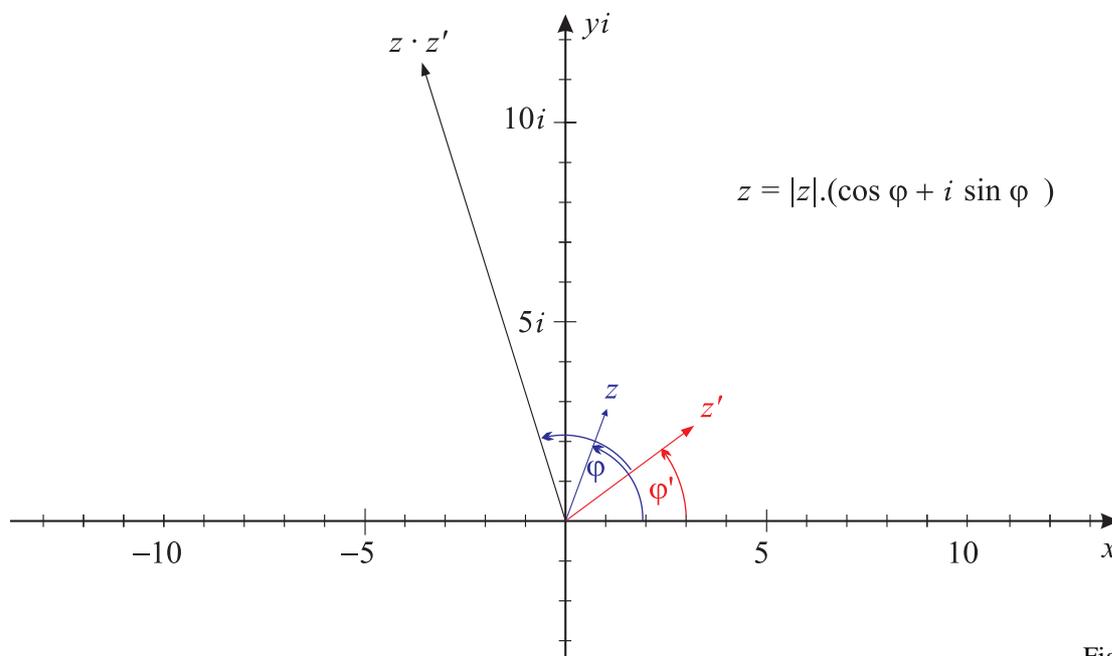


Fig. 2

Daraus folgt sofort, dass die Multiplikation von z mit i den Pfeil von z um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht und die Multiplikation mit $u_\alpha := \cos \alpha + i \sin \alpha$ eine Drehung um den Ursprung mit dem Drehwinkel α beschreibt.

Für später benötigen wir noch die Handhabung der Division durch eine komplexe Zahl $z \neq 0$. Wir sehen sie als Multiplikation mit dem Kehrwert $\frac{1}{z}$ von $z = x + xi$ an. Dieser ergibt sich zu

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{x + yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Abbildung κ mit der Vorschrift $\kappa(z) = \frac{1}{z}$ hat zwei sehr interessante Eigenschaften:

- (1) Das Innere des „gelochten“ Einheitskreises wird auf das Äußere abgebildet und umgekehrt.
- (2) Liegt z auf dem Einheitskreis, so wird z auf \bar{z} abgebildet.

Betrachtet man daher an Stelle von κ die Abbildung mit der Vorschrift $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, so ist diese auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, lässt alle Punkte des Einheitskreises fest und vertauscht das Innere des gelochten Einheitskreises mit dem Äußeren.

Definition 2.2

Die Abbildung $\iota : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der Vorschrift

$$\iota(x + yi) = \frac{1}{x - yi}$$

heißt *Inversion* am Einheitskreis.

Wir werden ab jetzt komplexe Zahlen in der Form $z = a + ib$ schreiben, da das Voranstellen von i vor den Imaginärteil die Lesbarkeit von Funktionstermen erleichtert. Für die Funktionsvorschrift der Inversion ι am Einheitskreis ergibt sich:

$$\iota(x + iy) = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{z}{|z|^2} \quad \text{mit } z := x + iy$$

Bevor wir mit dieser Abbildung Inversionen an beliebigen Kreisen definieren, sollen die wichtigsten Eigenschaften von ι gezeigt werden. Dazu geben wir zunächst an, wie man *Kreise* und *Geraden* in \mathbb{C} beschreibt:

Sind z_1, z_2 Punkte aus \mathbb{C} mit $z_1 \neq z_2$ so ist die (euklidische) Gerade $\mathcal{G}_{z_1; z_2}$ definiert durch:

$$\mathcal{G}_{z_1; z_2} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)\} \quad (2.1)$$

Der (euklidische) Kreis $\mathcal{K}_{u; r}$ mit Radius r ($r \in \mathbb{R}^+$) und Mittelpunkt u ist definiert durch:

$$\mathcal{K}_{u; r} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - u|^2 = r^2\} \quad (2.2)$$

Die Beschreibung in (2.1) ist die aus der Linearen Algebra geläufige Parameterform der Geradengleichung. Sie lässt sich im Komplexen ersetzen durch:

$$\mathcal{G}_{u; v} : \Im(z - u)(\bar{v} - \bar{u}) = 0 \quad (2.3)$$

Man leitet dies leicht so her:

Gegeben seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $u \neq v$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z = u + \lambda(v - u)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{z - u}{v - u} &= \lambda \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \frac{(z - u)\overline{(v - u)}}{(v - u)\overline{(v - u)}} \\ &= \frac{(z - u)(\bar{v} - \bar{u})}{(v - u)(\bar{v} - \bar{u})} \end{aligned}$$

Da der Zähler in der letzten Gleichung reell sein muss und der Nenner eine positive reelle Zahl ist, ergibt sich die behauptete Bedingung. Wir merken noch an, dass sich für als Vektoren interpretierte komplexe Zahlen u und v das euklidische Skalarprodukt $\langle u, v \rangle$ in der Form

$$\langle u, v \rangle = \Re(u \cdot \bar{v}) \quad (2.4)$$

definieren lässt. Dann lässt sich die Forderung in (2.3) so interpretieren, dass die Vektoren $z - u$ und $i \cdot (v - u)$ zueinander *orthogonal* sein müssen. Es handelt sich also bei Gleichung (2.3) um die längst bekannte *Normalenform der Geradengleichung* in neuer Schreibweise.

Damit können wir uns den Eigenschaften von ι zuwenden:

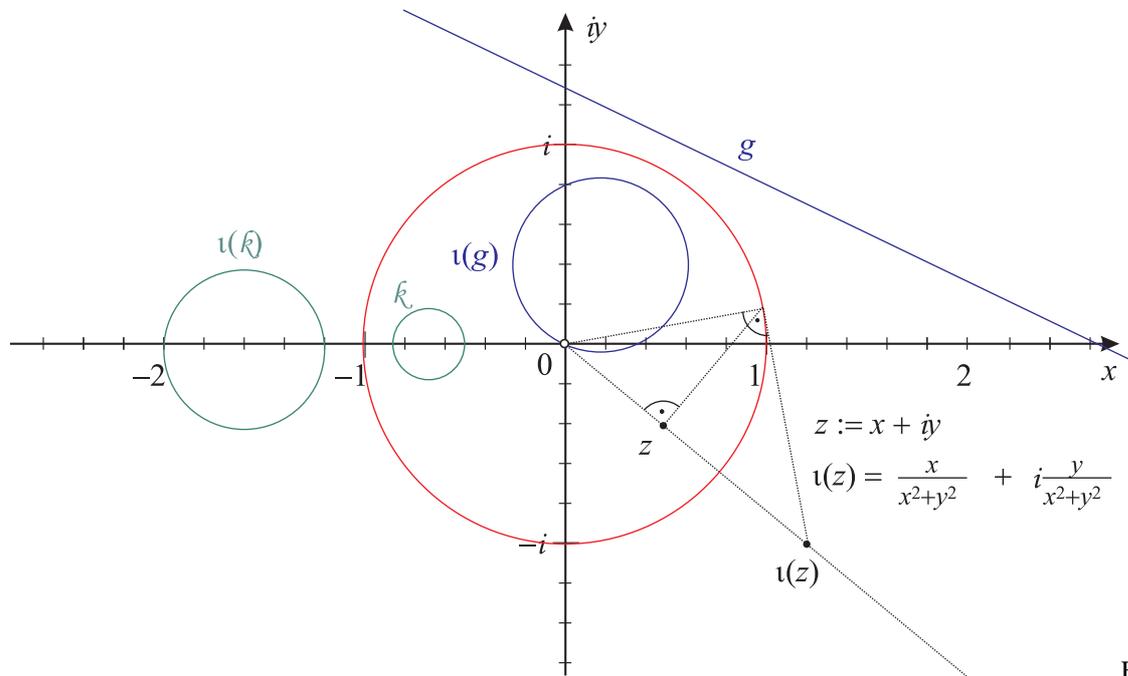


Fig. 3

Es gilt:

Satz 2.1

Für die Inversion ι am Einheitskreis gilt $\iota \circ \iota = id$ und ι bildet (jeweils mit Ausnahme des Punktes 0) ab

- (1) Geraden durch den Ursprung auf Geraden durch den Ursprung,
- (2) Geraden $\mathcal{G}_{u,v}$ mit $0 \neq \mathcal{G}_{u,v}$ auf Kreise, die durch 0 gehen,
- (3) Kreise $\mathcal{K}_{u,r}$ mit $u \neq 0$ auf Kreise des gleichen Typs,
- (4) Kreise $\mathcal{G}_{0,r}$ auf Geraden $\mathcal{G}_{u,v}$, die nicht durch den Ursprung gehen.

Wir merken vorab an, dass man Abbildungen $f : A \rightarrow A$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ oder $A \subseteq \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f \circ f = id$ *involutorisch* nennt.

Beweis:

Aus der Abbildungsgleichung von ι folgt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\iota \circ \iota(z) = \iota(\iota(z)) = \frac{1}{\iota(z)} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$$

und damit die Eingangsbehauptung. Wir setzen nun $z = x + iy$ und beweisen die übrigen vier Behauptungen.

zu (1): Sei \mathcal{G} eine Gerade durch den Ursprung. Dann gibt es $u \neq 0$ so, dass alle $z \in \mathcal{G}$ Vielfache von u mit reellem Faktor $\lambda \neq 0$ sind.

Für $z = \lambda u$ mit $\lambda \neq 0$ ist $z' = \frac{1}{\lambda \bar{u}} = \frac{u}{\lambda |u|^2} = \frac{1}{\lambda |u|^2} u$ der Bildpunkt, womit $\iota(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$ gezeigt ist.

Da ι involutorisch ist, folgt daraus $\mathcal{G} \subseteq \iota(\mathcal{G})$ und damit $\iota(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

zu (4): Es sei \mathcal{K} der Kreis um $m = a + ib$ mit Radius $|m|$ ($= \sqrt{a^2 + b^2}$). Dann ergibt sich folgende Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= a^2 + b^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 &= a^2 + b^2 \\ x^2 + y^2 &= 2ax + 2by \end{aligned}$$

Für jeden Bildpunkt z' von $z \in \mathcal{K}$ mit $z \neq 0$ gilt $z' = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{2ax + 2by} + i \frac{y}{2ax + 2by}$.

Also liegt z' auf der Gerade \mathcal{G} mit der Gleichung $ax' + by' = \frac{1}{2}$, womit $\iota(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{G}$ gezeigt ist.

Ist $z = x + iy$ ein Punkt von \mathcal{G} , so gilt für ihn $2ax + 2by = 1$. Für seinen Bildpunkt z' gilt daher:

$$\begin{aligned} (x' - a)^2 + (y' - b)^2 &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - a \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - b \right)^2 \\ &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(2ax + 2by)}{x^2 + y^2} + a^2 + b^2 \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Damit liegt z' auf der Gerade \mathcal{G} , womit $\iota(\mathcal{K}) = \mathcal{G}$ folgt.

zu (2): Geht eine Gerade \mathcal{G} in \mathbb{C} nicht durch den Ursprung, so kann man ihre Gleichung in der Form $ax + by = \frac{1}{2}$ wählen. Da diese Gerade wie gerade gezeigt das Bild des in 0 gelochten Kreises \mathcal{K} mit Mittelpunkt $a + ib$ und Radius $a^2 + b^2$ ist, gilt $\iota(\mathcal{G}) = \iota(\iota(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$.

zu (3): Gegeben sei ein Kreis mit der Gleichung $(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = r^2$ mit $a^2 + b^2 \neq r^2$. Wir zeigen, dass er das Bild eines Kreises vom selben Typ ist, und setzen dazu $x' + iy' = \frac{1}{x - iy}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - a \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - b \right)^2 &= r^2 \\ \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2a \frac{x}{x^2 + y^2} + a^2 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2b \frac{y}{x^2 + y^2} + b^2 &= r^2 \\ \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - (2ax + 2by) \frac{1}{x^2 + y^2} + (a^2 + b^2) &= r^2 \\ \frac{1}{x^2 + y^2} (1 - (2ax + 2by)) &= r^2 - (a^2 + b^2) \quad | \cdot (x^2 + y^2) \\ 1 - (2ax + 2by) &= (x^2 + y^2)(r^2 - (a^2 + b^2)) \end{aligned}$$

Nach Division durch $(a^2 + b^2 - r^2)$ und Umstellen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \frac{a}{a^2 + b^2 - r^2} + y^2 - 2y \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2} &= -\frac{1}{a^2 + b^2 - r^2} \quad \Big| + \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2} \\ \left(x - \frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{(a^2 + b^2 - r^2)^2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2} - \frac{1}{a^2 + b^2 - r^2} \\ \left(x - \frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{(a^2 + b^2 - r^2)^2}\right)^2 &= \frac{r^2}{(a^2 + b^2 - r^2)^2} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $m = \frac{a}{a^2 + b^2 - r^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2}$ und Radius $\frac{r}{|a^2 + b^2 - r^2|}$.

