

Aufgaben zur nichteuklidischen Geometrie

1. Wählen Sie das *Kleinsche Kreismodell* als Darstellung der hyperbolischen Ebene. Zeichnen Sie dazu einen Kreis mit 10 cm Durchmesser.

a) Zeichnen Sie drei Beispielgeraden a , b und c , bei denen $a \parallel b$ sowie $b \parallel c$ gilt und a und c sich schneiden.

b) Zeichnen Sie eine Gerade t ein, die im Sinne der Schulgeometrie ein Kreisdurchmesser ist. Bezeichnen Sie ihre „Randpunkte“ mit U und V . Wählen Sie drei Punkte A, B, C auf t , die im schulgeometrischen Sinn folgende Entfernungen von U haben:

$$\overline{UA} = 2 \text{ cm}, \overline{UB} = 4 \text{ cm}, \overline{UC} = 6 \text{ cm},$$

Berechnen Sie danach mit der Kleinschen Distanzfunktion

$$|AB| = \ln\left(\frac{\overline{AV} \cdot \overline{BU}}{\overline{AU} \cdot \overline{BV}}\right)$$

die Streckenlängen $|AB|$, $|BC|$ und $|AC|$.

Gilt (bis auf Taschrechnergenauigkeit) $|AB| + |BC| = |AC|$?

c) Begründen Sie, dass im Kleinschen Modell für jedes solche Streckenpaar $|AB| + |BC| = |AC|$ gelten muss

2. Wählen Sie jetzt das *Poincaresche Halbebenenmodell* als Darstellung der hyperbolischen Ebene (Einheiten auf beiden Koordinatenachsen: 2 cm).

a) Zeichnen Sie die Punkte $A(0|1)$, $B(4|2)$ und $C(1|4)$ ein und konstruieren Sie die Verbindungsgeraden AB , BC und AC .

b) Färben Sie das Innere des Dreiecks ABC und messen Sie die Innenwinkel α, β, γ dieses Dreiecks. Wie groß ist seine Winkelsumme?

c) Wie kann man im *Poincaresche Halbebenenmodell* Winkelhalbierenden konstruieren? Demonstrieren Sie Ihren Vorschlag an einem Beispiel.

3. Das *Poincaresche Kreisflächenmodell* ist technisch schwierig. Wählen Sie es als Darstellung der hyperbolischen Ebene (Kreisradius wie in Aufgabe 1).

a) Wählen Sie als Randpunkte für Geraden die 5 Ecken U_1, \dots, U_5 eines im Sinne der Schulgeometrie dem Kreis einbeschriebenen regelmässigen Fünfecks und konstruieren sie die 5 Geraden g_1, \dots, g_5 , zu denen folgende Randpunkte gehören:

$$g_1 : U_1 \text{ und } U_2, \quad g_2 : U_2 \text{ und } U_3, \quad \dots \quad g_4 : U_4 \text{ und } U_5, \quad g_5 : U_5 \text{ und } U_1.$$

b) Konstruieren Sie zusätzlich die Geraden a und b mit den Fußpunkten

$$a : U_1 \text{ und } U_3 \quad \text{und} \quad b : U_2 \text{ und } U_4.$$

Wie groß ist ihr Schnittwinkel?