Université Nancy 2 — UFR Connaissances de l'Homme
LPHS Archives Henri-Poincaré — UMR 7117 du CNRS
et
Universität des Saarlandes, Saarbrücken
Naturwissenschaftlich-technische Fakultät I

Thèse

en cotutelle
présentée pour l'obtention du
doctorat d'épistémologie et histoire des sciences et des techniques

par

Ralf Krömer

le 6 mai 2004

La théorie des catégories: ses apports mathématiques et ses implications épistémologiques.

Un hommage historico-philosophique

Directeurs de thèse:

Ernst-Ulrich Gekeler, Professeur à l'Université de la Sarre
Gerhard Heinzmann, Professeur à l'Université Nancy 2

Membres du Jury:

Pierre Cartier
Professeur à l'École Normale Supérieure - ULM à Paris

Ernst-Ulrich Gekeler
Professeur à l'Université de la Sarre

Gerhard Heinzmann
Professeur à l'Université Nancy 2

Denis Miéville
Professeur à l'Université de Neuchatel (Suisse)

Philippe Nabonnand
Maître de Conférences à l'Université Nancy 2

Norbert Schappacher
Professeur à l'Université de Darmstadt

Rainer Schulze-Pillot
Professeur à l'Université de la Sarre

Klaus Volkert
Professeur à l'Université de Cologne

Die Kategorientheorie: ihre mathematischen Leistungen, ihre erkenntnistheoretischen Implikationen

Eine historische und philosophische Würdigung

Inauguraldissertation von Ralf Krömer

angefertigt an der Université Nancy 2 und der Universität des Saarlandes
unter Betreuung von Prof.Dr. E.–U. Gekeler und Prof.Dr. Gerhard Heinzmann

vorgelegt zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren verwendet.

Danksagung

Mein erster Dank gilt Ernst–Ulrich Gekeler und Gerhard Heinzmann, die die vorliegende Arbeit intensiv betreut haben. Sie haben meiner wissenschaftlichen Arbeit in zahlreichen Gesprächen eine klare Richtung gegeben und sich in allen administrativen Belangen sehr für mich eingesetzt.

Pierre Cartier und Klaus Volkert danke ich für ihre Bereitschaft, ein Gutachten zu erstellen, und für viele Hinweise und Anregungen. Auch die Gespräche mit Philippe Nabonnand und Norbert Schappacher waren wichtige Hilfen beim Durchdringen des Gegenstands. Denis Miéville und Rainer Schultze-Pillot danke ich für ihre Teilnahme an der Prüfungskommission.

Zeit genommen für intensive Gespräche über einzelne Fragestellungen haben sich Steve Awodey, Liliane Beaulieu, Guillaume Bonfante, Jessica Carter, Bruno Fabre, Dominique Fagnot, Anders Kock, F. William Lawvere, Philippe Lombard, Kuno Lorenz und Jean-Pierre Marquis.

Für sachliche Hinweise bin ich Pierre Ageron, Patrick Blackburn, Jean Bénabou, Jacques Dixmier, Andrée Ehresmann, Moritz Epple, Jean-Yves Girard, Siegfried Gottwald, René Guitart, Christian Houzel, Volker Krätschmer, François Lamarche, Kuno Lorenz, Martin Mathieu, Gerd Heinz Müller, Mathias Neufang, Hélène Nocton, Volker Peckhaus, Shahid Rahman, David Rowe, Gabriel Sabbagh, Erhard Scholz, Michael Toepell und Gerd Wittstock zu Dank verpflichtet.

Das Erschließen des Eilenberg-Nachlasses wäre nicht möglich gewesen ohne das Entgegenkommen von Marilyn H. Pettit und Jocelyn Wilk von der *Columbiana library*; Robert Friedman, Pat Gallagher und Mary Young vom *Columbia University Department of Mathematics* teilten mir viele Erinnerungen an Eilenberg mit. Im Falle der Bourbaki-Archive bin ich M.Éguether und Catherine Harcour zu Dank verpflichtet.

Die Arbeit wäre nicht entstanden ohne meine Familie: Meine Lebensgefährtin Andrea Artmann, mein Sohn Lorenz, mein Bruder Jens mit Nina und Nils, meine Mutter und mein Vater mit seiner Frau Anette waren mir die größte Stütze.

Ebenso wichtig war die Begleitung durch Freunde und Bekannte. Eric Réolon und sein Vater halfen mir bei der Formulierung einer französischen Projektbeschreibung. Christian Belles und Uta Zielke hörten sich geduldig einen "allgemeinverständlichen" Vortrag über das Projekt an. Kai Melling danke ich für eine spontane "Rettungsaktion". Philippe Nabonnand stand mir bei der Wohnungssuche in Nancy zur Seite und las die meisten meiner französischen Texte Korrektur. Jean Paul Amann, Torsten Becker, Thomas Bénatouïl, Benedikt Betz, Pierre-Édouard Bour, Jessica Carter, Joachim Conrad, Claude Dupont, Helena Durnova, Igor Ly, Manuel Rebuschi, Laurent Rollet, Léna Soler, Manuela Stein, Scott Walter und Philipp Werner hatten immer ein offenes Ohr für die Probleme, mit denen ich mich befaßte, und viele Worte der Unterstützung.

Finanziell unterstützt wurde das Dissertationsprojekt von folgenden Organisationen:

- vom DAAD mit einem Kurzzeitstipendium im Rahmen des Hochschulsonderprogramms III;
- vom *Ministère de la Recherche* mit einer *aide à mobilité* für *co-tutelle*-Studenten;
- von der Deutsch-Französischen Hochschule (DFH) mit einem Stipendium für *co-tutelle*-Studenten aus Mitteln der Robert-Bosch-Stiftung;
- von der *Université Nancy 2* mit einer *bourse sur fonds de thèse*, kofinanziert von der *Région Lorraine*.

Im Zusammenhang mit der Beantragung dieser Fördermittel möchte ich besonders folgenden Personen danken: Fabienne Replumaz, Friedrich Stemper und Wolfgang Wenzel vom Akademischen Auslandsamt der Universität des Saarlandes; Francoise Merta, Ursula Bazoune und Herrn Dr. Haag vom DAAD; Yvonne Müller von der DFH sowie Christian Autexier und Celine Perez.

Für gute Zusammenarbeit danke ich der Deutschen Schülerakademie, Peter Quell, Alice Keller, El Hadj Laamri, Cheryl Lobb de Rahman und Sergej Rjasanov.

Inhaltsverzeichnis

Typographische und redaktionelle Konventionen[1]

Ich verwende die “alte” deutsche Rechtschreibung.

Fußnoten sind in der ganzen Arbeit fortlaufend numeriert; auf diese fortlaufenden Nummern wird bei Querverweisen Bezug genommen.

Verweise auf zugrundegelegte Veröffentlichungen geschehen im Text der Arbeit fast durchweg durch Kurzreferenzen; die vollständigen Nachweise sind im Literaturverzeichnis zu finden. Die Einträge im Literaturverzeichnis sind alphabetisch nach Autoren und innerhalb eines Autors nach Erscheinungsjahr geordnet.

Die Kurzreferenzen bestehen in der Regel in der Anführung des Autornamens, gefolgt von der Jahreszahl der Veröffentlichung[2] und eventuell einem diakritischen Kleinbuchstaben. Solche Verweise stehen in eckigen Klammern[3]. Zahlen zwischen der Jahreszahl und der schließenden eckigen Klammer sind Seitenzahlen.

Diese Verweistechnik trägt zwar viel zur Intuitivität der Kurzreferenzen bei (der kundige Leser weiß dann oft schon ohne Nachschlagen im Literaturverzeichnis, welche Arbeit gemeint ist), würde aber gleichzeitig, streng durchgehalten, den Text stark aufblähen und insofern schwer lesbar machen. Daher lasse ich gelegentlich den Autornamen oder die Jahreszahl weg, wo sich dies leicht aus dem Kontext ergibt.

[1] In diesem Abschnitt werden einige Besonderheiten im Aufbau der vorliegenden Arbeit erläutert. Diese Erläuterungen nehme ich deshalb vor, weil die betreffenden Besonderheiten die Arbeit zwar insgesamt sehr viel organisierter, übersichtlicher und letztlich kürzer machen, unerläutert aber vielleicht nicht ganz leicht zu verstehen wären. Wer sich darauf verlassen möchte, daß er die Funktionsweise der betreffenden Einrichtungen schon erraten wird, kann den vorliegenden Abschnitt getrost überspringen (und ggf. zu Rate ziehen, wenn Probleme auftreten).

[2] Hierbei wird stets die Jahreszahl angegeben, in der die von mir zitierte Ausgabe erschienen ist. Weicht das Jahr der Erstveröffentlichung hiervon ab, wird dieses im Literaturverzeichnis gesondert genannt.

[3] Originale Literaturreferenzen innerhalb eines Zitates stehen in *zwei* Paar eckigen Klammern. Dies ist eine Kombination aus den eckigen Klammern, die Ergänzungen von mir innerhalb von Zitaten auszeichnen (s.u.), und eckigen Klammern, die Verweise auf die Literaturliste einrahmen. Es ist also gemeint, daß an der jeweiligen Stelle der Autor des Textes, den ich zitiere, *selbst* auf einen anderen Text verwiesen hat — auf den *ich* unter Bezug auf das Literaturverzeichnis der vorliegenden Arbeit verweise. Ich unterdrücke also an diesen Stellen die originale Form der Verweise mit dem Ziel einer größeren Einheitlichkeit.

Insbesondere soll hier ein für alle mal die folgende Konvention ausgesprochen werden: Bezieht sich ein ganzer Abschnitt explizit auf einen bestimmten Autor bzw. eine bestimmte Arbeit, so lasse ich die zugehörigen Autornamen im Verweis weg.