□

Für das die beiden Poincaré-Modelle werden wir auch Inversionen an Kreisen benötigen, deren Mittelpunkt m von 0 verschieden ist und deren Radius r nicht gleich 1 sein muss.

Definition 2.3

Für $r \in \mathbb{R}^+$ versteht man unter der *Inversion* $\iota_{m,r}$ am Kreis $\mathcal{K}_{0,r}$ die Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \{m\}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{m\}$ mit der Vorschrift

$$\iota_{m,r}(z) = \frac{r^2}{z - m} + m.$$

Mit $m = a + ib$ ergeben sich für $z = x + iy$ die Abbildungsgleichungen:

$$x' = r^2 \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2} + a \quad (2.5)$$

$$y' = r^2 \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} + b \quad (2.6)$$

Da man durch die Koordinatentransformation $(0;0) \mapsto m$ und die anschließende Streckung mit dem Streckfaktor r die komplexe Ebene auf sich abbilden kann, gilt Satz 2.1 auch für die nun definierten Inversionen.

2.2 Das Poincarésche Halbebenenmodell der H-Geometrie

Wir sehen die obere komplexe Halbebene $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ als Menge \mathcal{P} der Punkte einer Geometrie an und nennen solche Punkte der Deutlichkeit halber *H-Punkte*.

Als Menge \mathcal{G} der *H-Geraden* wird die Menge aller Teilmengen g von \mathcal{H} gewählt, die wie folgt beschreiben lassen:

Entweder gibt es $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$g = \{z \in \mathcal{H} \mid \Re z = a\} \quad (2.7)$$

oder es gibt $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ so, dass gilt

$$g = \{z \in \mathcal{H} \mid |z - a|^2 = r^2\} \quad (2.8)$$

In Fig. 8 des vorigen Kapitels wurde dies bereits ohne die definierenden Parameter vorgestellt. Deshalb soll die Grafik in modifizierter Form noch einmal gebracht werden:

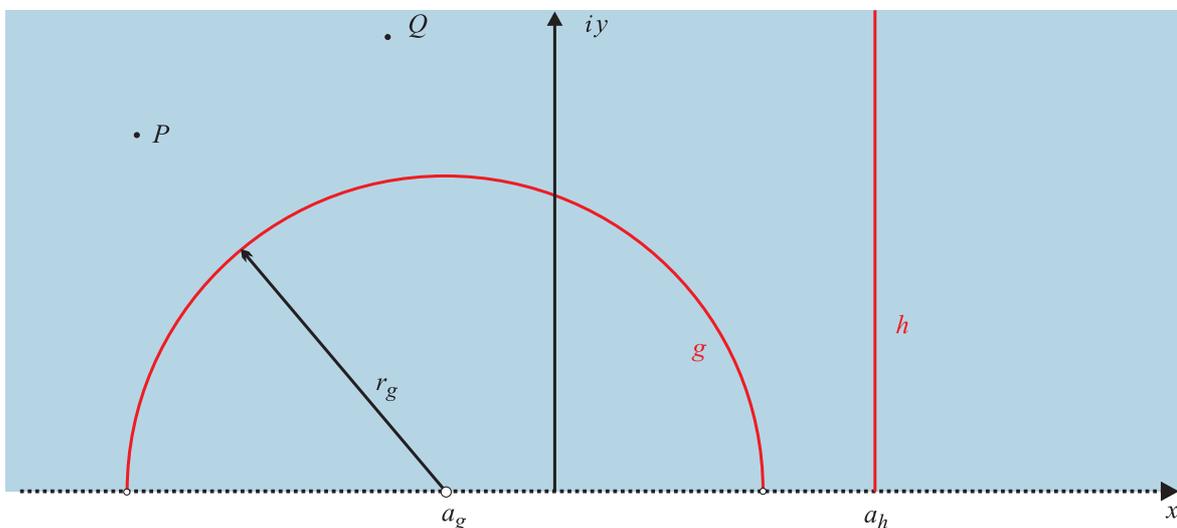


Fig. 4

Euklidische Halbkreise und euklidische Halbgeraden, die *orthogonal* zur x -Achse sind, übernehmen demnach die Rolle der H-Geraden.

Es wird Sache eines Vortrags sein, die Inzidenz- und Anordnungsaxiome mittels geometrischen Konstruktionen nachzuweisen. Wir sehen uns diesen Bereich rechnerisch an:

Satz 2.2

Das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{H})$ genügt den Inzidenaxiomen.

Beweis:

Dass Jede Gerade g mindestens einen Punkt enthält und mindestens drei nichtkollineare Punkte P, Q, R existieren, ist offensichtlich. Zu zeigen bleibt lediglich, dass (I2) gilt.

Wenn $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ mit $z_1 \neq z_2$ gegeben sind, gibt es zwei Fälle:

1. $z_1 = a + ib_1, z_2 = a + ic$ mit $b \neq c$. Dann liegen z_1, z_2 auf der H-Geraden mit der Gleichung $\Re z = a$. Auf einer Geraden vom „Halbkreistyp“ können z_1 und z_2 nicht liegen, da auf dieser für verschiedene Punkte u, v stets $\Re u \neq \Re v$ gilt.
2. $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ mit $a_1 \neq a_2$. Dann können z_1 und z_2 nur auf einer Geraden g vom „Halbkreistyp“ mit einer Gleichung $g: |z - a|^2 = r^2$ liegen. Demnach muss $|z_1 - a| = |z_2 - a|$ mit $a \in \mathbb{R}$ gelten.

Dies ist wegen

$$\begin{aligned} (z_1 - a) * (\bar{z}_1 - a) &= (z_2 - a) * (\bar{z}_2 - a) \\ z_1 \bar{z}_1 - a(z_1 + \bar{z}_1) + a^2 &= z_2 \bar{z}_2 - a(z_2 + \bar{z}_2) + a^2 \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 &= 2a(\Re z_1 - \Re z_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

äquivalent mit

$$a = \frac{a_1^2 + b_1^2 - (a_2^2 + b_2^2)}{2(a_1 - a_2)} = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{b_1^2 - b_2^2}{2(a_1 - a_2)}. \quad (2.10)$$

Daraus errechnet sich der Parameter r^2 für die Gleichung von g zu

$$r^2 = \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} + \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2) + \frac{(b_1^2 - b_2^2)^2}{4(a_1 - a_2)^2}. \quad (2.11)$$

□

Die Formeln (2.10) und (2.11) aus dem Beweis gehen im Fall $\Im z_1 = \Im z_2 = b$ in die Formeln $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$ und $r^2 = \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} + b^2$ über:

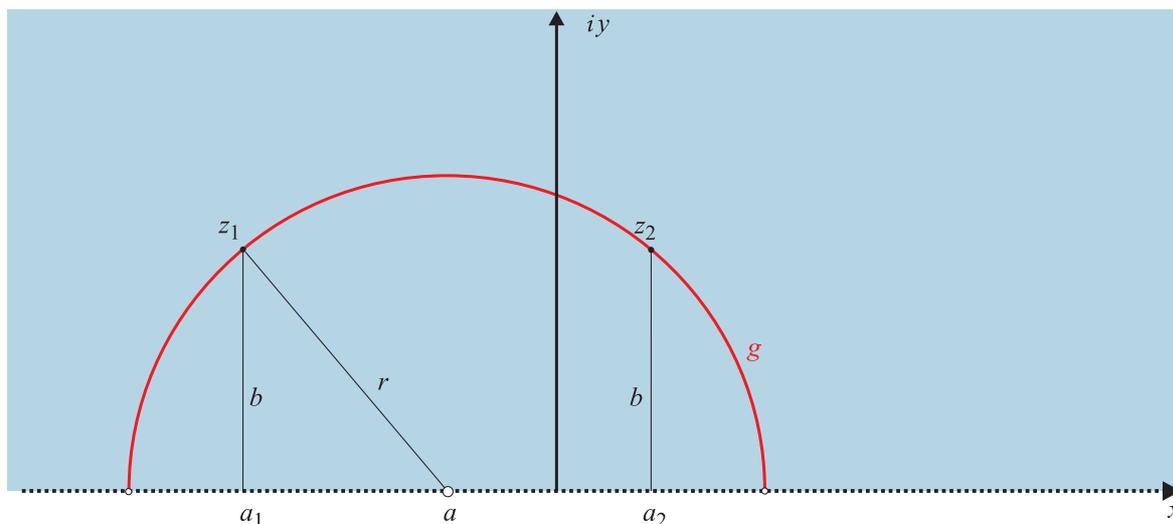


Fig. 5

Im allgemeinen Fall löst Formel (2.10) rechnerisch das Konstruktionsproblem, die euklidische Mittelsenkrechte der euklidischen Strecke mit den Endpunkten z_1 und z_2 mit der x -Achse zu schneiden:

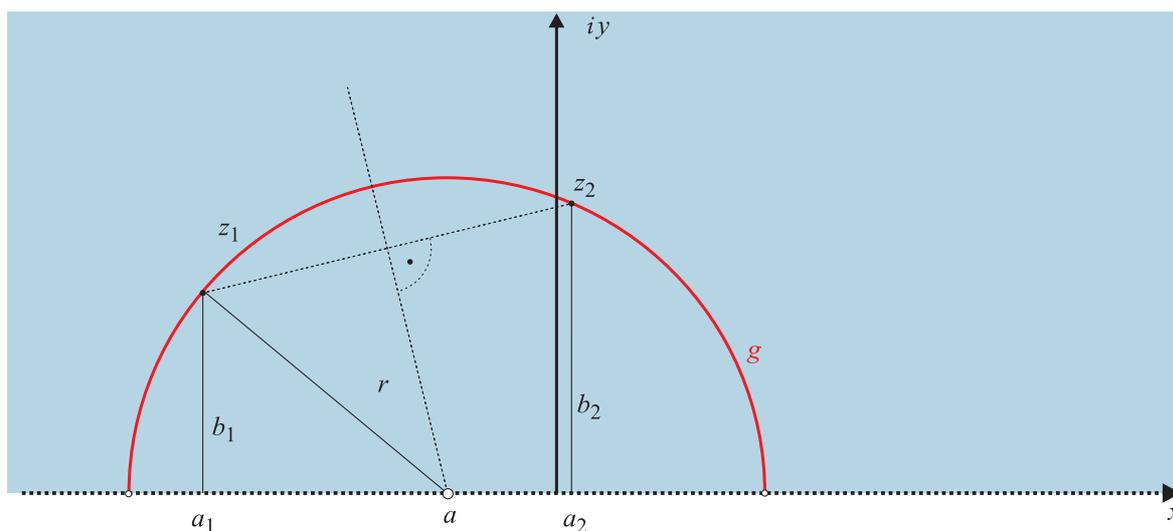


Fig. 6

Wir wenden uns der nächsten Axiomengruppe zu:

Satz 2.3

Das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{H})$ genügt den Anordnungsaxiomen.

Beweis:

Wir erklären den Durchlaufsinne einer Gerade $g \in \mathcal{G}$ wie folgt:

- (Typ 1) Wenn die Gleichung für g die Form $g : \Re z = a$ hat, definieren wir \prec für $u, v \in g$ durch $u \prec v \iff \Im u < \Im v$.
- (Typ 2) Wenn die Gleichung für g die Form $g : |z - a|^2 = r^2$ hat, definieren wir \prec für $u, v \in g$ durch $u \prec v \iff \Re u < \Re v$.

Damit überträgt sich die Anordnung der Punkte auf der positiven y -Achse auf H-Geraden des Typs 1. Bei einer Gerade des Typs 2 wird die Anordnung der Punkte des *offenen* (!) Intervalls $]a - r; a + r[$ von der x -Achse auf den euklidischen Halbkreis mit der Gleichung $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ und damit auf die H-Gerade g übertragen. Da die verwendeten Teilmengen auf den Achsen die Forderungen in (A1) bis (A4) erfüllen, gilt dies auch für die jeweiligen H-Geraden.

