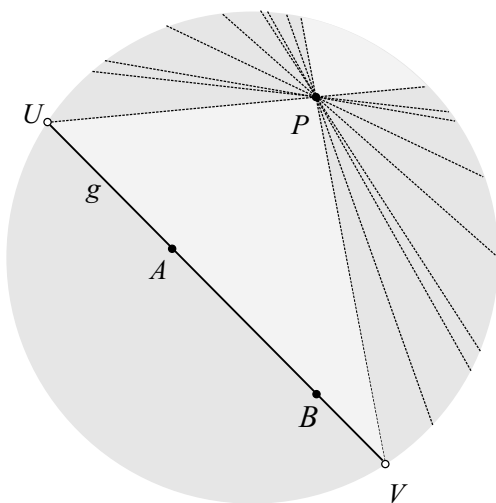


## Modelle der nichteuklidischen Geometrie

### 1. Kleinsches Kreismodell („Bierdeckelmodell“):

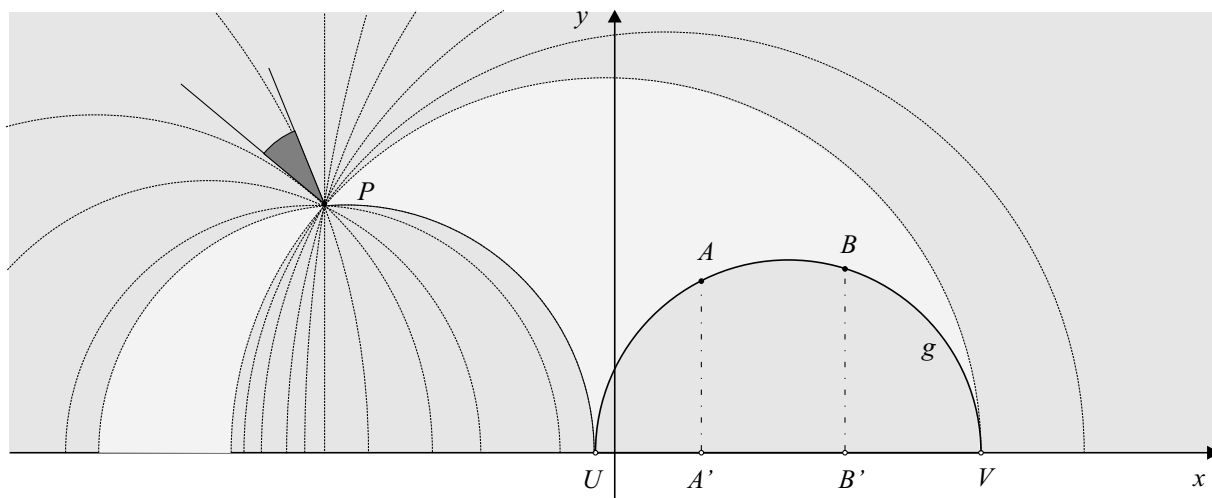


1. Als Menge  $\mathcal{P}$  der Punkte dient eine (euklidische) Kreisscheibe ohne Rand.
2. Als Geraden gelten alle (euklidischen) Kreis-sehnen ohne Endpunkte.
3. Sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  auf einer Geraden  $g$  gegeben, so legt diese Gerade zwei „Randpunkte“  $U$  und  $V$  fest. Als Streckenlänge  $|AB|$  gilt

$$|AB| = \ln\left(\frac{\overline{AV} \cdot \overline{BU}}{\overline{AU} \cdot \overline{BV}}\right).$$

4. Die Winkelmessung ist zu kompliziert, um sie hier anzugeben!

### 2. Poincaresches Halbebenenmodell:

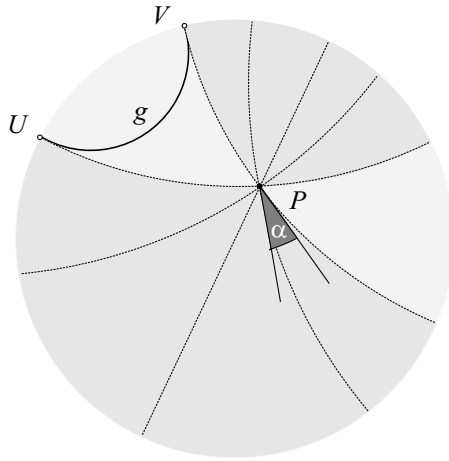


1. Als Menge  $\mathcal{P}$  der Punkte dient die obere Hälfte der  $xy$ -Ebene ohne die  $x$ -Achse.
2. Als Geraden gelten alle euklidischen Halbgeraden und Halbkreise in der oberen Halbebene, bei denen der Anfangspunkt bzw. die „Fußpunkte“ auf der  $x$ -Achse liegen.
3. Sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  auf einer Geraden  $g$  gegeben, so legt diese Gerade zwei „Randpunkte“  $U$  und  $V$  fest. Als Streckenlänge  $|AB|$  gilt (vgl. Grafik)

$$|AB| = \ln\left(\frac{\overline{AV} \cdot \overline{B'U}}{\overline{A'U} \cdot \overline{B'V}}\right)$$

4. Die Winkelmessung erfolgt „euklidisch“ zwischen Tangenten (vgl. Grafik).

### 3. Poincaresches Kreisflächenmodell:



1. Als Menge  $\mathcal{P}$  der Punkte dient eine (euklidische) Kreisscheibe ohne Rand.
2. Als Geraden gelten alle (euklidischen) Durchmesser und Kreisbögen im Inneren der Kreisscheibe, bei denen sich an den Fußpunkten rechte Winkel mit der Randlinie ergeben (vgl. Grafik).
3. Die Längenmessung ist komplizierter als im Halbebenenmodell und wird daher hier nicht angegeben.
4. Die Winkelmessung erfolgt „euklidisch“ zwischen Tangenten (vgl. Grafik).

**Aufgabe:** Wählen Sie das *Poincaresche Halbebenenmodell* als Darstellung der hyperbolischen Ebene (Einheiten auf beiden Koordinatenachsen: 2 cm).

- a) Zeichnen Sie die Punkte  $A(0|1)$ ,  $B(4|2)$  und  $C(1|4)$  ein und konstruieren Sie die Verbindungsgeraden  $AB$ ,  $BC$  und  $AC$ .
- b) Färben Sie das Innere des Dreiecks  $ABC$  und messen Sie die Innenwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$  dieses Dreiecks. Wie groß ist seine Winkelsumme?
- c) Wie kann man im *Poincaresche Halbebenenmodell* Winkelhalbierende konstruieren? Demonstrieren Sie Ihren Vorschlag an einem Beispiel.