$\langle\#X$ S.$Y\rangle$ Zur Wiedergabe von Zitaten aus Quellentexten und Sekundärliteratur ist zu beachten, daß es häufig sinnvoll ist, auf ein und denselben Textabschnitt in verschiedenen Zusammenhängen einzugehen. Um Mehrfachwiedergaben und -nachweisungen soweit wie möglich zu vermeiden, wird an den Stellen, wo es auf den genauen Wortlaut und den Kontext einer Passage nicht zwingend ankommt, ein interner Verweis der Form $\langle\#X$ S.$Y\rangle$ angebracht; dies bedeutet, daß auf Seite Y *der vorliegenden Arbeit* das vollständige Zitat zu finden ist, auf dessen mit $\#X$ gekennzeichnete Passage an der Stelle, wo der Hinweis erscheint, lose Bezug genommen wird. Auch die bibliographischen Angaben findet man in einem solchen Fall auf Seite Y.

Die Bedeutung spezieller Anführungszeichen und Klammern:

$\triangleleft$Funktion$\triangleright$	Kurzfassung für: Das Prädikat "Funktion"
⌜a⌝	Kurzfassung für: das typographische Objekt a (*type*, nicht *token*; in der vorliegenden Arbeit bezeichnet ⌜⌝ *keine* Gödelnummer!)
$\langle\#X$ S.$Y\rangle$	interner Verweis auf ein Zitat (s.o.)
[ ]	Treten solche eckigen Klammern innerhalb eines Zitates auf, so handelt es sich bei dem eingeklammerten Text um eine von mir formulierte Ergänzung[4].

[...] ⌜[...]⌝ bezeichnet von mir vorgenommene Auslassungen in längeren Zitaten; Solche Angaben werden am Anfang oder Ende von Zitaten normalerweise nicht vorgenommen (weil es ja meist selbstverständlich ist, daß im Originaltext noch etwas vorangeht bzw. folgt).

Auf Übersetzungen fremdsprachlicher Zitate habe ich verzichtet. Dies geschieht aus der Überzeugung, daß jede Übersetzung immer auch eine Interpretation ist, Zitieren und Interpretieren aber nicht vermischt werden sollten.

Zitate aus *Quellen* (die Gegenstand der Untersuchung sind) unterscheide ich typographisch nicht von Zitaten aus *Sekundärliteratur* (die selbst untersucht); entsprechend gibt es auch nur ein Literaturverzeichnis. Dies geschieht aus der Überzeugung, daß im Falle des hier bearbeitenden Themas die Trennungslinie zwischen beidem fließend ist, insofern viele ‚Quellen' Untersuchungen älterer Quellen enthalten und andererseits ‚sekundäre' Texte selbst Gegenstand meiner Untersuchung sein können — zum Beispiel bezüglich ihrer Methodik.

sic! Wirkt in einem Zitat eine Schreibweise wie ein Druckfehler oder ist der originale

[4]Ich mache hiervon vor allem dann Gebrauch, wenn eine Kürzung des zitierten Textes oder ein Einbeziehen des Zitats in einen Satzzusammenhang eine grammatische Umstellung nötig macht oder wenn das Zitat Bezug nimmt auf Mitteilungen vorangegangener, nicht zitierter Sätze. In seltenen Fällen steht zwischen den Klammern eine Fußnotenmarke; die zugehörige Anmerkung stammt dann von mir. (Originalen Fußnoten schicke ich den Hinweis "*originale Anmerkung*" voraus).

Druckfehler für die historische Interpretation bedeutsam, so setze ich in der üblichen Weise *sic!* hinzu, um anzuzeigen, daß die wiedergegebene Stelle tatsächlich so im Original steht.

Einleitung

0.1 Das Thema der vorliegenden Arbeit

Die Kategorientheorie wurde 1945 von Samuel Eilenberg und Saunders Mac Lane entwickelt und ist in den fünfziger und sechziger Jahren des 20.Jahrhunderts zu einer wichtigen Rahmentheorie für zahlreiche Forschungen insbesondere in der algebraischen Topologie und algebraischen Geometrie geworden. Später kamen Verbindungen der Theorie zu Fragestellungen der mathematischen Logik hinzu. Zugleich war diese Theorie bei Mengentheoretikern und Wissenschaftsphilosophen im Gespräch einerseits wegen gewisser Schwierigkeiten im mengentheoretischen Aufbau der Theorie, andererseits wegen der von manchen vorgetragenen Ansicht, die Kategorientheorie eigne sich selbst als eine Grundlage der (Struktur-)Mathematik.

Diese wenigen Bemerkungen verdeutlichen, daß die historische Entwicklung der KT nicht allein gekennzeichnet war durch die ihr in verschiedenen mathematischen Forschungszusammenhängen zugedachten Aufgaben, sondern immer auch durch eine Thematisierung erkenntnistheoretischer Implikationen der beabsichtigten Innovationen. (Mit "Implikation" ist hierbei gemeint, daß die Innovationen Positionen der Erkenntnistheorie der Mathematik, die vorher für gangbar gehalten wurden, ins Wanken gebracht haben.) Die vorliegende Arbeit ist aus der Grundidee entstanden, die Bedeutung jener Thematisierung für die historischen Vorgänge zu untersuchen. Der für die Arbeit gewählte Titel ergibt sich aus der Grundüberzeugung, daß mathematische Leistungen[5] und erkenntnistheoretische Implikationen der Theorie nicht zu trennen sind, und zwar weder im historischen Befund noch in der Methodik der Untersuchung (die demnach philosophisch und historisch zugleich zu sein hat). Die erkenntnistheoretischen Fragen wurden historisch in direktem Zusammenspiel mit den mathematischen Leistungen aufgeworfen, und man kann sie auch nicht aus einer sozusagen klinischen Perspektive, also abgetrennt von den Leistungen und Aufgaben der Theorie, beantworten.

Das Ergebnis der Arbeit läßt sich kurz so angeben: Im Arbeiten mit und an der Kategorientheorie wird ein noch kurz zuvor etabliertes Prinzip im Aufbau von Mathematik, die Einbettung der jeweils beabsichtigten mathematischen Objektkon-

[5]Gerd Heinz Müller bediente sich in einer Vorlesung zu den Axiomatisierungen der Mengenlehre, gehalten im Sommersemester 1972 in Heidelberg, der Formel "Leistungen der Mengenlehre". Unter diesem Titel subsumierte er diejenigen Gebiete, die sich im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre entwickeln lassen. Der Titel der vorliegenden Arbeit ist zu verstehen als eine Anlehnung an diese glückliche Formulierung.

struktion in die Mengentheorie, nicht mehr durchweg vollzogen, und in den Diskussionen kristallisiert sich mehr und mehr die Forderung heraus, diesen Vollzug zu unterlassen. Diese Forderung kommt einem Paradigmenwechsel bei der *community*, die durch ihre mathematische Arbeit auf das Arbeiten mit Kategorien geführt worden ist, gleich. Untersucht man näher, aus welchen Gründen diese *community* auf solches Arbeiten mit Kategorien geführt worden ist, stellt man fest, daß sich zugleich mit einer Erklärung für den Paradigmenwechsel auch eine alternative Rechtfertigung der Gegenstände jenseits einer Reduktion auf die Mengenlehre anbietet, und zwar aus pragmatischer Perspektive. Diese Perspektive geht — im Gegensatz zur herkömmlichen Erkenntnistheorie der Mathematik — davon aus, daß mathematische Objekte höherer Ebene nicht einfach nur aus Abstraktionen aus (durch einen *common sense* gerechtfertigten) Grundobjekten hervorgehen, sondern selbständig auf ihrer jeweiligen Ebene zu rechtfertigen sind.

Es ist möglich und sinnvoll, die Geschichte der KT in bestimmte Perioden einzuteilen:

- Eilenberg-Mac Lane und ihre unmittelbaren Nachfolger verwenden KT als "Sprache"; es geht noch nicht um Konstruktionen *auf* Kategorien.
- Solche Konstruktionen treten beginnend mit [Grothendieck 1957] und [Kan 1958a] in den Vordergrund.
- Beginnend mit SGA, voll ausgeprägt in der elementaren Topostheorie werden immer mehr Konstruktionen als intern substituierbar erkannt (diagrammatisch charakterisiert).

Die Legitimation einer solchen Periodisierung wird im Laufe der Darstellung des Befundes klar; vgl. insbesondere 3.4.3.2 und 7.2.

Es gibt eine ebenso naheliegende wie lapidare Frage, die man an die vorliegende Arbeit stellen wird: Ist denn die KT "wichtig"? In der Tat scheinen die Begeisterung für die KT und die Erwartungen, die Teile der Mathematikergemeinschaft in diese Theorie gesetzt haben, seit Grothendiecks Ausscheiden aus dieser Gemeinschaft um 1970 fortwährend nachzulassen, obgleich die flammenden Befürworter bis dato keineswegs ganz verschwunden sind[6]. Man könnte daraus den Schluß ziehen, *sub specie aeternitatis* habe man es womöglich doch mit einer Eintagsfliege zu tun — dieser Schluß wäre allerdings ebenso voreilig wie der diametrale Schluß, der sich wohl aus einer einseitigen Betrachtung der Situation vor 1970 ergibt. Die vorliegende Arbeit hat die Aufgabe, durch genaue Betrachtung der Leistungen der KT zu belegen, daß diese sehr wohl eine nicht zu vernachlässigende Rolle für einige allgemein als wichtig eingestufte mathematische Entwicklungen der letzten fünfzig Jahre gespielt hat. Es ist fraglich, ob es einen definiten Zeitraum gibt, den man sinnvollerweise verstreichen lassen sollte, bis man hoffen kann, die "Wichtigkeit" einer wissenschaftlichen Strömung abschließend bewerten zu können. Ich halte jedenfalls dafür, daß eine Untersuchung den erkenntnistheoretischen Fragen, die diese wissenschaftliche Strömung aufwirft, einen solchen Zeitraum gar nicht abwarten *kann*, sondern so früh wie

[6] Die Kategorientheorie hat neulich sogar die Tagespresse erobern können; [Dath 2003].

möglich angegangen werden sollte (vgl. 0.3.1). Und in der Tat ging ja, wie eingangs bemerkt, im Falle der KT die Untersuchung der von ihr aufgeworfenen erkenntnistheoretischen Fragen fast zeitgleich mit der Entwicklung der Theorie mit. Selbst die weitreichendste dieser Fragen, ob die KT zumindest in bestimmten Zusammenhängen die Mengenlehre als Werkzeug der erkenntnistheoretischen Untersuchung des mathematischen Wissens ablösen kann, kann unabhängig von einer abschließenden Bewertung der Wichtigkeit der KT angegangen werden, wenn die Antwort auf diese Frage nicht Gültigkeit "jenseits der Historie" beansprucht, sondern Mathematik als Aktivität betrachtet, die in ihren speziellen Ausformungen an die Gegebenheiten der jeweiligen Epoche gebunden ist (wie es ja das Beispiel der Ablösbarkeit der Mengenlehre letztlich nahelegt).