□

Bei der Definition von Halbebenen wird wieder zwischen den beiden Typen von H-Geraden unterschieden:

- (Typ 1) Wenn die Gleichung für g die Form $g : \Re z = a$ hat, definieren wir Σ_g und Σ'_g durch $\Sigma_g := \{z \in \mathcal{H} \mid \Re z > a\}$ und $\Sigma'_g := \{z \in \mathcal{H} \mid \Re z < a\}$. (vgl. Fig. 7)
- (Typ 2) Wenn die Gleichung für g die Form $g : |z - a|^2 = r^2$ hat, definieren wir Σ_g und Σ'_g durch $\Sigma_g := \{z \in \mathcal{H} \mid |z - a| < r\}$ und $\Sigma'_g := \{z \in \mathcal{H} \mid |z - a| > r\}$. (vgl. Fig. 8)

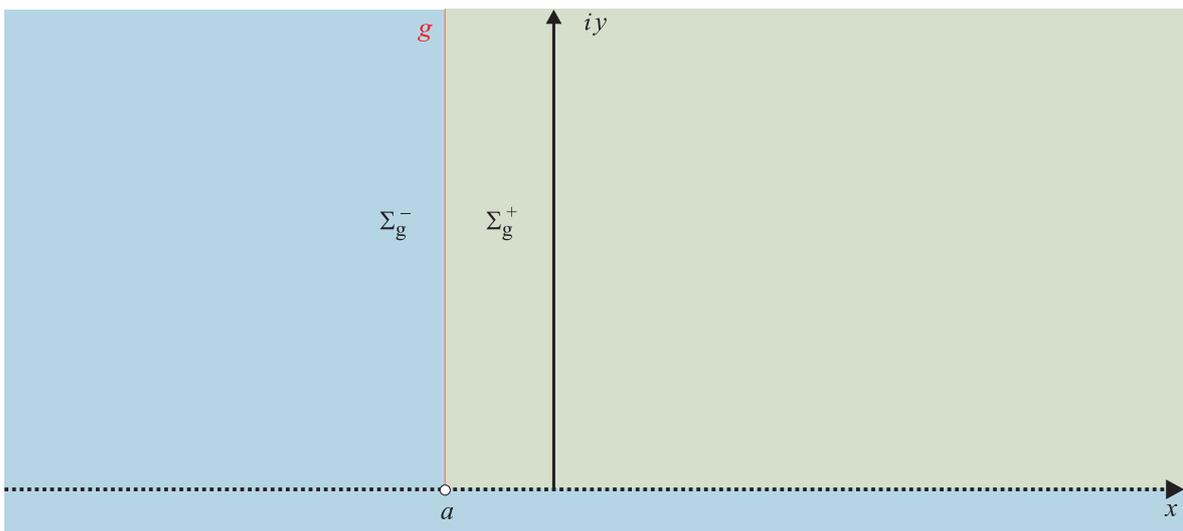


Fig. 7

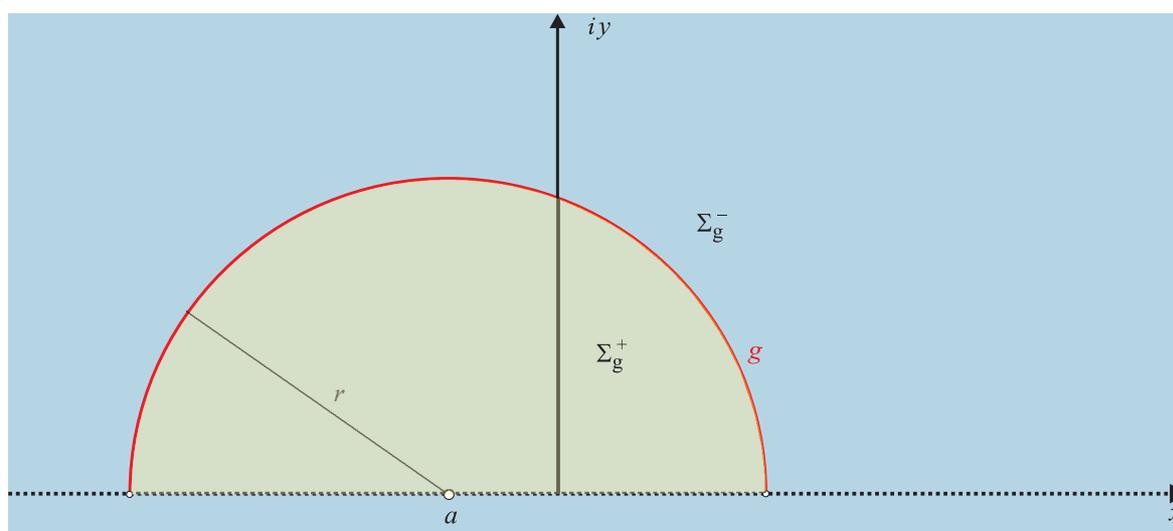


Fig. 8

Dann gilt der

Satz 2.4

Das Paar $(\mathcal{P}, \mathcal{H})$ genügt den Teilungsaxiomen.

Beweis:

Wir führen nicht alle Rechnungen im Detail durch, da dies zu langatmig wäre:

1. (T1) ist nach Definition offensichtlich erfüllt, da wir die Trägergerade g bei der Definition ausgeschlossen haben und jeder sonstige Punkt von \mathcal{H} entweder in Σ_g oder in Σ'_g liegt.
2. Bei Geraden vom Typ 1 mit der Gleichung $\Re z = a$ ist (T2) erfüllt, da für alle $u \in \Sigma$ und $v \in \Sigma'$ gilt: $\Re u > a > \Re v$. Damit gibt es einen Punkt z mit $\Re z = a$ auf der H-Strecke mit den Endpunkten u und v (sie ist der euklidische Kreisbogen auf der H-Gerade $g_{u,v}$ von u bis v).

Für solche Geraden ist auch (T3) erfüllt, da für verschiedene H-Punkte $u, v \in \Sigma$ beide Realteile größer als a sind. Die H-Strecke zwischen u und v liegt dann komplett in Σ und enthält daher keinen Punkt von g .

Für zwei Punkte u und v in der anderen Halbebene gilt eine analoge Argumentation.

3. Bei Geraden vom Typ 2 mit der Gleichung $g: |z - a|^2 = r^2$ ist (T2) erfüllt, da für alle $u \in \Sigma$ und $v \in \Sigma'$ gilt: $|u - a|^2 > r^2 > |v - a|^2$. Falls $\Re u = \Re v = c$ gilt, ist die Strecke von u bis v die euklidische Strecke. Diese schneidet den g vertretenden Halbkreis in einem Punkt z mit $\Re z = c$.

Die Gültigkeit von (T3) lässt sich durch eine etwas mühsame Rechnung mit Ungleichungen und Fallunterscheidungen nachweisen, bei der aus den Annahmen $u \neq v$ und $|u - a|, |u - v| < r$ bzw. $|u - a|, |u - v| > r$ hergeleitet wird, dass kein Punkt der H-Strecke zwischen u und v auf g liegt.

□

Damit sind wir bei dem Problem angelangt, *Bewegungen* in der H-Geometrie definieren zu müssen.

2.3 H-Bewegungen im Poincaréschen Halbebenenmodell

Als Grundbausteine verwenden wir bereits bekannte Abbildungen der oberen komplexen Halbebene auf sich:

Definition 2.4

Die H -Spiegelung σ_g an einer H -Gerade g ist erklärt durch

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{die euklidische Spiegelung an } g, & \text{falls } g \text{ vom Typ 1 ist, d.h.} \\ & \text{einer Gleichung des Typs } \Re z = a \text{ genügt.} \\ \\ \text{die Inversion } \iota_{a,r}, & \text{falls } g \text{ vom Typ 2 ist, d.h.} \\ & \text{einer Gleichung des Typs } (\Re z - a)^2 + (\Im z)^2 = r^2 \text{ mit } r > 0 \text{ genügt.} \end{array} \right.$$

Es wird sich zeigen, dass man durch Verkettung von maximal drei solchen Spiegelungen alle Transformationen darstellen kann, die folgende „Bauart“ haben und H -Bewegungen genannt werden sollen:

Definition 2.5

Unter der Menge \mathcal{B} aller H -Bewegungen wird die Menge aller Transformationen $\beta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ mit folgenden Vorschriften verstanden:

$$\text{(Typ 1)} \quad \beta(z) := \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0 \quad (2.12)$$

$$\text{(Typ 2)} \quad \beta(z) := \frac{a \cdot \bar{z} + b}{c \cdot \bar{z} + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

Zunächst sei angemerkt, dass alle H -Spiegelungen zu \mathcal{B} gehören, da ihre Transformationen sich in der Form $z \mapsto \frac{-1 \cdot \bar{z} + b}{0 \cdot \bar{z} + 1}$ oder $z \mapsto \frac{a \cdot \bar{z} - a^2 + r^2}{1 \cdot \bar{z} - a}$ schreiben lassen.

H -Bewegungen können durch die Matrix ihrer Koeffizienten vertreten werden, da für die Verkettung gilt:

Satz 2.5

Vertritt man jede H -Bewegung β mit der Vorschrift

$$\beta(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0 \right) \text{ bzw. } \beta(z) = \frac{a \cdot \bar{z} + b}{c \cdot \bar{z} + d} \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0 \right)$$

durch die Matrix $M_\beta := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ihrer Koeffizienten, so gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$:

- (1) $\beta \circ \alpha \in \mathcal{B}$
- (2) $M_{\beta \circ \alpha} = M_\beta \cdot M_\alpha$

Beweis:

Es seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$ gegeben mit

$$\alpha(z) := \frac{a' \cdot z + b'}{c' \cdot z + d'} \quad \left(\text{oder } \alpha(z) := \frac{a' \cdot \bar{z} + b'}{c' \cdot \bar{z} + d'} \right) \quad \text{und} \quad \beta(z) := \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad \left(\text{oder } \beta(z) := \frac{a \cdot \bar{z} + b}{c \cdot \bar{z} + d} \right).$$

Es reicht, die Behauptungen nur für die Kombination von Bewegungen des Typs 1 zu zeigen, da die Konjugiertenbildung nicht auf die reellen Koeffizienten wirkt:

$$\beta \circ \alpha(z) = \beta(\alpha(z)) = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{a \cdot (a'z + b') + b \cdot (c'z + d')}{c \cdot (a'z + b') + d \cdot (c'z + d')} = \frac{(aa' + bc') \cdot z + (ab' + bd')}{(ca' + dc') \cdot z + (cb' + dd')}.$$

Aus

$$M_\beta \cdot M_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

lässt sich sofort die zweite Behauptung ablesen.

Da sich beim Multiplizieren von quadratischen Matrizen ihre Determinanten multiplizieren, hat die Koeffizientendeterminante der Verkettung $\beta \circ \alpha$ auch stets das richtige Vorzeichen. Damit ist $\beta \circ \alpha$ eine H-Bewegung, womit auch Behauptung (1) gezeigt ist.

□

Da alle zugeordneten Matrizen M_τ von H-Bewegungen invertierbar sind, hat jede H-Bewegung eine Inverse in der Menge \mathcal{B} . Mit Satz 2.5 ist daher die Gültigkeit des Bewegungsaxioms (B1) für die gemäß Definition 2.5 gewählten Transformationen gezeigt.

Um die Gültigkeit der übrigen Axiome nachzuweisen, zeigen wir vorab:

Satz 2.6

Jede H-Bewegung lässt sich als Verkettung von *maximal* drei H-Spiegelungen darstellen.

Beweis:

Wir führen den Beweis konstruktiv und arbeiten dabei wegen der einfacheren Schreibweise mit den zugeordneten Matrizen.

Dazu stellen wir zunächst fest, dass es für H-Spiegelungen nur zwei Grundtypen von Matrizen gibt (alle anderen ergeben sich daraus durch Multiplikation aller vier Koeffizienten mit einem gemeinsamen reellen Faktor $t \neq 0$).

$$S_u = \begin{pmatrix} -1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Spiegelung an } g : x = \frac{u}{2}) \quad (2.14)$$

$$S_{u;r} = \begin{pmatrix} u & r^2 - u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix} \quad (\text{Spiegelung an } g : (x - u)^2 + y^2 = r^2) \quad (2.15)$$

Im Folgenden normieren wir bei einer H-Bewegung τ die zugeordnete Matrix folgendermaßen:

$$M'_\tau = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ wird im Falle } c' \neq 0 \text{ ersetzt durch } M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \text{ mit } a = \frac{a'}{c'}, b = \frac{b'}{c'}, d = \frac{d'}{c'}.$$

$$M'_\tau = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ wird im Falle } c' = 0 \text{ ersetzt durch } M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a = \frac{a'}{d'}, b = \frac{b'}{d'}.$$

Dann entsprechen sich H-Bewegungen und zugeordnete Matrizen *umkehrbar eindeutig*, wenn die Vereinbarung getroffen wird, dass es sich bei einer Matrix M_τ mit positiver Determinante um eine H-Bewegung des Typs 1 und im Falle einer negativen Determinante um eine H-Bewegung des Typs 2 handelt.

$$\text{Fall 1: } M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } a > 0, \text{ d.h. } \tau(z) = a \cdot z + b.$$

Falls $a = 1$ gilt, handelt es sich aus euklidischer Sicht um eine Verschiebung parallel zur x -Achse, die man durch eine Doppelspiegelung erzeugen kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls $a \neq 1$ gilt, handelt es sich aus euklidischer Sicht um eine zentrische Streckung mit Zentrum $\frac{b}{1-a}$ und Streckfaktor a . Man kann sie durch eine Verkettung von zwei H-Spiegelungen erzeugen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} & a - \frac{b^2}{(1-a)^2} \\ 1 & -\frac{b}{1-a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{b}{1-a} & 1 - \frac{b^2}{(1-a)^2} \\ 1 & -\frac{b}{1-a} \end{pmatrix}$$

Fall 2: $M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mit $b < 0$, d.h. $\tau(z) = \frac{a-z+b}{z}$.