0.1.1 Die bisherige historische Sekundärliteratur zum Thema und ein notwendiger Perspektivewechsel

Es liegen schon eine Reihe historischer Untersuchungen zur Kategorientheorie vor. In der Auswahl der von mir intensiver bearbeiteten Fragen setze ich den naheliegenden Schwerpunkt auf *offenen* Fragen: Mac Lane hat zehn oder mehr Texte zur Entstehungsgeschichte von [Eilenberg und Mac Lane 1942a] geschrieben; es braucht keinen elften! (Es sei denn, Mac Lanes Darstellung ist anhand der Quellenlage zu revidieren; vgl. z.B. 2.4.2). Ähnlich steht es um Lerays Einführung des Garbenbegriffs. Wozu noch keine Texte vorzuliegen scheinen: eine Geschichte des Limitkonzepts, eine ernsthafte Qualifikation der "Verspätung" beim adjungierten Funktor, eine Geschichte von Brandts Gruppoid, eine Geschichte der mengentheoretischen Grundlegungsversuche für die KT. An manchen Stellen gilt es verbreitete Irrtümer zu korrigieren, z.B. was die Geschichte der Pfeilschreibweise betrifft (2.1.4) oder die Bedeutung des Homologiefunktors für die Einführung der Kategorientheorie (2.4.2).

Neben der Frage, welche Teile der Geschichte der KT in der vorhandenen Sekundärliteratur bisher zu kurz gekommen sind, stellt sich natürlich auch die Frage, von welchen Gesichtspunkten diese Literatur bisher geprägt ist. Mir scheint, das Schwergewicht liegt bislang auf mehr chronikartigen Darstellungen (mit Entwicklungen vieler mathematischer Details), während Ansätze der Interpretation und Problematisierung der historischen Vorgänge die Ausnahme sind. Dies hängt vermutlich damit zusammen, daß der überwiegende Teil der vorhandenen Sekundärliteratur von Mathematikern stammt, die selbst an der Erarbeitung der Theorie mitgewirkt haben. Ich werde im Folgenden, wenn es mir um diesen Typ von historischen Arbeiten geht, häufiger von "Geschichtsschreibung der Protagonisten" sprechen[7].

Diejenigen, die eine Theorie selbst erarbeitet haben, haben eine deutliche Vorstellung von der ‚Natürlichkeit' oder der ‚Fruchtbarkeit' der Theorie, ja die Beurteilung der Theorie als ‚natürlich' oder ‚fruchtbar' mag für sie ein ständiger Begleiter bei der Erarbeitung der Theorie gewesen sein, etwas, was sie motiviert hat, ihnen den "richtigen" Weg gezeigt hat, wie weiterzugehen ist, endlich etwas, was sich für sie

[7][Epple 2000, 133] spricht von *"historischen Miniaturen"*.

untrennbar mit ihrer Intuition, Vision von der Theorie verbunden hat. Es mag ihnen daher vergleichsweise schwer fallen, diese Urteile als etwas zu nehmen, was einer historisch–philosophischen Problematisierung zugänglich ist. Insbesondere treten in ihrer Erinnerung die Fakten zurück hinter das synthetische, kohärente Bild der Sache, das sich für sie als Ergebnis des Prozesses eingestellt hat. Ich beabsichtige, dieses synthetische Bild den Fakten gegenüberzustellen.

Es gibt natürlich bereits Arbeiten mit interpretatorischem Anspruch. [McLarty 1990] stellt die Geschichte der Topostheorie (und vorausgehend der KT) dar, um zu belegen, daß sich eine falsche Annahme über den Ursprung der Topostheorie verbreitet hat, nämlich, der Begriff des Topos sei als Verallgemeinerung von **Set** entstanden. Eine weitere Arbeit mit größerem interpretatorischem Anspruch ist [Corry 1996]. Dieses Werk (zugleich Corrys Dissertation) war, wie aus dem Vorwort hervorgeht, ursprünglich als Geschichte der Kategorientheorie angelegt; allerdings hielt es Corry für richtig, seine Darstellung dieser Geschichte in einen größeren Zusammenhang zu stellen, den der Geschichte des Begriffs "algebraische Struktur". Zu diesem Zweck behandelt er neben der KT einige vorangehende Etappen der Geschichte des Umgangs mit algebraischen Strukturen[8]. Corry stellt insbesondere die KT der Strukturtheorie Bourbakis gegenüber. Wie wir noch sehen werden, hat bei Bourbaki eine umfangreiche Diskussion darüber stattgefunden, ob die KT in die *Éléments* aufgenommen werden soll. Corry interpretiert die ihm zugänglichen Quellen zu dieser Diskussion unter dem Gesichtspunkt einer Konkurrenz des Begriffes ◁Kategorie▷ zum Begriff "structure"[9].

Es scheint mir, daß man nur zu einer überzeugenden Interpretation der Geschichte der KT vordringen kann, wenn man neben Bourbakis Diskussion auch jene anderen Diskussionen inspiziert, die sich einmal um die Versuche der mengentheoretischen Grundlegung der KT, zum andern um die Versuche, die KT selbst als Grundlage der Mathematik wahrzunehmen, entsponnen haben. (Diese Diskussionen stehen übrigens beide inhaltlich mit der Diskussion bei Bourbaki in Berührung, wie wir sehen werden.) Fraglos spricht auch Corry diese weiteren Diskussionen an; den entscheidenden Beitrag der KT sieht er allerdings definitiv darin, daß sie sich als eine fruchtbare Methode für den Umgang mit strukturierten Objekten erwiesen hat. Was in dieser an sich richtigen Bewertung überhaupt nicht vorkommt, gleichwohl aber, wie ich darstellen werde, den historischen Befund sehr stark kennzeichnet, ist, daß die KT das Verhältnis von "Struktur" und "Menge" gegenüber der von Bourbaki akzentuierten Sicht völlig umgeprägt hat.

Mengenoperationen haben sich im Laufe eines historischen Prozesses als sehr

[8]Diese Entscheidung Corrys hat den unschönen Nebeneffekt, daß dadurch jede Epoche etwas zu kurz kommt; auch schmeckt es mir zu viel nach Bedienen der Historiker-*community* (von der eben die Mathematik der Jahrhundertwende viel besser aufgearbeitet ist und die deshalb den Anschluß an die "Standardwerke" vorfinden will).

[9]Die Gesamtheit der heute zugänglichen Quellen erlaubt ein vollständigeres Bild der besagten Diskussion (vgl. 6.4); die besagte Konkurrenz ist nur mehr ein Topos der Diskussion unter vielen — und wäre es unter einer anderen Interpretationsrichtlinie wohl auch schon aufgrund der von Corry benutzten Quellen allein gewesen? In der Gesamtschau entsteht viel weniger der Eindruck eines "Irrtums" seitens Bourbaki, als dies in Corrys Darstellung der Fall ist.

grundlegend für mathematisches Denken erwiesen; nach der in dieser Arbeit angewendeten erkenntnistheoretischen Position (s.u.) darf daraus allerdings nicht der Schluß gezogen werden, die durch diese Operationen bestimmten Mengen seien nun endlich jene "ersten Dinge" ($\tau\alpha \quad \pi\rho\omega\tau\alpha$), auf deren Erfassen man alle übrige (mathematische) Erkenntnis zurückführen kann. Vielmehr scheint die mathematische Grundlagenforschung zu immer neuen als grundlegend wahrnehmbaren Operationsschemata vorzudringen, wobei die neuen die alten nicht zwingend ablösen, sondern ergänzen.

0.1.2 Die thematische Gliederung der Arbeit

Aus den bisher entwickelten Ansätzen zur Behandlung des Themas ergibt sich die Einteilung in Teile und Kapitel, die nun erläutert wird.

Den eigentlichen Hauptteilen der Arbeit geht ein **Kapitel 1** voraus; dieses Kapitel hat — neben methodologischen und terminologischen Vorbereitungen, was die erkenntnistheoretischen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit betrifft — die Aufgabe, eine erkenntnistheoretische Position zu skizzieren, die mir angemessen erscheint, um die im einzelnen noch aufzuzeigenden "erkenntnistheoretischen Implikationen" der KT zu verstehen. Diese Position ist eine pragmatische und wird zu anderen möglichen Positionen in Beziehung gesetzt. Wer mehr an historischen als an erkenntnistheoretischen Fragestellungen interessiert ist, kann dieses Kapitel zunächst beiseitelassen und entlang späterer Verweise darauf zurückkommen; die dort eingeführten Sprechweisen werden allerdings in der gesamten Arbeit benutzt, und zwar meist kommentarlos.