Diese H-Bewegung lässt sich als Verkettung einer H-Spiegelung an der H-Geraden mit der Gleichung $g_1 : x^2 + y^2 = -b$ und der danach ausgeführten H-Spiegelung an der H-Geraden mit der Gleichung

$$g_2 : x = \frac{a}{2} \text{ darstellen: } \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fall 3: $M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$, mit $ad > b$ und $d \neq 0$, d.h. $\tau(z) = \frac{a-z+b}{z+d}$.

Diese H-Bewegung lässt sich als Verkettung einer H-Spiegelung an der H-Geraden mit der Gleichung $g_1 : (x+d)^2 + y^2 = ad-b$ und der danach ausgeführten H-Spiegelung an der H-Geraden mit der Gleichung $g_2 : x = \frac{a-d}{2}$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a-d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d & ad-b-d^2 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

Damit sind alle H-Bewegungen mit positiver Determinante als Verkettung von zwei H-Spiegelungen darstellbar. Die möglichen vier Varianten zeigen die folgenden Grafiken.

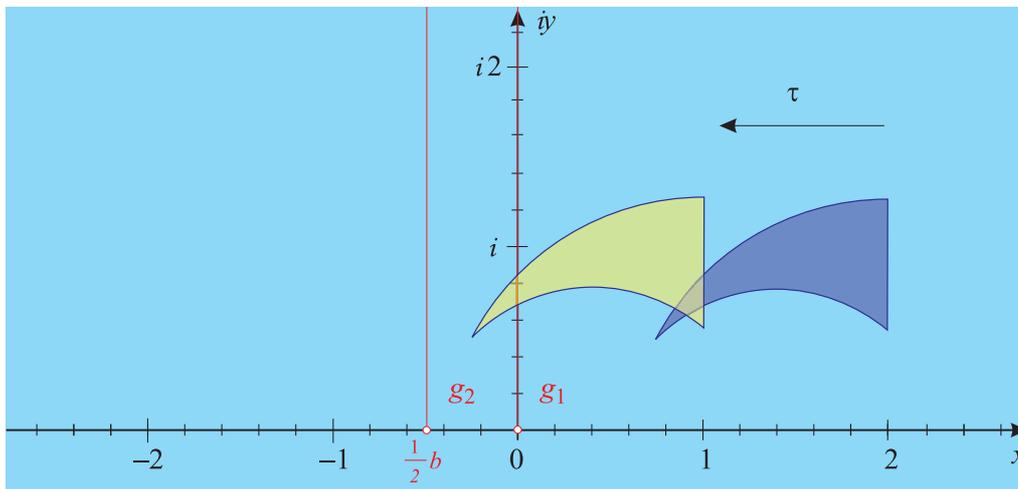


Fig. 9

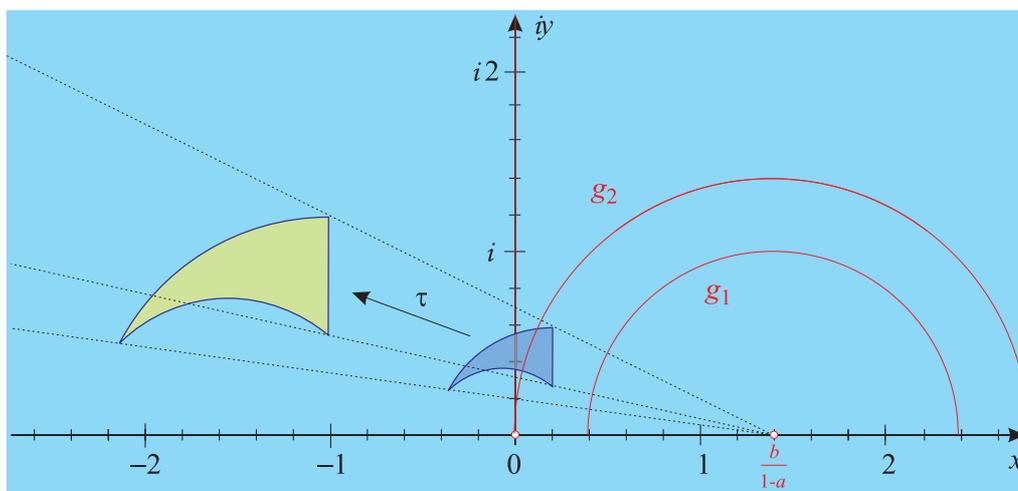


Fig. 10

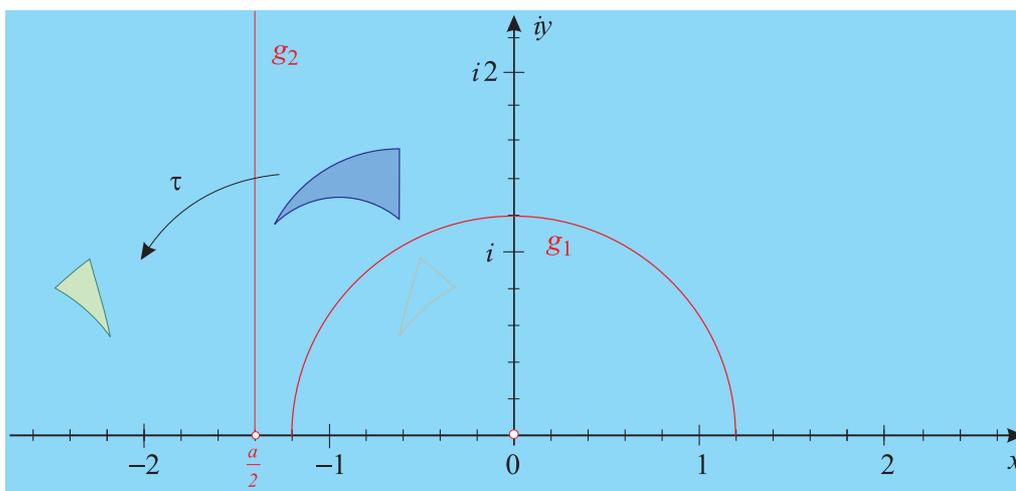


Fig. 11

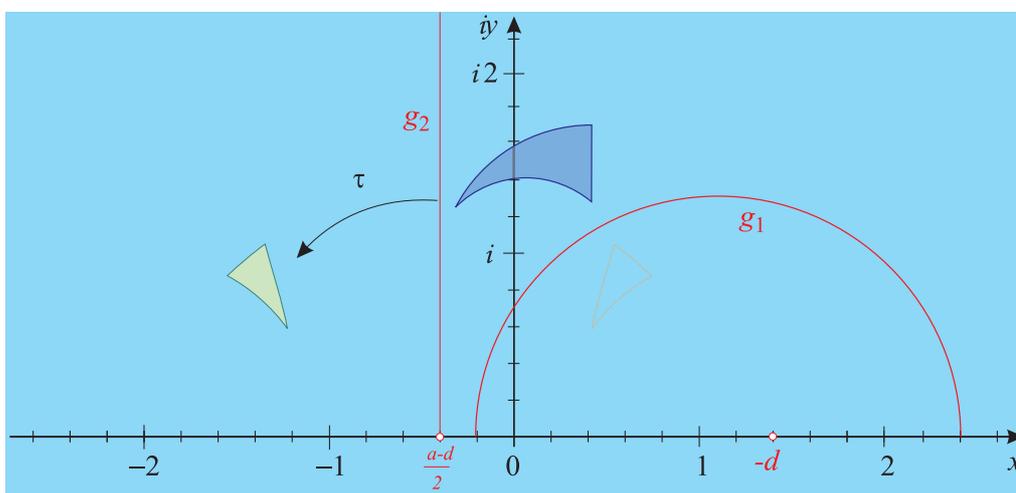


Fig. 12

Bei den H-Bewegungen mit positiver Determinante bleibt offensichtlich der Umlaufsinn von Dreiecken erhalten. Bei den H-Bewegungen mit negativer Determinante kehrt sich der Umlaufsinn von Dreiecken beim Abbilden um.

Wir diskutieren nun aber keine Einzelfälle mehr, da sich die Matrix einer H-Bewegung τ mit negativer Determinante stets in der Form

$$M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt. Damit ist τ als Verkettung der H-Spiegelung an der imaginären Achse mit einer H-Bewegung β mit positiver Determinante darstellbar. Die Diskussion der möglichen Einzelfälle soll in einem Vortrag erfolgen.

□

Nachdem Satz 2.6 bewiesen ist, kann zum Nachweis der Bewegungsaxiome (B2), (B3) und (B4) soweit wie möglich mit H-Spiegelungen argumentiert werden. Wegen der Eigenschaften der euklidischen Spiegelungen und der Eigenschaften der Kreisinvolutionen ist schon einmal sicher, dass H-Geraden auf H-Geraden und H-Strecken auf H-Strecken unter Erhalten der Zwischenbeziehung von Punkten abgebildet werden. Daher ist (B2) auch für alle H-Bewegungen erfüllt.

Wir zeigen nun, dass es stets genau eine *H-Mittelsenkrechte* einer H-Strecke und genau eine *H-Winkelhalbierende* eines H-Winkels gibt:

Satz 2.7

Zu jeder H-Strecke PQ mit $P \neq Q$ gibt es genau eine H-Gerade m_{PQ} mit $\sigma_{m_{PQ}}(P) = Q$.

Beweis:

Für $P = z_1 = x_1 + iy_1$ und $Q = z_2 = x_2 + iy_2$ wählen wir im Falle $y_2 = y_1$ die Gerade g mit der Gleichung $g : \Re z = \frac{x_1+x_2}{2}$ als Spiegelachse. Dann bildet σ_g den Punkt P auf Q und Q auf P ab. Für jede Spiegelung σ_h mit dieser Eigenschaft ergibt sich sowohl $\sigma_g(\sigma_h(P)) = P$ als auch $\sigma_g(\sigma_h(Q)) = Q$. Da $\tau = \sigma_g \circ \sigma_h$ eine H-Bewegung mit positiver Determinante ist, lässt sich daraus $\tau = id$ und damit $h = g$ folgern (wird in einem der Vorträge mit ausgeführt).

Falls $y_2 \neq y_1$ gilt, setzen wir eine H-Bewegung des Typs $\beta : z \mapsto \frac{(z_2-a)(\bar{z}_1-a)}{\bar{z}-a} + a$ so an, dass der Zähler des Bruchs reell ist. Dann wird z_1 durch β auf z_2 abgebildet. Da der Imaginärteil von $(z_2-a)(\bar{z}_1-a)$ verschwinden muss, ergibt sich $a = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}$ und der Zähler ist gleich

$$\begin{aligned} r^2 := \Re(z_2-a)(\bar{z}_1-a) &= (x_2-a)(x_1-a) + y_1y_2 = (x_2 - \frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2})(x_1 - \frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}) + y_1y_2 \\ &= y_2 \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} y_1 \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} + y_1y_2 = y_1y_2 \left(\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} \right)^2 + 1 \right) > 0 \end{aligned}$$

Also handelt es sich bei der angesetzten Bewegung um eine H-Spiegelung an der Gerade g mit der Gleichung $g : |x-a|^2 = r^2$. Auch hier ist g eindeutig bestimmt. □

Die nachfolgende Grafik zeigt an zwei Beispielen, dass der damit definierte *Mittelpunkt* einer H-Strecke nur im Fall $\Im z_1 = \Im z_2$ auch der euklidische Mittelpunkt der H-Strecke ist.

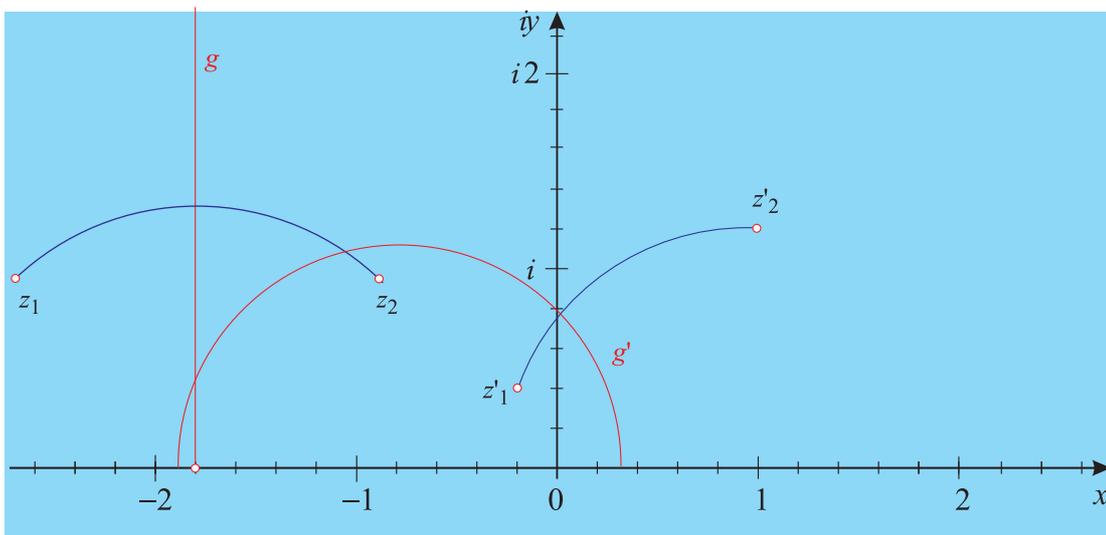


Fig. 13

Als interessanter Sonderfall erweist sich die Halbierung einer Strecke, die auf einer H-Geraden des Typs 1 mit der Gleichung $\Re z = c$ liegt. Dann ist m_{z_1, z_2} die H-Gerade mit der Gleichung $(x-c)^2 + y^2 = y_1y_2$. Sie schneidet

die Strecke im Punkt $c + i\sqrt{y_1; y_2}$. Der Imaginärteil der H-Mitte ist hier nicht das arithmetische sondern das *geometrische* Mittel der beiden Imaginärteile von z_1 und z_2 .

Nun wenden wir uns der Winkelhalbierung zu:

Satz 2.8

Zu jedem Paar (OA^+, OB^+) hyperbolischer Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt O gibt es genau eine H-Gerade $w \not\perp_{AOB}$ mit $\sigma_w \not\perp_{AOB} (OA^+) = OB^+$.

Beweis:

Es gibt nur drei mögliche Fälle von H-Winkeln:

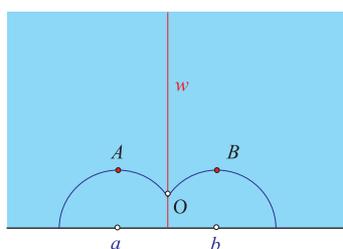


Fig. 14

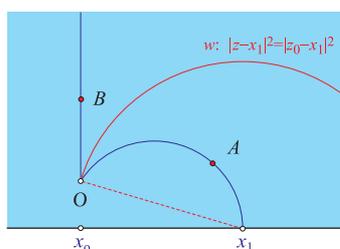


Fig. 15

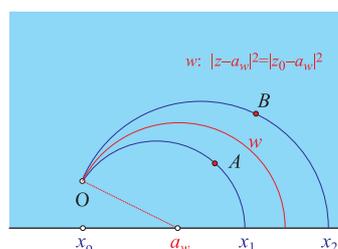


Fig. 16

Bei dem Fall in Fig. 14 bildet die Spiegelung σ_w an der Gerade w mit der Gleichung $\Re z = \frac{x_1+x_2}{2}$ die Halbgerade OA^+ auf OB^+ ab (und umgekehrt) und keine andere H-Spiegelung hat diese Eigenschaft.

Bei dem Fall in Fig. 15 bildet die Spiegelung σ_w an der Gerade w mit der Gleichung $|z-x_1|^2 = |z_0-x_1|^2$ die Halbgerade OA^+ auf OB^+ ab (und umgekehrt) und keine andere H-Spiegelung hat diese Eigenschaft.

Bei dem Fall in Fig. 16 muss a_w so bestimmt werden, dass $\frac{|z_0-a|^2}{x_1-a} = x_2$ gilt. Daraus ergibt sich:

$$a = \frac{|z_0|^2 - x_1 x_2}{2\Re z_0 - (x_1 + x_2)}$$

Dann bildet die H-Spiegelung an der Gerade w mit der Gleichung $|z-a_w|^2 = |z_0-a_w|^2$ die Halbgerade OA^+ auf OB^+ ab und keine andere H-Spiegelung hat diese Eigenschaft.

□

Damit ist gezeigt, dass die H-Bewegungen auch das Bewegungsaxiom (B4) erfüllen und es bleibt nur noch der Nachweis von (B3):

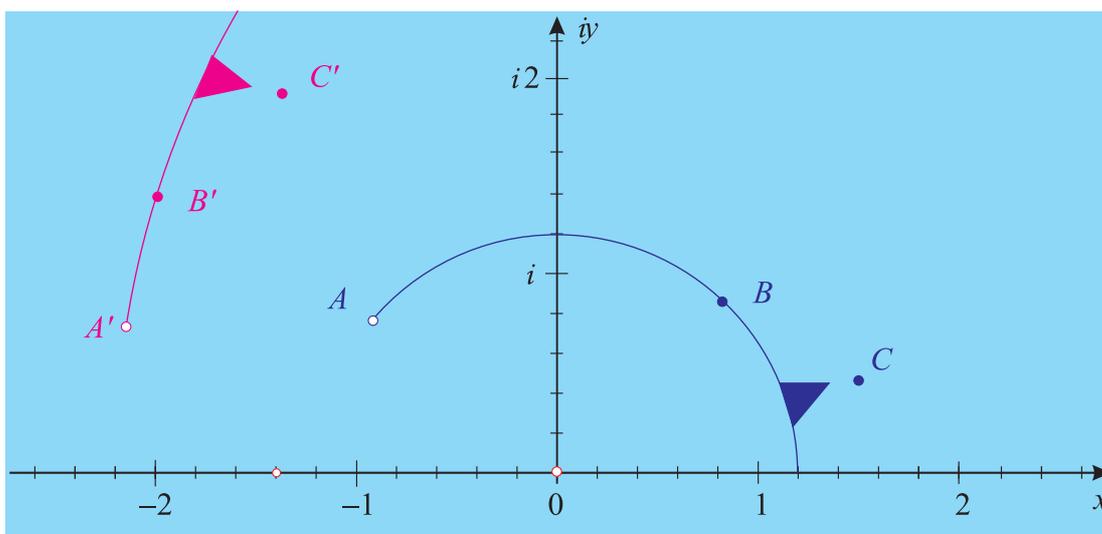


Fig. 17

Offensichtlich kann man zunächst durch eine Spiegelung σ_1 A auf A' abbilden, danach durch eine Spiegelung σ_2 die Halbgerade $A'\sigma_1(B)^+$ auf die Halbgerade $A'B'^+$. Falls dabei das Bild von C unter $\sigma_2 \circ \sigma_1$ in der falschen Halbebene liegt, wird noch eine Spiegelung an der Gerade $g_{A'B'}$ nachgeschaltet. Damit lässt sich die Fahne (AB^+, ABC^+) durch eine H-Bewegung τ auf die Fahne $(A'B'^+, A'B'C'^+)$ abbilden.

Jede H-Bewegung β , die eine Halbgerade OP^+ auf sich abbildet, muss $O = z_0$ fest lassen. Ist $x_1 \in \mathbb{R}$ der „unendlich ferne Punkt“ von OP^+ , so muss auch x_1 wegen der Gültigkeit von (B2) auf sich abgebildet werden. Daraus folgen für eine Bewegung β des Typs 1 bzw. des Typs 2 die Bedingungen:

$$\frac{a \cdot z_0 + b}{c \cdot z_0 + d} = z_0; \quad \text{und} \quad \frac{a \cdot \bar{z}_0 + b}{c \cdot \bar{z}_0 + d} = \bar{z}_0; \quad \text{und} \quad \frac{a \cdot x_1 + b}{c \cdot x_1 + d} = x_1 \quad (2.16)$$

$$\frac{a \cdot \bar{z}_0 + b}{c \cdot \bar{z}_0 + d} = z_0 \quad \text{und} \quad \frac{a \cdot x_1 + b}{c \cdot x_1 + d} = x_1 \quad (2.17)$$

Im ersten Fall ergibt sich nach Umformungen, dass z_0 , \bar{z}_0 und x_1 die quadratische Gleichung $c \cdot x^2 + (d - a) \cdot x - b = 0$ lösen. Da diese Lösungen paarweise verschieden sind und eine solche Gleichung nicht drei Lösungen haben kann, muss $c = 0$ gelten. Daraus ergibt sich sowohl $d = a$ als auch $b = 0$. Damit ist β die Identität und lässt daher OP^+ punktweise fest.

Im zweiten Fall führen die Gleichungen auf die Bedingung $d = -a$ und liefern eine Matrix M_τ , an der sich „ablesen lässt“, dass β die H-Spiegelung an der H-Geraden durch O und P ist. Damit lässt β auch im zweiten Fall OP^+ punktweise fest.

Nach diesen Überlegungen ist klar, dass jede H-Bewegung, die sogar eine Fahne auf sich abbildet, die Identität ist. Also gilt für Bewegungen τ und μ mit $\mu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F} := \tau(AB^+ \cup ABC^+)$):

$$\mu^{-1}(\tau(\mathcal{F})) = \mathcal{F} \quad \implies \quad \mu^{-1} \circ \tau = id \quad \implies \quad \tau = id$$

Damit ist auch (B4) gezeigt und wir formulieren als Zusammenfassung:

Satz 2.9

Die gemäß 2.5 definierten H-Bewegungen erfüllen alle Bewegungsaxiome.

Dass das Vollständigkeitsaxiom erfüllt ist, liegt an der funktionentheoretischen Fundierung des Modells und soll daher nicht mehr detailliert diskutiert werden. Wir wenden uns stattdessen abschließend der Längen- und Winkelmessung zu.

2.4 Längen- und Winkelmessung im Poincaréschen Halbebenenmodell

Die H-Längenmessung

Für den Zugang zur Längenmessung wählen wir einen „anschaulichen“ Weg, der in der Einführung einer *Längenskala* auf der imaginären Achse und der Abbildung zu messender Strecken auf diese Achse führt.

Schritt 1: Auf der y -Achse wird als *Einheitsintervall* die Strecke $\mathcal{E} := \{z \in \mathcal{H} \text{ mit } z = \lambda i; 1 \leq \lambda \leq 2\}$ gewählt. Wir ordnen \mathcal{E} erst einmal die Länge $1 LE$ zu.

Schritt 2: Wir tragen die Strecke \mathcal{E} wiederholt in beiden Richtungen an, indem wir die H-Bewegungen $\tau^+ : z \mapsto 2z$ und $\tau^- : z \mapsto \frac{1}{2}z$ anwenden:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &:= \mathcal{E} \\ \mathcal{E}_{n+1} &:= \tau^+(\mathcal{E}_n) \\ \mathcal{E}_{-(n+1)} &:= \tau^-(\mathcal{E}_{-n}) \end{aligned}$$

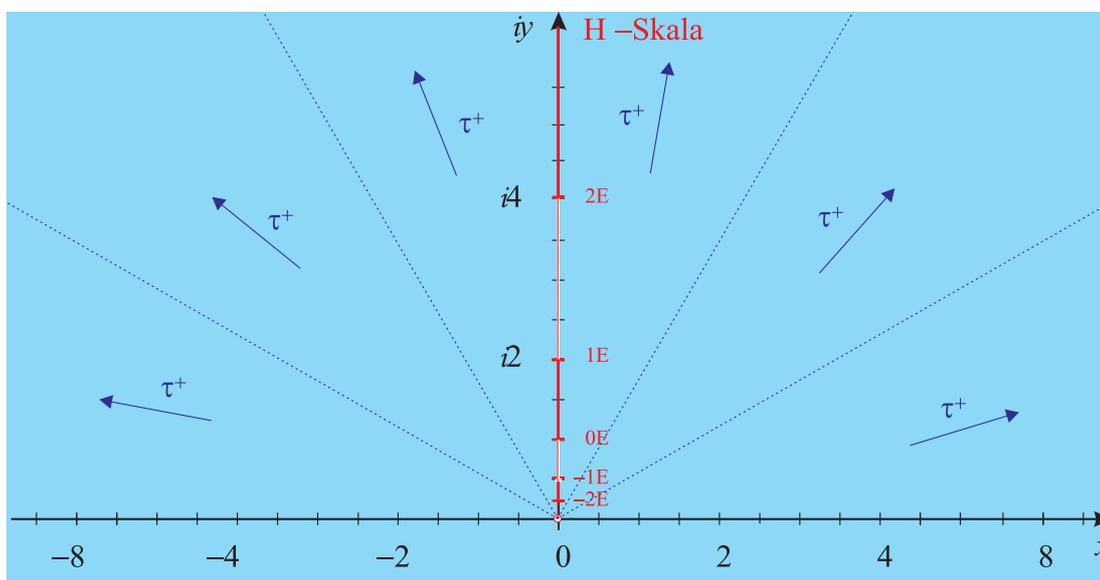


Fig. 18

Nimmt man die jeweiligen Intervallenden wie in Fig. 18 als Skalenmarken, so erhält man auf der imaginären Achse durch die Vorschrift

$$l_{(2)}(z) := \log_2(-iz) \quad \text{für alle } z \text{ mit } \Re z = 0 \quad (2.18)$$

die Skalenwerte zur Maßeinheit LE . Dabei werden auch allen „Zwischenpunkten“ auf der imaginären Achse Skalenwerte zugeordnet und man erhält als orientiertes Längenmaß für die Strecke PQ mit $P \hat{=} z_P := iy_P$ und $Q \hat{=} z_Q := iy_Q$ die Vorschrift

$$l_{(2)}(PQ) := l(z_Q) - l(z_P) = \log_2\left(\frac{y_Q}{y_P}\right) \quad \text{für alle } P, Q \text{ auf der imaginären Achse.} \quad (2.19)$$

Um eine besser mit dem Taschenrechner handhabbare Längenmaßfunktion zu bekommen, multiplizieren wir $l_{(2)}$ mit $\ln(2)$, was der Wahl von e als Logarithmenbasis und damit dem dem Übergang zur Längenmessung mit dem Intervall von i bis ie als Einheitsintervall entspricht:

Definition 2.6

Auf der imaginären Achse sei die orientierte H-Längenmessung definiert durch:

$$l(iy_1, iy_2) := \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \ln(y_2) - \ln(y_1) \quad \text{für alle } y_1, y_2 > 0 \quad (2.20)$$

Falls orientierungsunabhängig gemessen wird, ist stattdessen

$$d(iy_1, iy_2) := \left| \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \right| = |\ln(y_2) - \ln(y_1)| \quad \text{für alle } y_1, y_2 > 0 \quad (2.21)$$

zu nehmen.