Der **Teil I** der Arbeit ist überschrieben *Entwicklung der Kategorientheorie in Anwendungskontexten*[10]. In diesem Teil wird in mehreren Kapiteln aufgezeigt, daß die KT sich historisch in Interaktion mit einer Reihe mathematischer Arbeitsfelder entwickelt hat: algebraische Topologie, homologische Algebra, algebraische Geometrie und mathematische Logik.

Kapitel 2 Im Entstehungskontext der KT, der algebraischen Topologie, tritt diese zunächst als Sprache auf, die es erlaubt, eine bestimmte Sorte von Arbeitssituationen auszuzeichnen, für die eine bestimmte Methode zur Verfügung steht. Diejenigen offenen Probleme der algebraischen Topologie der 30er Jahre, die als Probleme der Suche nach dem "richtigen Begriff" gesehen werden können ("Was ist ein direkter Limes?", "Wann ist ein Isomorphismus 'natürlich'?", "Was ist eine Homologietheorie?" etc.), lassen sich alle in diesem Rahmen signifikant weiterentwickeln.

[10]Zum Verhältnis der KT zu ihren "Anwendungen" ist näheres vorauszuschicken; dies geschieht in Abschnitt 1.1.3.

Kapitel 3 In den vierziger Jahren wurden verschiedene Cohomologietheorien für algebraische Objekttypen entwickelt; bei [Cartan und Eilenberg 1956] ging es um ein aus den einzelnen Theorien entwickeltes allgemeines Verfahren zur Herstellung solcher Cohomologietheorien. [Grothendieck 1957] übertrug dieses Verfahren, das von Cartan-Eilenberg innerhalb einer Kategorie von Moduln dargestellt worden war, auf einen rein kategoriell charakterisierten Typ von Kategorien (zu denen Kategorien von Moduln gehören, aber auch Kategorien von bestimmten Garben); auf diesem Wege wurde es möglich, unabhängig von speziellen Voraussetzungen an den zugrundeliegenden topologischen Raum eine Cohomologietheorie für Garben abelscher Gruppen zu entwickeln, was insbesondere für Fragestellungen der algebraischen Geometrie von Bedeutung war. Die KT wird hier als deduktives Mittel eingesetzt, denn Beweise und begrifflicher Aufbau von Grothendiecks Arbeit machen Gebrauch von Aussagen über bestimmte kategorientheoretische Konstruktionen: *schémas de diagrammes, générateurs*, unendliche Produkte, Äquivalenz von Kategorien. Durch diese Errungenschaft tritt die KT als Forschungsgegenstand (nachdem auf die Anfänge bei Eilenberg und Mac Lane zunächst ein Jahrzehnt geringer Aktivität gefolgt war) in eine Phase fast explosionsartiger Weiterentwicklung ein.

Kapitel 4 Im Anschluß an seine Arbeit zur Garbencohomologie unternimmt Grothendieck den begrifflichen Neuaufbau der algebraischen Geometrie; die von ihm neueingeführten Grundbegriffe *Schéma* und *Topos* und wichtige Kennzeichen seiner Methodik (Stichworte *descente*, Relativierung) beruhen auf KT. Erprobt werden sollten diese Innovationen u.a. an den sogenannten Weil-Vermutungen, doch hier waren mit Grothendiecks Ansatz nur Teilergebnisse zu erzielen.

Das Ergebnis der historischen Erforschung des Befunds kann nicht lediglich die lapidare Feststellung sein, daß für Grothendiecks Umgestaltung der algebraischen Geometrie die KT von großer Bedeutung war — man spräche eine völlige Trivialität aus. Die eigentliche Aufgabenstellung ist hier eine philosophische: Wieso ist das so?

Damit zeigen die drei Kapitel 2-4 eine Steigerung auf: KT als Sprache, KT als Deduktionsbasis, KT als neue Basis von Objektkonstruktion.

Kapitel 5 beschließt den ersten Teil der Arbeit mit einer Teilzusammenfassung des Erarbeiteten unter verschiedenen Aspekten: 1) Der Wandel der Definitionen verschiedener Grundbegriffe der mit KT interagierenden Gebiete (Prozesse von Begriffstransformationen — was gilt jeweils als atomar, klar, "Grundbegriff"?); dieser Wandel vollzieht sich entlang von Wandlungslinien, die von der KT suggeriert sind bzw. diese als geeignete Methode suggerieren. 2) Die Intentionen der Grundbegriffe der KT bilden sich im historischen Verlauf, unter dem Handeln mit den Begriffen erst heraus.

Das Kapitel holt auch manche ergänzende Informationen zu den Arbeiten nach, die in den vorangegangenen Kapiteln unter bestimmten thematischen Gesichtspunkten besprochen worden waren (so daß dort für bestimmte Informationen kein Platz war, die für die Argumentation der vorliegenden Arbeit gleichwohl von Bedeutung sind).

Im **Teil II** der Arbeit geht es um Diskussionen über die KT. Hierbei wird sowohl ein historisches Augenmerk gerichtet auf Diskussionen, die in zeitlicher Nähe zur Entwicklung der Theorie tatsächlich stattgefunden haben, als auch an Diskussionen angeknüpft (bzw. werden solche erst vorgeschlagen), die noch im Gange sind (bzw. noch zu führen wären).

Kapitel 6 bespricht Bourbakis Auseinandersetzung mit der Kategorientheorie in den Jahren 1950-1960. Diese Diskussion läßt sich aufgrund der ausgezeichneten Quellenlage gut rekonstruieren; sie bewegt sich von verschiedenen Fragen her auf das Thema Kategorientheorie zu (*limites inductives*, *applications universelles*, homologische Algebra, Garben u.a.m.) und ist gekennzeichnet vom Aufeinandertreffen verschiedener erkenntnistheoretischer Positionen.

Kapitel 7 In verschiedenen historischen Etappen stellt man fest, daß die Anwendung des Werkzeugs KT zu Problemen der mengentheoretischen Realisierung führt; von dieser Feststellung gehen Impulse für die Umwertung von "Grundlage" aus.

Die Geschichte verschiedener Lösungsversuche der Grundlegungsproblematik wird dargestellt.

Kapitel 8 Zunächst wird kurz auf die bisherige Debatte eingegangen, ob und in welchem Sinn man die KT als "Grundlage der Mathematik" ansprechen kann; abschließend werden die erkenntnistheoretischen Schlußfolgerungen der vorliegenden Arbeit formuliert, die darauf hinauslaufen, daß die KT aus der Sicht einer Erkenntnistheorie mit pragmatischem Charakter zumindest "fundamentale Züge" hat.

0.1.3 Die Grenzen der Arbeit

Eine Propädeutik kategorientheoretischer Begriffe ist nicht vorhanden; ich gehe nicht davon aus, daß man die vorliegende Arbeit mit Gewinn lesen kann, wenn man nicht zumindest mit den Grundbegriffen der Kategorientheorie bereits vorher vertraut ist (es ist aber nicht allzu schwer, sich mit diesen vertraut zu machen).

In keinem Fall darf man in einer Doktorarbeit eine vollständige Geschichte der Theorie erwarten. Die Arbeit [Mac Lane 1988a] unternimmt einen vielleicht nicht völlig erfolgreichen, aber jedenfalls verdienstvollen Versuch, den Gesamtkorpus der Arbeiten und *communities*, die von KT beeinflußt sind, abzustecken. Es wäre zwar für den Referenzcharakter der vorliegenden Arbeit nützlich, diese umfangreiche Aufstellung wiederzugeben, wo nicht gar zu erweitern; da aber an vielen Stellen nicht über die reine Anführung hinausgegangen werden könnte (in der ja keine eigene Forschungsleistung liegt), habe ich darauf verzichtet[11].

[11]Neben [Mac Lane 1988a] sind beim Erschließen der einschlägigen Literatur zahlreiche bibliographisch-historische Notizen in den Originalarbeiten selbst und in Lehrbüchern hilfreich. Solche *notes* finden sich z.B.: Bei [Ehresmann 1965, 323-326]; bei [Eilenberg und Steenrod 1952],

Die vorliegende Arbeit ist, soweit sie historisch ist, eine Geschichte der Kategorientheorie, nicht der algebraischen Topologie, der homologischen Algebra, der Garbentheorie, der Topostheorie, der Mengenlehre oder Bourbakis. Geschichtliche Darstellungen dieser Gebiete findet man, so weit sie bereits vorliegen, in der Literaturliste[12]. *Hier* kann es nur darum gehen, wo diese Gebiete mit der Kategorientheorie in Interaktion getreten sind, d.h. durch die KT verändert wurden bzw. auf die KT verändernd gewirkt haben. Soweit zur Bestimmung solcher Interaktionspunkte Untersuchungen über die Geschichte der besagten Gebiete erforderlich sind, werden sie hier wiedergegeben bzw. erstmals durchgeführt. Dabei herrscht eine gewisse Einmütigkeit darüber, daß KT ihre Bedeutung gerade in ihrer Anwendbarkeit auf diese Gebiete hat (und nicht etwa die Untersuchungen abstrakter Folgerungen aus den Kategorieaxiomen das Wesentliche sind); daher ist eine Würdigung der Anwendungsgebiete für eine Würdigung der KT von herausragender Bedeutung (Kapitel 2–4). Gleichzeitig ist herauszustellen, daß es über die Rolle der KT in diesen Anwendungskontexten hinaus eine Entwicklung der KT als weitgehend eigenständige Theorie gegeben hat, die sich nur teilweise aus den gerade jeweils aktuellen Anwendungen ergeben hat (vgl. Kapitel 5).