Da sich eine H-Strecke mit beliebigen Endpunkten z_1, z_2 durch eine Bewegung auf die imaginäre Achse abbilden lässt, ist damit auch eine Längenmessung für beliebige H-Strecken in der Form

$$d(z_1, z_2) := \left| \ln\left(\frac{y'_2}{y'_1}\right) \right| = \left| \ln\left(\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{a+r-x_1}{a+r-x_2}\right) \right| = \ln\left(\frac{1 + \frac{|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2|}}{1 - \frac{|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2|}}\right) = \ln\left(\frac{|\bar{z}_1-z_2| + |z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2| - |z_1-z_2|}\right) \quad (2.22)$$

definiert¹ (siehe die Grafik):

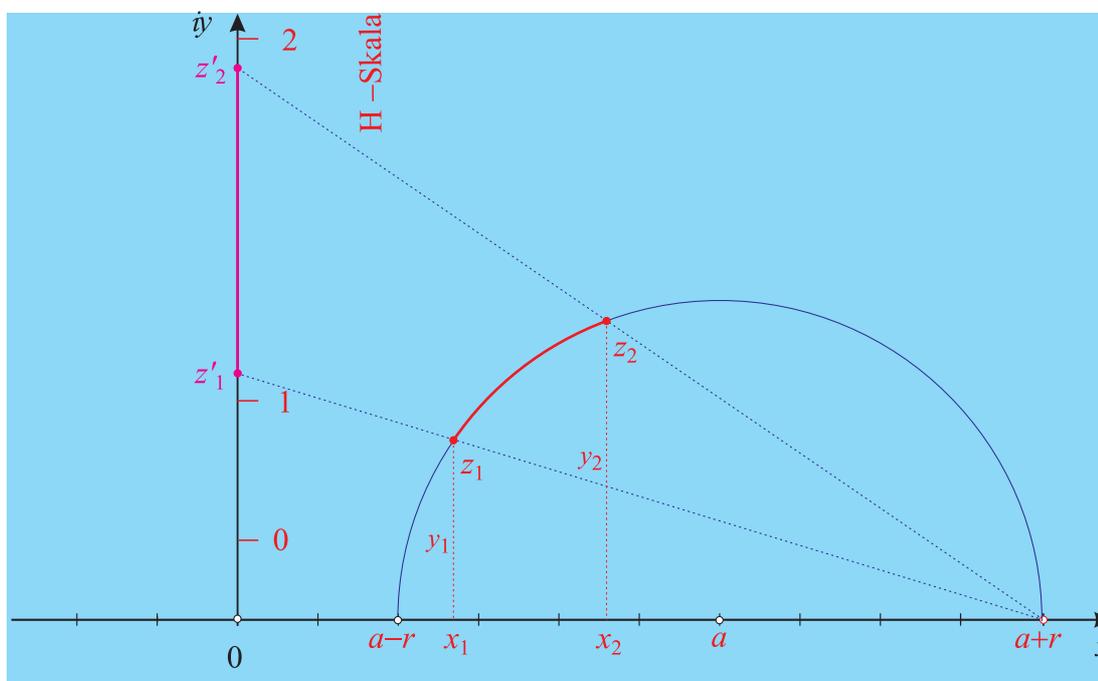


Fig. 19

Man kann zeigen, dass der Quotient $\frac{|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2|}$ unter allen H-Spiegelungen und damit auch unter allen H-Bewegungen invariant ist. Daher ist im ersten Poincaré-Modell die Längenmessung wohldefiniert.

Die H-Winkelmessung

Wir nutzen aus, dass sowohl euklidische Spiegelungen als auch alle Inversionen $\iota_{u,r}$ *winkeltreu* sind. Dabei übernehmen wir die Aussage für Inversionen aus der *komplexen Analysis*. Damit sind auch alle H-Bewegungen *winkeltreu*, wenn man das Winkelmaß wie folgt erklärt:

¹Dass der erste Term und der mit Hilfe des Quotienten $\frac{|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2|}$ definierte Term gleiche Werte liefern, soll hier nicht hergeleitet werden, kann aber mit etwas Mühe mit Hilfe der Formeln (2.10) und (2.11) nachgerechnet werden !

Definition 2.7

Ist (AB^+, AC^+) ein H-Winkel, so wird unter dem *zugeordneten euklidischen Winkel* ϵ_{BAC} der durch die tangentialen euklidischen Halbgeraden in A an AB^+ und AC^+ gebildete Winkel verstanden und als Maß des Winkels (AB^+, AC^+) gilt das euklidische Winkelmaß von ϵ_{BAC} .

Wie Fig. ?? zeigt, erhält man einen zu ϵ_{BAC} euklidisch kongruenten Winkel als Innenwinkel oder dessen Komplementärwinkel (zum Vollwinkel!) im euklidischen Dreieck mit den Ecken bei a_1 , a_2 und A . Dabei sind a_1 und a_2 die Halbkreismitelpunkte der H-Geraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt A :

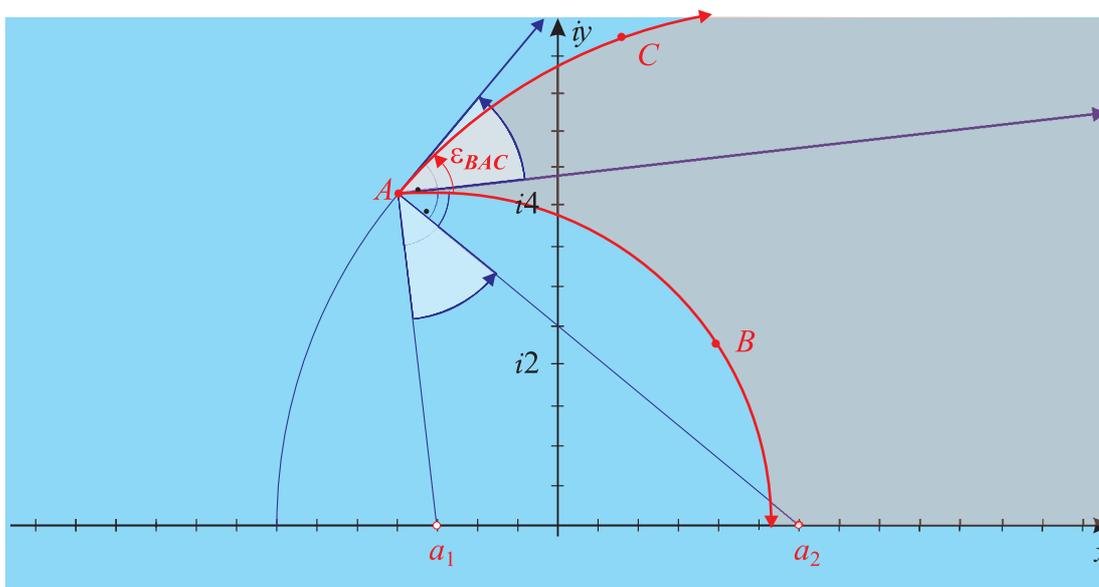


Fig. 20

Wir in Fig. 20 an Stelle von (AB^+, AC^+) der Winkel (AC^+, AB^+) betrachtet, so ist diesem der Komplementärwinkel zugeordnet.

Aus den Überlegungen folgt, dass es in der H-Geometrie *rechte* Winkel gibt und diese auch im euklidischen Sinn rechte Winkel sind.

Ordnet man dem Vollwinkel das Winkelmaß 2π zu, so erhält man die Zahl π als obere Schranke für die Innenwinkelsumme im Dreieck. Noch merkwürdiger ist, dass sich der Flächeninhalt eines H-Dreiecks mit folgender Vorschrift „messen“ lässt:

Definition 2.8

Unter dem Flächeninhalt $\mathcal{A}(ABC)$ eines H-Dreiecks ABC versteht man die Zahl $\mathcal{A}(ABC) := \pi - \text{Innenwinkelsumme von } ABC$.

Dass diese Festlegung Sinn macht erkennt man an der Zerlegung von Dreiecken, bei denen sich die Größe $\mathcal{A}(ABC)$ additiv verhält:

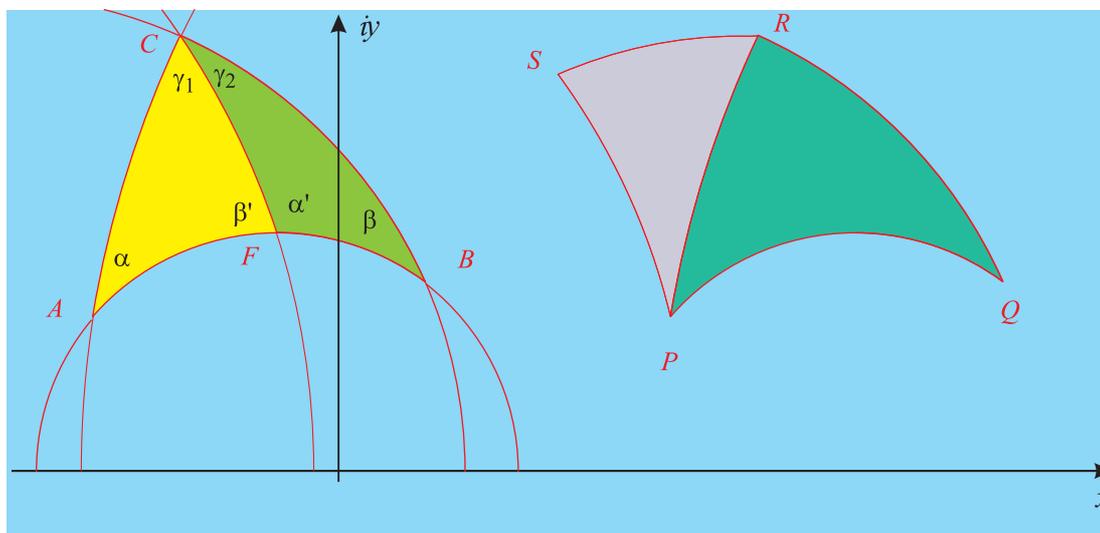


Fig. 21

Bei dem H-Dreieck ABC gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(AFC) + \mathcal{A}(FBC) &= (\pi - \alpha - \beta' - \gamma_1) + (\pi - \alpha' - \beta - \gamma_2) \\
 &= 2\pi - \alpha - \underbrace{(\beta' + \alpha')}_{=\pi} - \beta - \underbrace{(\gamma_1 + \gamma_2)}_{=\gamma} \\
 &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \mathcal{A}(ABC)
 \end{aligned}$$

Bei dem H-Viereck $PQRS$ ergibt sich durch Addition der Teilflächen die Formel

$$\mathcal{A}(PQRS) = 2\pi - \text{Innenwinkelsumme von } PQRS.$$

Durch weiteres Ansetzen von Dreiecken ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 &\text{Der H-Flächeninhalt eines H-Polygons } \mathcal{P}_n \text{ mit } n \text{ Ecken beträgt} \\
 \mathcal{A}_{calP_n} &= (n-2)\pi - \text{Innenwinkelsumme von } calP_n.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ebenso ungewöhnlich ist, dass zwei H-Dreiecke sich genau dann durch eine H-Bewegung aufeinander abbilden lassen, wenn sie in allen drei Innenwinkeln übereinstimmen.

Wir schließen die Betrachtung des ersten Poincaré-Modells mit der Definition von H-Kreisen ab.

Definition 2.9

Ist $M \in \mathcal{H}$ ein Punkt und r eine positive reelle Zahl, so versteht man unter dem H-Kreis um M mit Radius r die Menge $\mathcal{Z}_{M,r}$ aller H-Punkte mit $d(Z, M) = r$.

Mit Hilfe der Abstandsformel (2.22) erhält man folgende Koordinatengleichung für $\mathcal{Z}_{M,r}$ mit Mittelpunkt $m := u + iv$ und H-Radius $r > 0$:

$$(x-u)^2 + \left(y - \frac{e^r + e^{-r}}{2}v\right)^2 = \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2}\right)^2 v^2 \tag{2.24}$$

Ein H-Kreis ist demnach eine euklidische Kreislinie mit einem bei euklidischer Interpretation gegenüber M „nach oben“ verschobenem Mittelpunkt. Wenn man also in \mathcal{H} einen euklidischen Kreis zeichnet, ist dieser

auch ein H-Kreis. Sein H-Mittelpunkt M hat den gleichen Realteil u wie der euklidische Mittelpunkt M' . Der Imaginärteil von M ist allerdings das geometrische Mittel der Imaginärteile von zwei Punkten auf einem Durchmesser parallel zur iy -Achse:

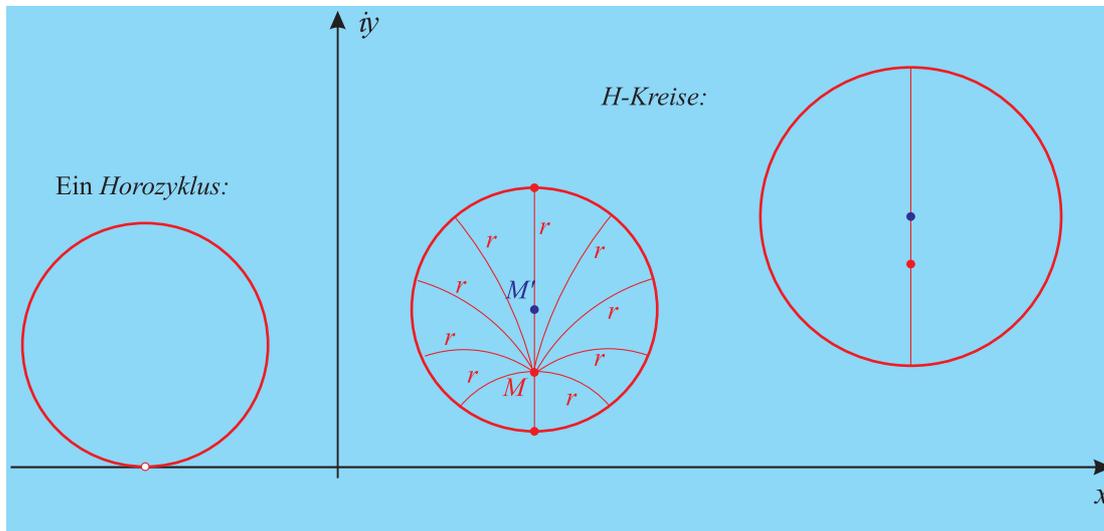


Fig. 22

Die Figur links sieht zwar auch wie ein euklidischer Kreis aus, hat jedoch in der H-Ebene einen unendlich großen Durchmesser, da sie bis zum Rand der Welt reicht.

Man nennt so etwas einen *Horozyklus*. Bei Horozyklen entartet die Gleichung (2.24) zu

$$(x-u)^2 + (y-h)^2 = h^2 \tag{2.25}$$

Noch extremere euklidische Kreise spielen eine Rolle bei der Klärung, wie *Abstandslinien* zu H-Geraden aussehen:

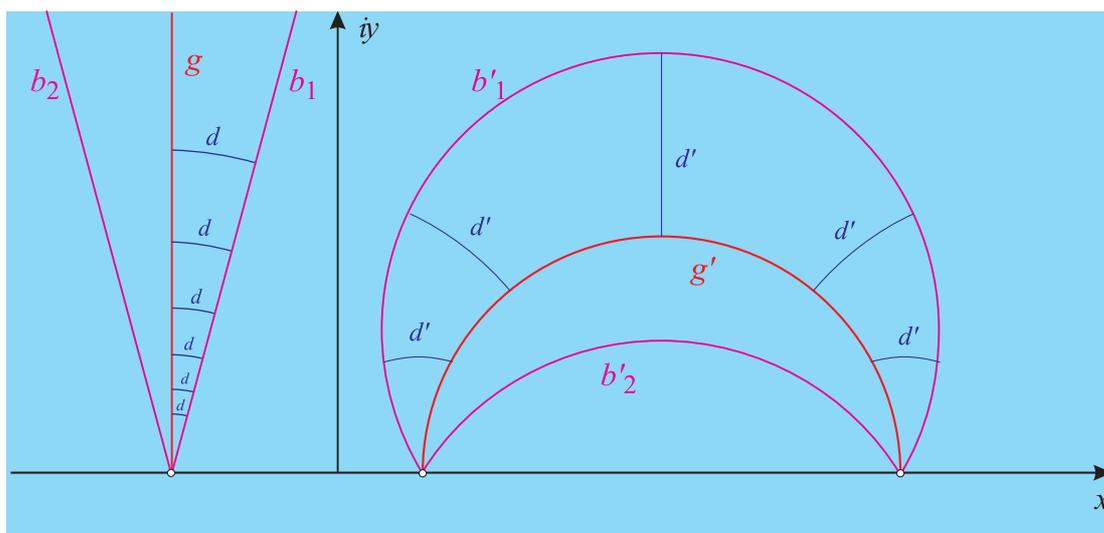


Fig. 23

Dass die Abstandslinien zu Geraden des Typs 1 (die Gerade g in der Grafik) euklidische Geraden durch den Fußpunkt auf der x -Achse sind, ist offensichtlich.

Bildet man g in Fig. 23 durch eine H-Bewegung auf g' ab, so gehen b_1 und b_2 wegen der in Satz 2.1 genannten Eigenschaften der beteiligten H-Spiegelungen in euklidische *Kreislinien* durch die beiden „Fußpunkte“ von g' über.

2.5 Das Poincarésche Kreisscheibenmodell der H-Geometrie

Die Cayleytransformation

Man kann die Menge \mathcal{H} durch die Transformation

$$C : z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \quad (2.26)$$

umkehrbar eindeutig auf das Innere I des Einheitskreises in \mathbb{C} abbilden. Diese Transformation ist unter dem Namen *Cayleytransformation* bekannt.

Sie lässt sich als Verkettung von elementaren Transformationen darstellen, da

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{z+i-2i}{z+i} = 1 + 2i \frac{1}{-\Re z + i\Im z + i}$$

gilt. Demnach wird \mathcal{H} um eine imaginäre Einheit verschoben ($z \mapsto z' := z + i$) und danach an der imaginären Achse gespiegelt ($z' \mapsto z'' := -\Re z' + i\Im z'$). Anschließend wird die Inversion am Einheitskreis angewendet ($z'' \mapsto z''' := \frac{1}{z''}$), woraus eine Kreisscheibe mit Radius $\frac{1}{2}$ resultiert, die in der oberen Halbebene liegt und die x -Achse als Tangente besitzt. Diese Scheibe wird um den Punkt 0 um 90° gedreht und gleichzeitig mit dem Faktor 2 gestreckt. Die anschließende Verschiebung um eine reelle Einheit liefert dann I als Bild:

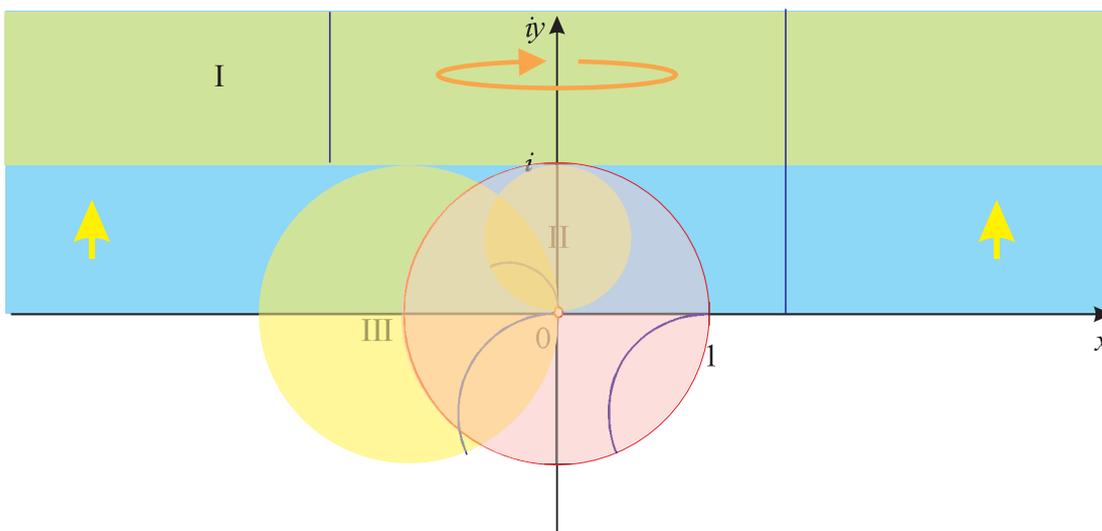


Fig. 24

Damit sind die Bilder bisheriger H-Geraden entweder Durchmesser von I oder euklidische Kreisbögen, die *orthogonal* zum Rand von I sind.

H-Geradengleichungen haben daher in diesem Modell (bei der Schreibweise $z := x + iy$) eine der beiden folgenden Formen:

(Typ D) $g : a \cdot x + b = 0$ mit $a^2 + b^2 > 0$
 (Typ K) $g : (x-a)^2 + (y-b)^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - 1$ mit $a^2 + b^2 > 1$

Bei einer H-Gerade g vom Typ K ist $z_M := a + ib$ der euklidische Kreismittelpunkt M des Kreisbogens, der g darstellt. Wir definieren daher im zweiten Modell:

Definition 2.10

Für das Poincarésche Kreisscheibenmodell der H-Geometrie wird vereinbart, dass das Innere I des Einheitskreises die Punktmenge \mathcal{H}' ist. Als H-Geraden gelten alle Durchmesser und alle zum Rand orthogonalen Kreisbögen in I ohne die jeweiligen Randpunkte.

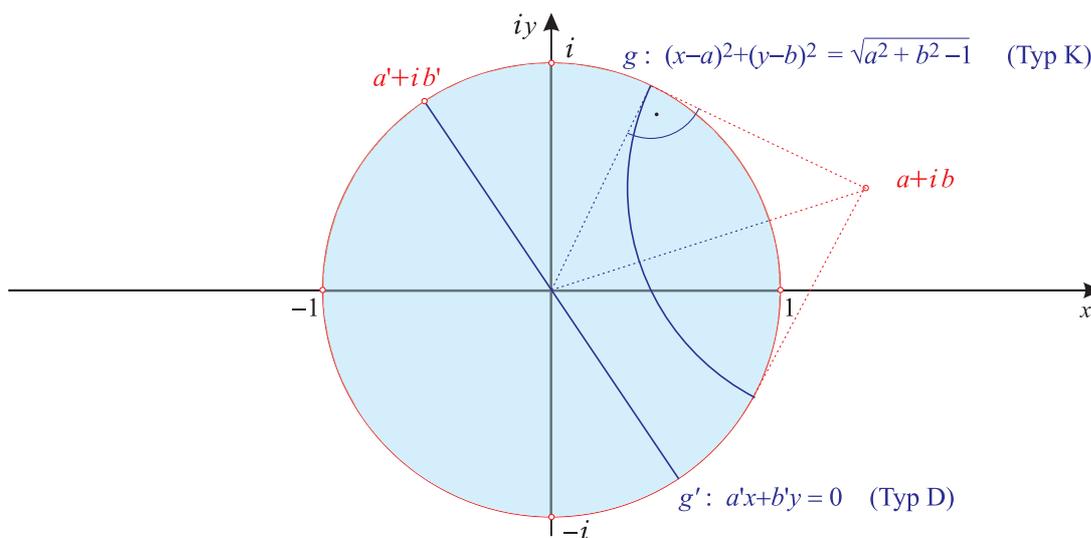


Fig. 25

Die Anordnung von Geraden wird analog zum Halbebenenmodell auf den Geraden vom Typ (D) im Falle $b \neq 0$ in Richtung wachsender x -Koordinaten und im Fall der Gleichung $g : x = 0$ in Richtung wachsender y -Koordinaten erklärt.

Bei einer Gerade vom Typ (K) mit der Gleichung $g : (x-a)^2 + (y-b)^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - 1$ stellen wir die Punkte in der Form

$$z = a + ib + r \cdot e^{i\varphi}; \quad \varphi_{\min} < \varphi < \varphi_{\max}$$

mit $r := \sqrt{a^2 + b^2} - 1$ dar. Dabei sind die Grenzen φ_{\min} und φ_{\max} des *Positionswinkels* durch die Endpunkte des Kreisbogens gegeben. Die Anordnung von g ist dann im Sinne wachsender Positionswinkel zu wählen.

Die Auswahl von *Halbebenen* ist ebenfalls analog zum ersten Modell erklärt.

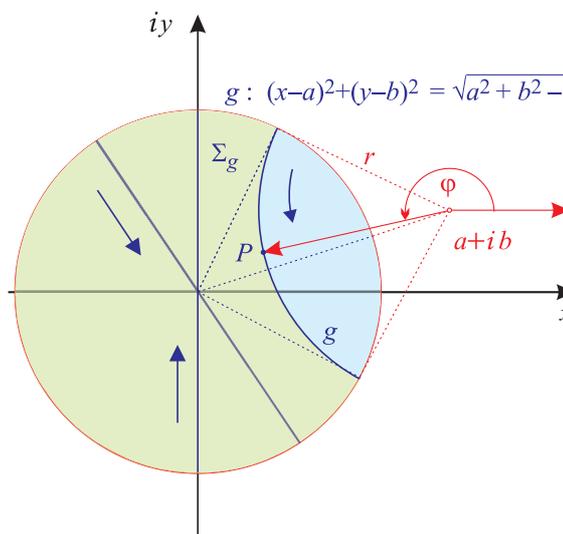


Fig. 26

Wenn man die Definition von H-Bewegungen aus dem ersten Modell durch Abbilden der Kreisscheibe mittels $C^{-1} : z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$ in die obere Halbebene, die Anwendung einer dortigen H-Bewegung und die abschließende

„Rücktransformation“ durch C in das zweite Modell erklärt, resultieren gebrochen lineare Transformationen, die I auf sich abbilden und den Rand von I (d.h. den Einheitskreis) auf sich abbilden.