Einerseits kann eine historische Analyse nicht bis in die Gegenwart vordringen; andererseits kann eine abschließende philosophische Interpretation auf dem Stand der aktuellen Diskussion nicht erreicht werden, wenn nur Konzepte, die bis zum Beginn der 70er Jahre entstanden sind, beachtet werden. Offensichtlich kann es hier nicht darum gehen, z.B. die Debatte um die Infragestellung der *discrete collections of objects* zu einer Entscheidung zu führen; es geht vielmehr darum, zu beschreiben, wie es kam, bis sie "einmal in der Welt war".

Ich habe es für angebracht gehalten, Fragestellungen, die ich nicht ausarbeiten konnte, gleichwohl anzuführen; zu einer redlichen Behandlung eines Themas scheint mir auch eine Auflistung der offengebliebenen Fragen zu gehören. Zugleich scheint mir, daß eine Konzipierung eines größerangelegten Forschungsprojekts (wie es eine umfassende Geschichte der Kategorientheorie offenbar wäre) durchaus Gegenstand einer Dissertation sein kann, wenn das Interesse der aufgezeigten Fragen schlüssig begründet wird. In der vorliegenden Arbeit nicht behandelte Fragen, die mehr ins Detail gehen, führe ich an der ihnen zukommenden Stelle im Text an; eine Reihe von Begrenzungen der Arbeit mehr grundsätzlicher Art stelle ich hier zusammen.

- Die empfindlichste Lücke der Arbeit ist wohl die Nichtbehandlung von Ehresmanns Werk und Einfluß. Allerdings werden manche Einzelaspekte herausgegriffen, etwa Ehresmanns Beiträge zum Gruppoidbegriff (5.1.6.2), Beiträge zur Grundlegung (Ehresmann-Dedecker; 7.4.2), [Ehresmann 1965] als historische Sekundärliteratur, die *esquisses* (vgl. Anm.494). Halbwegs zu begründen ist die

[Mac Lane 1971b] und [Barr und Wells 1985] nach den einzelnen Kapiteln; für spezielle Begriffe leisten [Higgins 1971, 171-172] (Gruppoid), [Gray 1979] und [Kashiwara und Schapira 1990] (Garbe) oder [Weil 1940, 28f] (inverser Limes) gute Dienste.

[12] Die entsprechenden Literaturhinweise gebe ich bei der eingehenden Besprechung des jeweiligen Gebietes.

Auslassung mit der geringen Interaktion von Ehresmanns Aktivität mit dem *“mainstream”*; mein methodologischer Akzent liegt aber auf Interaktionen.

- Kaum oder gar nicht behandelt werden Themen der algebraischen Topologie, die nicht zum unmittelbaren Entstehungskontext gehören, z.B. die weiteren Arbeiten von Eilenberg-Mac Lane, Homotopietheorie, simpliziale Mengen etc.

- Völlig außen vor bleibt die Geschichte der K-Theorie; Abhilfen können hier sein [Carter 2002] und [Marquis 1997a].

- Ich habe Grothendiecks autobiographisches Dokument *Recoltes et semailles* nicht in die Untersuchung einbezogen, weil man ihm mit einer kursorischen Behandlung wohl nicht gerecht werden könnte. Vgl. [Herreman 2000].

- Nicht behandelt werden die Arbeiten der deutschen *communities*: algebraische Geometrie herkommend von der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher; algebraische Topologie (Dold, Puppe); *categorical topology* (Herrlich). Diese Auslassung beinhaltet keine Wertung.

0.2 Quellen und Zeugnisse

Die Auswahl der herangezogenen Quellen ist wohl in jeder historischen Untersuchung mindestens zwei Unwägbarkeiten unterzogen: gewissen *Zufälligkeiten* (welche Quellen dem Autor bekannt bzw. zugänglich sind) und einer gewissen *Willkür* (welche Quellen der Autor für “würdig” befindet). Daher sind einige Bemerkungen angebracht, insbesondere zum verwendeten unveröffentlichten Material.

Eine ernsthafte historische Untersuchung kommt nicht umhin, sich, soweit vorhanden, mit unveröffentlichten Dokumenten auseinanderzusetzen. Bereits diese aufzufinden ist zuweilen eine eigene Forschungsleistung (s.u. 0.2.2). Ich stelle selbstverständlich jeweils im einzelnen dar, worin die von mir verwendeten Dokumente bestehen und wo sie zu finden sind. Die vorliegende Arbeit kann jedoch keine vollgültige Erstveröffentlichung dieser Quellen sein; eine solche steht weiterhin aus.

0.2.1 Bourbaki

Unter den von mir herangezogenen Beständen unveröffentlichter Quellen stütze ich mich insbesondere auf den sehr umfangreichen Bestand, der Bourbaki betrifft. Ausführlich beschreibe ich diesen Bestand im Anhang; er wird im wesentlichen in Frankreich aufbewahrt (vgl. A.1.1).

Ich möchte erläutern, wieso ich diesen Schwerpunkt setze. Zum einen sind die Dokumente dieses Bestandes offenbar dadurch ausgezeichnet, daß man aus ihnen in fast beispielloser Weise die Entstehungsgeschichte einer umfangreichen mathematischen Buchveröffentlichung von herausragender Bedeutung erarbeiten kann; welcher Art die vielfältigen aus den Materialien zu beziehenden Informationen sind, habe ich in

6.1 zusammengestellt. Dies allein vermag aber noch nicht zu rechtfertigen, sich in unserem Kontext so eingehend damit zu beschäftigen; immerhin spielen kategorientheoretische Begriffe in den *Éléments de Mathématiques* so, wie diese schließlich veröffentlicht wurden, eine völlig untergeordnete Rolle (vgl. dazu [Corry 1996, 330f]). Andererseits ist gerade dies ein widerständiges Faktum, für das man gerne eine historische Erklärung hätte: Explizite Kategorientheorie, die aus der Entwicklung der Mathematik in einem bestimmten Zeitraum nicht wegzudenken ist[13], ist zur Marginalität verurteilt in einem Werk, das den Anspruch hat, die wesentlichen mathematischen Errungenschaften *desselben Zeitraums* darzustellen; das Faktum wird nur noch widerständiger, wenn man gleichzeitig bedenkt, daß es Bourbaki gerade darum ging, diese Errungenschaften *systematisch* und *vereinheitlicht* zu präsentieren[14] — eine Aufgabe, der die KT in besonderer Weise angepaßt zu sein scheint.

Die verfügbaren Dokumente erlauben es, wenigstens einige Elemente zur Erklärung dieses Faktums zusammenzustellen[15]. Doch selbst wenn die Frage sich vollständig beantworten ließe (was nicht der Fall ist), blieben sicher Bedenken bezüglich der Relevanz (jenseits allen detektivischen Schauers) einer solchen Untersuchung. Es stellt sich aber zweierlei heraus:

- Die Ablehnung der KT beruht teilweise auf der erkenntnistheoretischen Position von Bourbaki bzw. auf dem mathematischen Paradigma der einzelnen Mitglieder. Die Bourbaki-Quellen belegen also, daß Fragen nach der erkenntnistheoretischen Implikation der KT historisch tatsächlich unter dem Arbeiten an der KT gestellt und nicht nachträglich von mir oder anderen der KT übergestülpt wurden.

- Die Dokumente können auch über einen noch ungleich bedeutenderen Fragenkomplex Aufschluß geben, nämlich über die Entstehungsgeschichte zahlreicher mathematischer Begriffe, Methoden und Resultate im Kontext der Kategorientheorie. Es liegt auf der Hand, daß viele der Mathematiker, aus deren Arbeit diese Begriffe, Methoden und Resultate entstanden, Mitglieder von Bourbaki waren und daß umgekehrt Bourbaki sich zum Großteil aus solchen Mathematikern zusammensetzte (beides mag die Widerständigkeit des oben besprochenen Problems noch vermehren). In den Bourbaki-Dokumenten kann man nun mannigfach Anhaltspunkte finden, daß das Zustandekommen dieser Arbeiten sich oft in engem Kontakt zu den übrigen Mitgliedern der Gruppe vollzog und daß dieser Austausch von großer Bedeutung für die schließlichen Veröffentlichungen war.

[13] Ich hoffe, die vorliegende Arbeit enthält genügend Belege für diese Behauptung.
[14] Vgl. [Thiel 1995, 308] und Abschnitt 1.2.3.1.
[15] Dies hat schon [Corry 1996, 332ff] andeutungsweise getan.

0.2.2 Der Eilenberg-Nachlaß

Eine Schlüsselfigur in der Geschichte der Kategorientheorie ist Samuel Eilenberg. Neben seinen zahlreichen Veröffentlichungen und einigen in Nancy[16] aufbewahrten unveröffentlichten Texten, die er zum Bourbaki-Projekt beigesteuert hat, konnte ich in meine Untersuchung noch andere Quellen einbeziehen: Durch meine Nachfrage wurden an der Columbia University in New York wichtige Teile seines Nachlasses wiederentdeckt, die seit seinem Tod im Jahr 1998 unbeachtet geblieben waren. Es handelt sich (neben seiner Handbibliothek und zahlreichen persönlichen Dokumenten) um große Teile seines wissenschaftlichen Briefwechsels (insbesondere Briefe *an* Eilenberg) sowie Manuskripte zu zahlreichen seiner mathematischen Forschungen. Neben seinen Entwürfen für Bourbaki (darunter ein Text zur homologischen Algebra, der nie Eingang ins Werk gefunden hat[17], sowie ein Memorandum, wie das Werk umzustrukturieren wäre, um sinnvoll über Kategorien sprechen zu können[18]) spielen auch seine Briefwechsel mit Forscherkollegen aus den Jahren vor der Entwicklung des Kategoriebegriffs sowie mit seinen zahlreichen Schülern aus späteren Jahren eine große Rolle für meine Untersuchung. Mit Hilfe des französischen Forschungsministeriums *(aide de mobilité)* konnte ich mir im Juni 2001 die Materialien persönlich durchsehen und bei dieser Gelegenheit noch weitere Bestände auffinden. Die Entdeckung dieses Nachlasses ist auch außerhalb meines Dissertationsprojektes von großer Bedeutung für die Mathematikgeschichtsforschung, und es darf als Glücksfall bezeichnet werden, daß sie (auch dank der Förderung durch die DFH) möglich war. Ich beabsichtige, mich im Anschluß an die Promotion näher mit diesem Nachlaß auseinanderzusetzen.

0.2.3 Gespräche mit Zeitzeugen

Neben veröffentlichten und unveröffentlichten Textdokumenten kann ich mich auch auf eine Reihe von persönlichen Zeugnissen einiger Forscher stützen, die an den Ereignissen selbst beteiligt waren oder sie zumindest aus großer Nähe verfolgen konnten. Für all diese Zeugnisse gilt selbstverständlich, daß allein ich verantwortlich bin für die genauen Formulierungen, in denen die Zeugnisse in der Arbeit wiedergegeben werden; dies gilt insbesondere, falls ich Dinge fehlerhaft wiedergeben sollte.

Die betreffenden Gesprächspartner waren Jean Bénabou, Pierre Cartier, Jacques Dixmier, Andrée Ehresmann, Anders Kock, F.William Lawvere und Gerd Heinz Müller. Diese Forscher haben teilweise Beiträge geleistet, die für die Entwicklung der Kategorientheorie von Bedeutung waren; in jedem Fall sind ihre Erinnerungen für die Rekonstruktion vieler Einzelheiten höchst wertvoll, und ihre Einschätzungen können einem “Einsteiger” gangbare Wege der Interpretation weisen. Das aus den Gesprächen Mitgenommene fließt an vielen Stellen der Arbeit ein, ohne immer im einzelnen gekennzeichnet zu sein.

[16] Vgl. dazu Anhang A.1.1
[17] Vgl. 6.3.3.1.
[18] Vgl. 6.4.2.

Gleichzeitig könnte man sich sicherlich eine breitere Basis von Zeugnissen wünschen; hierzu ist zu sagen, daß manche meiner Bemühungen um eine Kontaktaufnahme fruchtlos blieben (im Falle von Saunders Mac Lane und Henri Cartan zweifellos aus Altersgründen), während ich in anderen Fällen gleich gar keinen Versuch unternommen habe (Grothendieck).

0.3 Vorbemerkungen zur Methode

0.3.1 Die Spannung zwischen historischer und philosophischer Methode

Die historische Untersuchung des Entwicklungsganges einer Wissenschaft ist sehr notwendig, wenn die aufgespeicherten Sätze nicht allmählich zu einem System von halb verstandenen Rezepten oder gar zu einem System von Vorurteilen werden sollen. Die historische Untersuchung fördert nicht nur das Verständnis des Vorhandenen, sondern legt auch die Möglichkeit des Neuen nahe, indem sich das Vorhandene eben teilweise als konventionell und zufällig erweist. Von einem höheren Standpunkt aus, zu dem man auf verschiedenen Wegen gelangt ist, kann man mit freierem Blick ausschauen und noch heute neue Wege erkennen.

[Mach 1883, 251][19]

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist ein historisches und ein philosophisches zugleich. In den folgenden Abschnitten werde ich Bemerkungen zu meiner historischen Methodik machen, während der philosophische Ansatz der Arbeit in Kapitel 1 eingehend diskutiert wird. *Hier* möchte ich aufzeigen, inwieweit philosophisches und historisches Arbeiten ineinandergreift. Allgemein gilt: Die Aufteilung der Themenstellung in eine historische und eine philosophische führt zur gegenseitigen Belebung der beiden Ansätze. Philosophische Zugangsformen erlauben, historische Ergebnisse erst zu bewerten und zu interpretieren, historische Untersuchungen geben den philosophischen Fragestellungen erst ihren Ansatzpunkt. Meine Arbeit ist philosophisch, wo sie Fragen an das Vorfindliche stellt, und historisch, wo sie Antworten zur Kenntnis nimmt.

Der konkrete philosophische Ansatz der vorliegenden Arbeit geht eine noch intimere Verbindung mit historischer Methodik ein, denn Mathematik hat erst dadurch überhaupt eine Geschichte, daß die sie konstituierenden Handlungen, etwa die Veränderungen des konzeptuellen Rahmens, in den Blick rücken. Der Akzent auf der Historizität der Handlungen ist also nicht nur in dem naheliegenden Sinn zu verstehen, daß zum Zustandekommen des schließlichen Wissenschaftsgebäudes die Aktivität der Forscher erforderlich war; ich bin vielmehr überzeugt, daß die Mathematik als Wissensgebäude "ewiger Wahrheiten" nicht richtig verstanden werden kann, sondern vielmehr einer ständigen Transformation ihrer konzeptuellen Rahmenbedingungen

[19] hier zitiert nach [Janik und Toulmin 1998, 166f]; [Kragh 1987, 10] zitiert die englische Übersetzung *The Science of Mechanics: A critical and historical Account of its Development*, La Salle (Illinois): Open Court 1960, p.316

unterzogen ist. Insofern besteht zwischen einem historischen Zugang und einem pragmatisch-handlungstheoretisch orientierten philosophischen Zugang von sich aus eine enge Bindung.

Vielleicht kann man sich also tatsächlich Ernst Machs Vision anschließen und der historischen Erforschung der Wissenschaft Mathematik einen Effekt der Neubelebung derselben zutrauen, ja sie in dieser Funktion sogar als unverzichtbar auffassen. [Epple 2000, 141] drückt es so aus: *"Genau wie jede andere historische Disziplin wird auch die Mathematikgeschichte als Beitrag zur Selbstverständigung jener Gegenwart, welcher eine Historikerin oder ein Historiker angehört, betrieben"*. Zugleich kann eine *philosophische* Reflexion einer Wissenschaft eine solche belebende Funktion nur dann übernehmen, wenn sie weder *préthéorique* noch *postthéorique* ist, also weder versucht, die Entwicklung der Wissenschaft im vorhinein doktrinär zu bestimmen, noch, das Ende der Zeiten abzuwarten, um die Wissenschaft in ihrer endgültigen Form einer Interpretation unterziehen zu können. Die Philosophie muß also im Gang der Wissenschaft selbst miteinsetzen und auf jeder Übergangsstufe von konzeptuellen Transformationen mitvollzogen werden. Wo dies dennoch nachträglich geschehen muß, ist daher eine intime Verquickung mit einem historischen Ansatz "sehr notwendig".

Es ergibt sich die Maxime, daß philosophische Fragen für jeden Abschnitt der historischen Entwicklung einer Disziplin (hier: der KT) neu zu stellen und die Antworten miteinander zu vergleichen sind[20]. Man kann das Zusammenwirken von Geschichtsforschung und philosophischer Interpretation geradezu zur Maxime machen; daher treffe ich auch bewußt keine Entscheidung, was ich hier tue, nur eine Unterscheidung, wann ich gerade *was* tue. M.E. ist die Historisierung philosophischer Positionen die *richtige* Vorgehensweise in der Philosophie. Auch bei Poincaré [1908, 158] (wo es um eine Kritik an den Zielsetzungen logischer Analyse geht) findet sich die Auffassung, daß ein *Verständnis* einer Wissenschaft sich nicht aus der Analyse des als fertig gedachten Wissenskorpus allein ergibt, wenn man mit Verständnis gleichzeitig noch jene Fähigkeit zur Belebung meint[21]. Dies verbindet offenbar Geschichte (einen Verlauf verstehen) und Philosophie (ein Wissen in seiner Begründetheit verstehen). Das Verstehen eines Erkenntnisprinzips ergibt sich aus dem Verstehen des *Fortschreitens* der Erkenntnis — und dieses ereignet sich in der Transformation von Konzepten —, während die *Reduktion* von Erkenntnis auf Grunderkenntnisse der Ausrichtung nach retrograd ist und ein Fortschreiten von Erkenntnis letztlich weder erklären noch befördern kann.

Es ist an dieser Stelle eine wichtige Bemerkung angebracht. Aufgrund der Tatsache, daß die KT zu den mathematischen Disziplinen gehört, die sich bis in unsere Gegenwart erstrecken[22], kann es mitunter sehr schwierig sein zu kontrollieren, ob verbotene Rückprojektionen stattfinden. Insofern ist es vielleicht "zu früh" für eine Geschichte der KT, oder anders: Insofern kann derzeit eine Geschichte der KT nur

[20] Vgl. Cavaillès' Position, dargestellt in [Heinzmann 1998a, 100].

[21] Auf diese Verstehensaufgabe der Philosophie komme ich in 1.2.1 zurück.

[22] Dies soll nicht heißen, daß man seit dem Aufkommen des kategoriellen Standpunktes keine grundsätzlichen Ergänzungen am Zugang zu Mathematik mehr vorgenommen habe. Vgl. dazu 0.1.

eine Philosophie der KT sein.