Ihre „Bauart“ soll in einem Satz (ohne Beweis) mitgeteilt werden:

Satz 2.10

Durch Übertragung aus dem Halbebene-Modell mittels $\tau'(z) := C \circ \tau \circ C^{-1}(z)$ erhält man im Kreisscheibenmodell von Poincaré folgende Bewegungsgruppe \mathcal{B}' :

$$\mathcal{B}' = \left\{ \tau' : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}' \mid \tau'(z) = e^{i\phi} \cdot \frac{z-v}{1-\bar{v}z} \text{ oder } \tau'(z) = e^{i\phi} \cdot \frac{\bar{z}-v}{1-\bar{v}\bar{z}}, \right. \\ \left. \text{mit } \phi \in [0, 2\pi[\text{ und } v \in \mathcal{H}' \right\} \quad (2.27)$$

Bei der Bewegungsvariante mit Erhaltung des Umlaufsinns von Dreiecken liefert die in der oberen Halbebene verwendete Transformation τ mit der zugeordneten Matrix

$$M_\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (ad - bc > 0)$$

folgende Transformationsparameter in (2.27):

$$\text{Mit } \alpha := (a+d) - i(c-b) \text{ und } \beta := (a-d) - i(c+b) \text{ gilt } v = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ und } e^{i\phi} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}.$$

Offensichtlich setzt sich eine *eigentliche* Bewegung von \mathcal{H}' aus einer Transformation des Typs

$$T : z \mapsto \frac{z-v}{1-\bar{v}z}$$

und einer euklidischen Drehung um 0 mit dem Drehwinkel ϕ zusammen. Für $v=0$ ist τ eine euklidische Drehung um 0. Sie ergibt sich, wenn in der oberen Halbebene eine Transformation τ mit $a=d$ und $b=-c$ verwendet wird. Wenn es sich nicht um die Identität handelt, sieht die zugeordnete Matrix nach Normierung so aus:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Nach den Überlegungen auf Seite 25 (Fall 3) handelt es bei τ um die Verkettung zweier Geradenspiegelungen, bei denen eine H-Gerade die y -Achse ist und die andere H-Gerade ein euklidischer Halbkreis mit Mittelpunkt $-a$ ist, der durch den Punkt i geht.

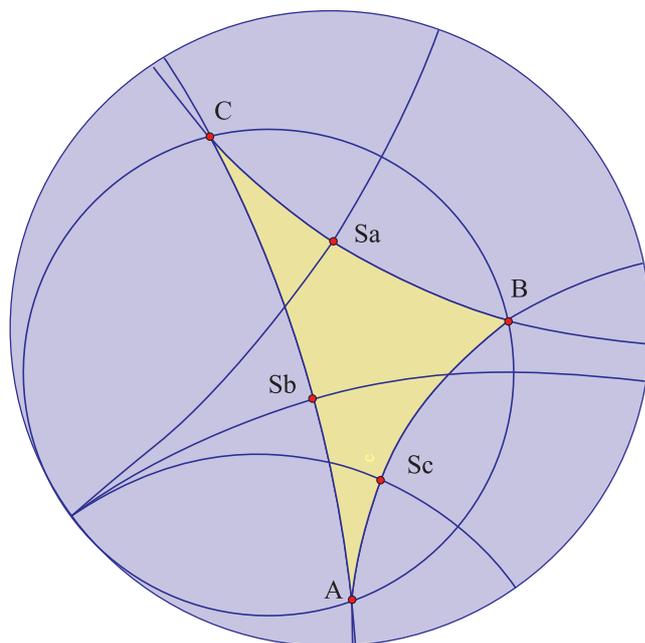
Bei *uneigentlichen* Bewegungen wird z mittels C^{-1} in die obere Halbebene abgebildet, dort einer H-Bewegung mit negativer Determinante unterworfen und das Resultat mittels C nach \mathcal{H}' zurücktransformiert. Dabei resultiert die gleiche Beziehung zwischen M_τ und den Parametern v und $e^{i\phi}$ wie bei eigentlichen Bewegungen.

So bleibt nur noch die Mitteilung der Längenmaßfunktion in \mathcal{H}' , die wir durch

$$d'(z_1, z_2) := d(C^{-1}(z_1), C^{-1}(z_2)) = \ln \left(\frac{1 + \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}}{1 - \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}} \right) \quad (2.28)$$

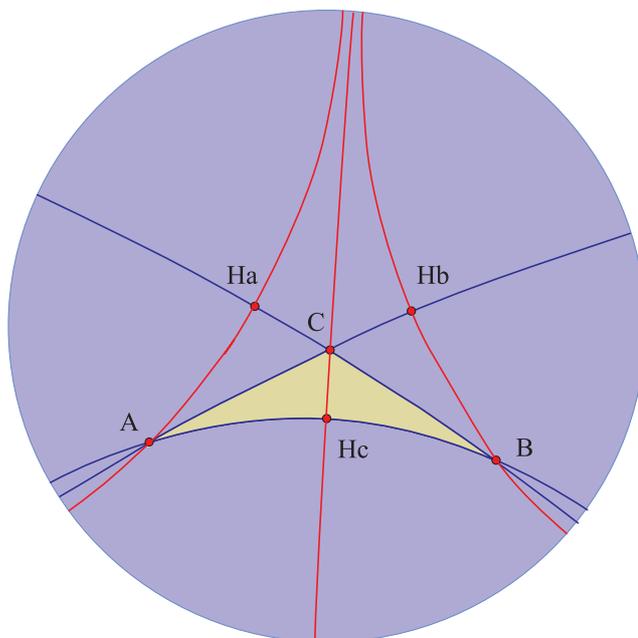
gewinnen. Die Winkelmessung erfolgt wie im ersten Modell euklidisch mit Hilfe zugeordneter Halbgeraden, die den Winkelscheitel als gemeinsamen Anfangspunkt haben.

Die folgenden beiden Grafiken vermitteln einen Eindruck von der interessanten Figurenlehre im Modell:



Ein hyperbolisches Dreieck, das einen Horozyklus als „Umkreis“ besitzt.

Fig. 27



Ein hyperbolisches Dreieck, bei dem sich die drei Höhen nicht schneiden.

Fig. 28

Ausblick auf die hyperbolische Figurenlehre

Es sollen nun abschließend einige Sätze der hyperbolischen Figurenlehre ohne Beweis mitgeteilt werden. Dazu müssen vorab einige Funktionen eingeführt werden.

Definition 2.11

Unter den Funktionen *Sinus hyperbolicus* (\sinh), *Cosinus hyperbolicus* (\cosh), *Tangens hyperbolicus* (\tanh) und *Cotangens hyperbolicus* (\coth) versteht man die Funktionen mit den Vorschriften

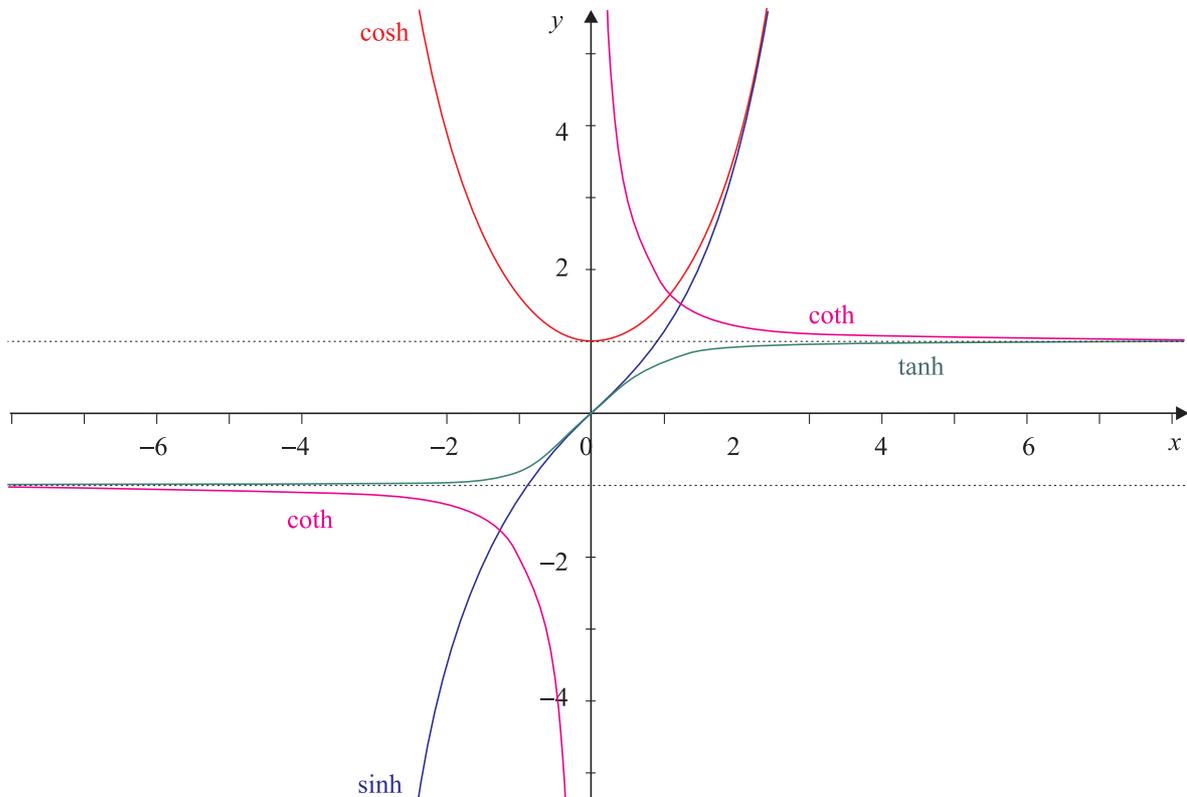
$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad (2.29)$$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad (2.30)$$

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (2.31)$$

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \neq 0). \quad (2.32)$$

Aus folgender Grafik lassen sich die zugehörigen Definitionsbereiche und deren Bilder entnehmen:



Graphen der Hyperbelfunktionen.

Fig. 29

H-Kreise: Zwei dieser Funktionen traten bereits bei der Gleichung (2.24) des H-Kreises im Halbebenenmodell auf. Demnach hat ein H-Kreis $Z_{M,r}$ mit H-Radius $r > 0$ und H-Mittelpunkt $M = u + iv$ in diesem Modell die Gleichung

$$(x - u)^2 + (y - v \cdot \cosh(r))^2 = v^2 \cdot \sinh^2(r).$$

Es verwundert daher nicht, wenn man erfährt, dass ein hyperbolischer Kreis mit H-Radius r in der H-Geometrie den H-Umfang $U = 2\pi \sinh(r)$ und den H-Flächeninhalt $A = 4\pi \sinh^2(\frac{r}{2})$ besitzt. Wenn x sehr klein ist, gilt $\sinh(x) \approx x$ und es ergeben sich näherungsweise die euklidischen Kreisformeln!

H-Dreiecke: Es gelten für ein H-Dreieck mit den Standardbezeichnungen α, β, γ für Winkel, A, B, C für Ecken und a, b, c für H-Seitenlängen:

Satz 2.11 (H-Sinussatz)

$$\frac{\sinh(a)}{\sin \alpha} = \frac{\sinh(b)}{\sin \beta} = \frac{\sinh(c)}{\sin \gamma}$$

Satz 2.12 (H-Seitenkosinussatz)

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos \alpha \\ \cosh(b) &= \cosh(c) \cosh(a) - \sinh(c) \sinh(a) \cos \beta \\ \cosh(c) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos \gamma \end{aligned}$$

Satz 2.13 (H-Winkelkosinussatz)

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cosh(a) \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cosh(b) \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cosh(c) \end{aligned}$$

Die H-Seitenlängen lassen sich damit allein aus den Innenwinkeln des H-Dreiecks berechnen:

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cos \alpha + (\cos \beta)(\cos \gamma)}{(\sin \beta)(\sin \gamma)} \\ \cosh(b) &= \frac{\cos \beta + (\cos \gamma)(\cos \alpha)}{(\sin \gamma)(\sin \alpha)} \\ \cosh(c) &= \frac{\cos \gamma + (\cos \alpha)(\cos \beta)}{(\sin \alpha)(\sin \beta)} \end{aligned}$$

Um jeweils nach den Längen auflösen zu können, benötigt man die Umkehrfunktion von \cosh . Sie heißt *Area-cosinus hyperbolicus* und wird mit arcosh abgekürzt. Die Umkehrungen der übrigen Hyperfunktionen sind in analoger Weise bezeichnet:

Definition 2.12

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &:= \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \operatorname{arcosh}(x) &:= \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \\ \operatorname{artanh}(x) &:= \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (|x| < 1) \\ \operatorname{arcoth}(x) &:= \coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (|x| > 1) \end{aligned}$$

Wie ein Blick auf die Längenmaßfunktionen in den vorherigen Abschnitten zeigt, trat dort bereits das Doppelte der Funktion artanh auf. Wir könnten also im Halbebenenmodell

$$d(z_1, z_2) := 2 \left| \operatorname{artanh} \left(\frac{|z_1 - z_2|}{|\bar{z}_1 - z_2|} \right) \right|$$

und im Kreischeibenmodell

$$d(z_1, z_2) := 2 \left| \operatorname{artanh} \left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} \right) \right|$$

definieren.

Literatur

Andreas Filler: EUKLIDISCHE UND NICHEUKLIDISCHE GEOMETRIE
Mannheim·Leipzig·Wien·Zürich 1993

Ernst Kunz: EBENE GEOMETRIE Grundlagen der Geometrie
rororo 1976

Herbert Zeitler: HYPERBOLISCHE GEOMETRIE
BSV (München) 1970