Eine ähnliche Verbindung von Philosophie und Geschichte scheint mir ein Entwurf von Hao Wang in Aussicht zu stellen. [Wang 1971] beschäftigt sich mit der Frage *"What is mathematics"*. Um dieser Frage besser gerecht werden zu können, als es die vorfindliche mathematische Grundlagenforschung seiner Meinung nach kann[23], entwickelt Wang die Idee einer *"abstract history"*:

> The principal source of detachment of mathematics from mathematical logic is that
> #1 logic jumps more quickly to the more general situation. This implies a neglect of
> mathematics as a human activity [. . .] It is philosophically attractive to study in one
> sweep all sets, but in mathematics we are primarily interested in only a very small
> range of sets. In a deeper sense, what is more basic is not the concept of set but
> #2 rather the existing body of mathematics. [. . .] Rightly or wrongly, one wishes for a
> type of foundational studies which would have deeper and more beneficial effects on
> #3 pedagogy and research in mathematics and the sciences.
>
> As a first step, one might envisage an «abstract history» of mathematics that is less concerned with historical details than conceptual landmarks. This might lead to a resolution of the dilemma between too much fragmentation and too quick a transfer to the most general. [[Wang 1971] S.57]

Wang führt dies an Beispielen aus dem *"existing body of mathematics"* vor, die er als solche aufgelistet hat, die von *"specialists in foundational studies"* übergangen werden. Offenbar stehen in meinem Projekt Philosophie und Geschichtsforschung einander wechselseitig in Diensten, um — in einem engeren Kontext — ein Ziel zu erreichen, das dem Wangs sehr ähnlich ist. Andererseits bleibt es methodologisch fraglich, ob diese Ziele dadurch zu erreichen sind, daß man *"less concerned with historical details than conceptual landmarks"* ist.

Bei ⟨#3 S.xxxii⟩ kommt die Vorstellung zum Vorschein, *"foundational studies"* sollten *"deeper and more beneficial effects on pedagogy and research in mathematics and the sciences"* haben. Wohl ebenfalls im Blick auf das Desiderat, die Philosophie möge in die Lage versetzt werden, die oben skizzierte belebende Funktion in der Wissenschaft zu übernehmen, spricht Lawvere von *"guide-lines [. . .] which directions of research are likely to be relevant"* als einem möglichen Beitrag von *"foundations"* (8.1.2). Wang ist sich bewußt, daß man dieser Vorstellung auch abhold sein könnte (*"Rightly or wrongly"*)[24].

Das Zusammenspiel von Philosophie der Mathematik und Geschichte der Mathematik ist kompliziert. Mal dienen historische Vorgänge als Fallbeispiele für Konzepte der Philosophie der Mathematik (entweder werden solche Konzepte anhand des Falls entwickelt oder späterhin anhand eines solchen Falls getestet), mal dienen philosophische Konzepte dem Historiker als Hilfsmittel zum Verständnis eines historischen Vorgangs. Mir geht es, wie schon gesagt, in der vorliegenden Arbeit dezidiert *nicht* darum, die KT als Fallbeispiel zur Unterstützung einer bestimmten Position in der Philosophie der Mathematik heranzuziehen (dies mag an anderer Stelle versucht

[23] Einen Teil seiner diesbezüglichen Kritik diskutiere ich auf S.36 der vorliegenden Arbeit.

[24] Für den Fall der *historiography of science* wird dieses Problem bei [Kragh 1987] diskutiert.

werden); eher suche ich philosophische Methoden, die helfen, die KT und die sie betreffenden Debatten zu verstehen.

0.3.2 Historische Methode

0.3.2.1 Das Ermitteln und Gliedern der Fakten

Wer mit einer umfangreichen Sammlung historischer Fakten konfrontiert ist, steht traditionell vor der Aufgabe, diese Fakten zu *ordnen* und zu *gliedern*. Die naive Vorstellung geht dahin, daß man sich erst durch eine solche Gliederung über die amorphe Masse der historischen Fakten eine Handhabe verschaffen und sie so einer historischen Interpretation zuführen kann. Es ist aber umgekehrt auch nicht zu leugnen, daß bereits in der gewählten Ordnung und Gliederung bewußt oder unbewußt eine Interpretation vorgenommen wird. Es kann also insbesondere an der gewählten Gliederung selbst liegen, daß bestimmte prinzipiell mögliche Interpretationen nicht nur (entgegen dem erklärten Ziel der Gliederung) nicht vorgenommen, sondern vielmehr geradezu ausgeschlossen sind — wenn diese Interpretationen nämlich derjenigen zuwiderlaufen, die bei der Gliederung eingebracht wurde. Das geht so weit, daß nicht einmal von vorneherein festgelegt ist, welches die zu ordnenden Fakten denn "sind", sondern daß vielmehr erst die Ordnungsprinzipien zur Auffindung bestimmter Fakten führen, etwa weil sie an bestimmten Stellen nahelegen, die bekannten Fakten als unvollständig anzusehen — dem jeweiligen Ordnungsprinzip ist eine Vorstellung inhärent, welche Fakten (im Sinne von Antworten auf vom Ordnungsprinzip vorgegebene Fragen) *vorhanden sein sollten*. Die Rede von der "prinzipiell möglichen Interpretation" bleibt denn auch die Antwort schuldig, woran sich denn die prinzipielle Möglichkeit festmacht, wenn nicht einmal gesagt werden kann, was interpretiert werden soll, ohne daß bereits interpretiert wird. Vgl. zu diesem Problem [Kragh 1987, 52]. Ich bemühe mich zumindest, meine Ordnungsprinzipien zu explizieren — und so überprüfbar zu machen — und möglichst viele verschiedene Ordnungsprinzipien zur Anwendung zu bringen.

Ich ordne (und finde) die Fakten, indem ich sie entlang verschiedener "Achsen" aufschneide. Wenn ich nach *communities* aufteile, gelange ich zu einer anderen Gliederung, als wenn ich nach Begriffsorten in einer Hierarchie vorgehe; wieder ein anderes Ergebnis erhalte ich, wenn ich nach Forschungsprogrammen vorgehe; ein viertes, wenn ich versuche, (hypothetische) allgemeine Gesichtspunkte mathematischer Begriffsbildung anzulegen.

0.3.2.2 Komparatistik?

In [Krömer 1998] ging es zunächst um das Aufkommen der abstrakten Vektorraumstruktur; dort war es aber gerade eine Erweiterung des Rahmens (z.B. die Betrachtung der Hervorkehrung des strukturellen Standpunktes insgesamt), die erst einen geeigneten methodischen Apparat bereitstellte und bei der systematischen Einordnung der Ergebnisse half. [Corry 1996] hat sich entschieden, auch in der historischen Untersuchung der KT den Akzent auf die Hervorkehrung des strukturellen Standpunktes insgesamt zu legen; ich verstehe das nicht ganz, da die KT (anders als der Vektorraumbegriff) doch auf der Höhe dieser Bewegung entsteht.

Mir scheint, es gibt wenige Ansatzpunkte für einen Vergleich der Geschichte der Einführung von ◁Kategorie▷ mit der der Einführung von ◁Gruppe▷ (Wussing). Es handelt sich um völlig verschiedene Epochen. Allerdings ist ◁Kategorie▷ in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von ◁Gruppe▷; was insofern sehr wohl lohnen könnte, ist eine Suche nach einer Übertragung gruppentheoretischer Methoden auf die KT (nach dem Motto: welche Eigenschaften von ◁Gruppe▷ kann man aufgeben, ohne daß die Methoden unbrauchbar werden). Auf diesen Ansatz komme ich in Abschnitt 5.2.1 zurück.

0.3.2.3 Die Suche nach Ausprägungen von *communities*

Die Besprechung des Ansatzes, nach solchen Ausprägungen zu suchen, hat aus zwei Gründen ihren Platz in dieser Einleitung: Zum einen ist meine Entscheidung für diesen Ansatz eine wichtige methodologische Bestimmung (die im Einklang steht mit der Bedeutung von Kuhns Theorie für meine zentralen Thesen — vgl. 1.4.2); zugleich ist hier aber auch zu bestimmen, *wie* (also im engeren Sinn von "methodisch": mit welcher Methode) man solche Ausprägungen überhaupt feststellt.

A) Was ist das: eine *community*? Zum Begriff der *scientific community* gibt es in [Ritter 1971] Bd.8 ein Stichwort (S.1516); die moderne Verwendung des Begriffs bezieht sich wesentlich auf Kuhn, der seinerseits beeinflußt war von der Gestaltpsychologie und der Schule von Lemberg. Die wissenschaftstheoretische Debatte geht darum, ob hier nicht Wissenschaftslogik auf Wissenschaftspsychologie reduziert werde; Kuhn hat später seinen Gedanken zurückgenommen, die *community* sei ein Individuum im Großformat, dessen Übergang zu einem neuen Paradigma sich wie ein Gestaltsprung vollziehe.

Eine mathematische *community* wird zusammengehalten durch ein Paradigma (eine Sammlung von Begriffen, Sätzen, Beweismethoden, weiter von offenen Fragen, Beispielen etc.); sie entwickelt einen spezifischen *common sense* auf technischer Ebene. Wenn man etwa sagt "Kategorientheorie", so ist damit ein Zweig der Mathematik gemeint, und das heißt zugleich auch eine entsprechende *community*, die sich über die gemeinsamen Forschungsinteressen in der Theorie definiert, die "Kategorientheoretiker". Dabei mögen die Grenzen der *community* fließend sein, und es mag auch sein, daß die allermeisten Forscher ebensosehr anderen *communities* wie "Homologietheoretiker", "algebraische Topologen bzw. Geometer", "Logiker" etc. angehören, ja es mag sogar sein, daß es gar nicht möglich oder sinnvoll ist, *nur* Kategorientheoretiker zu sein.

Diese Aufzählung soll nicht suggerieren, letztlich sei *community* synonym zu "Fachdisziplin". Man könnte *community* von Disziplin unterscheiden und im zweiten Fall an den Stoff, im ersten an die Akteure und ihre Kommunikationsmittel denken.

B) Wie stellt man die Ausprägung einer *community* fest? Es genügt nicht, nur veröffentlichte Texte heranzuziehen. Ergebnisse und Methoden waren den *jeweiligen Experten* lange vor dem Erscheinen der jeweiligen Arbeiten bekannt, über Treffen, Briefe, Gespräche, Vorträge, Erzählungen, Vorabdrucke. Solche Phänomene sind Kennzeichen von *communities*; in unserem Zusammenhang begegnen sie uns z.B. an folgenden Stellen:

- Beispiele für das briefliche Kommunizieren der Mitglieder einer *community* untereinander sind die Grothendieck-Serre-Korrespondenz (3.3.1.1) und Eilenbergs Korrespondenz.

- Daß die Mitglieder der *community* den Inhalt von Werken anderer Mitglieder oft schon kennen, bevor diese Werke veröffentlicht sind, begegnet uns bei Eilenberg-Mac Lane, die das Buch [Lefschetz 1942] im Manuskript gelesen [1942a, 760] haben; ebenso hatte Mac Lane das Manuskript von [Eilenberg und Steenrod 1952] zur Verfügung (vgl. [1950, 494]).

- Schlüsselarbeiten bekommen griffige Kurztitel; z.B. ist in [Borel und Serre 1958] von "FAC, GAGA, Tohoku" die Rede.

- Mitglieder der *community* steuern Vorworte oder Anhänge zu Werken anderer Mitglieder bei, z.B. Eilenberg-Mac Lane zu [Lefschetz 1942] oder Steenrod zu [Cartan und Eilenberg 1956] (vgl. Anm.159).

Eine selbständige Disziplin ist entstanden, wenn ein Bücherkanon oder Standardbezeichnungen vorliegen.

C) *mainstream*-Mathematik An verschiedenen Stellen der Arbeit, insbesondere im Kapitel 7, werden wir uns mit einem speziellen *community*-Konflikt beschäftigen, nämlich der Auseinandersetzung über Grundlagenfragen zwischen den Angehörigen der Fachdisziplin Mengenlehre und den "übrigen" Mathematikern. Ich fasse die Mengenlehre (wie auch die mathematische Logik) als vollgültige mathematische Teildisziplin auf aufgrund der Natur der von ihr bearbeiteten Fragestellungen und der von ihr verwendeten Methoden; die Skepsis bzw. das Desinteresse, mit der viele Vertreter der "klassischen" mathematischen Teildisziplinen auf diese Felder blicken, veranlaßt mich, Mengenlehre und mathematische Logik einer *mainstream*-Mathematik gegenüberzustellen, zu der insbesondere die Arbeitsfelder Grothendiecks gehören. Diese Terminologie ist nicht neu; sie findet sich (sinngemäß) zum Beispiel in Churchs *Laudatio* auf Cohen anläßlich der Fields-Medal-Verleihung an letzteren beim ICM Moskau 1966.

Résumé détaillé en français

L'intention du présent résumé est d'offrir au lecteur un accès moins laborieux au contenu du texte principal de la présente thèse[25]. Le résumé procède section par section et doit être considéré comme une table de matières commentée. Dans chaque cas, les résultats et affirmations principaux de la section correspondante sont présentés, mais, pour la grande majorité, non pas les preuves ou supports correspondants qui sont élaborés dans le texte principal (en langage bourbachique, il s'agit ici d'un “fascicule de résultats”). Ceci est vrai en particulier des références bibliographiques qui ne sont pas répétées ici ; j'espère que pour leur valorisation, le fait qu'elles soient intégrées dans le texte allemand plutôt que dans le résumé français ne posera pas de problème au lecteur francophone. Dans les cas où l'absence de mention de l'auteur d'une contribution à la littérature secondaire pourrait donner l'impression que le résultat discuté est le mien plutôt que le sien, je mets juste le nom de l'auteur concerné.

Le sujet du présent travail est tout d'abord l'histoire de la théorie des catégories (TC) ; ici, l'attention n'est pas limitée aux contributions mathématiques de la théorie, car aux différents niveaux d'activité autour de la TC, il s'est manifesté la thématisation de ses implications épistémologiques. Je vois là un trait caractéristique de la théorie qui a joué un rôle important pour son développement. La contribution du présent travail sera donc en partie historique, en partie philosophique.
La décision d'essayer un tel travail au moment actuel pourrait être mise en question du fait que les événements en question sont relativement récents et n'ont pas encore montré leur portée en totalité ; je réponds que le débat philosophique n'a pas à attendre la consolidation totale d'une discipline, mais tout au contraire est susceptible d'y contribuer.

La littérature historique existante est écrite en grande partie par des protagonistes des événements et s'intéresse plus aux détails techniques et anecdotes qu'à l'application conséquente d'une méthodologie d'historien professionnel. De ce fait, il faut tenir compte de cette littérature, mais il faut également la considérer d'un oeil critique. Ceci me semble également vrai du travail le plus important ne provenant pas d'un protagoniste, à savoir le livre de Leo Corry sur l'histoire des structures algébriques. Corry entreprend évidemment un débat méthodologique plus profond, mais j'ai quand-même l'impression que son interprétation de la TC dans la seule perspective du concept de structure laisse ouvertes des questions importantes (surtout concernant les implications épistémologiques). En particulier, je ne crois pas que l'intérêt de la TC est uniquement dans une approche de la notion de structure. Leo Corry l'a vu de cette manière en montrant qu'historiquement elle fut un plus grand succès que la tentative de Bourbaki lui-même. Mais à mon avis, les modèles non-standard (5.3.3.2) furent aussi (sinon plus) importants pour le succès de la théorie.

[25] auquel je réfère ci-dessous simplement comme “texte principal”.

0.1.2 *Die thematische Gliederung der Arbeit* xxiii

Dans cette section, je donne une courte description du contenu des différents chapitres ; il n'y a pas de nécessité de reprendre une telle description dans le présent résumé (ce dernier étant une description plus détaillée de ce contenu).

0.1.3 *Die Grenzen der Arbeit* xxv

L'histoire de la TC étant complexe et ramifiée, on ne peut pas la présenter de manière exhaustive même dans une thèse. J'ai donc étudié en détail certaines parties de cette histoire et traité d'autres de manière assez superficielle. La portée de mon travail est donc limitée en ce sens que des questions non traitées semblent néanmoins mériter une étude dans le contexte présent. Les lacunes sont dues aux contraintes de temps usuelles dans la préparation d'une thèse et à la maxime de se concentrer à l'élaboration en profondeur d'un argumentaire pour les thèses principales du travail.

0.2 *Quellen und Zeugnisse* xxvii

Description des sources et témoignages non publiés sur lesquelles je m'appuie.

0.2.1 *Bourbaki* xxvii

Le travail du groupe Bourbaki dans les années 50 est documenté de manière assez complète dans les collections des Archives Jean Delsarte à l'Institut Élie Cartan (Université Henri Poincaré, Nancy) et aux Archives de la Création Mathématique (ACM) du CNRS (Villejuif). Je reproduis dans cette thèse les parties des documents qui témoignent de la vive discussion au sein de Bourbaki sur l'intégration de la TC dans leur œuvre. Je suis reconnaissant de la permission pour cette reproduction accordée par le conseil scientifique des ACM.

0.2.2 *Der Eilenberg-Nachlaß* xxix

J'ai eu la grande chance de trouver une partie importante des papiers scientifiques de Samuel Eilenberg à Columbia University, New York City. Ces matériaux attendaient d'être découverts depuis son décès en 1998, ce qui a été rendu possible lorsque j'ai adressé une demande aux archives de cette université. J'ai pu consulter cette collection en juin 2001 ; le résultat principal de l'évaluation est le suivant : cette collection formant une source absolument remarquable pour l'histoire des mathématiques du 20e siècle (couvrant entre autres plusieurs centaines de lettres scientifiques datant d'avant la deuxième guerre mondiale), les différentes activités d'Eilenberg dans la TC y sont — pour des raisons que j'ignore — relativement peu présentes. Il n'y a presque pas de documents issus de sa vaste collaboration avec Saunders Mac Lane, et il en est de même pour sa participation à Bourbaki et pour la préparation du livre qu'il a coécrit avec Henri Cartan (bien que ce dernier mentionne une correspondance à ce sujet). La localisation de ces documents (qui par ailleurs doivent exister) reste donc incertaine. En revanche, sont présents à New York la vaste correspondance d'Eilenberg avec ses élèves scientifiques ainsi que le manuscrit d'un livre inachevé mais très avancé (qui mériterait d'être édité) ; documents qui permettent de reconstituer de manière assez complète les vues du vieux Eilenberg sur la TC. Les matériaux présentent également une base idéale pour une biographie scientifique d'Eilenberg — projet seulement réalisable dans une recherche ultérieure.

0.2.3 *Gespräche mit Zeitzeugen* xxiix

Des entretiens avec des témoins de l'époque en question étaient indispensables. Au cours des années de la préparation du présent travail, j'ai rencontré les anciens membres de Bourbaki, Pierre Cartier et Jacques Dixmier ; Andrée Ehresmann, veuve de Charles Ehresmann qui avait créé un développement de la théorie, indépendamment de Bourbaki et Grothendieck, mais très original en soi ; l'élève d'Ehresmann, Jean Bénabou à qui je dois beaucoup pour l'interprétation philosophique des problèmes ensemblistes ; enfin William Lawvere qui est l'élève principal de Eilenberg et qui a proposé de remplacer les fondements de mathématiques ensemblistes par des fondements catégoriels.

Ici, quelques particularités de la méthodologie historique du travail sont explicitées ; la procédure analogue pour la méthodologie philosophique se fera dans le chapitre 1.

Les méthodes du travail sont d'une part historiques (étudier les origines et le développement des concepts de la théorie, décrire leur interaction et reconstruire l'émergence de l'idée d'y chercher une contribution au débat sur les fondements), d'autre part philosophiques (dans les différentes contributions au débat, analyser et critiquer les positions philosophiques implicites ou explicites sous-jacentes aux affirmations respectives ; intégrer les résultats dans le débat actuel sur le concept de fondement des mathématiques). Le fait de n'avoir pas opté pour une seule des deux méthodologies est dû à la nature de la thématique étudiée mais pourrait être contesté par rapport à un idéal de "pureté de méthode" certainement justifié dans la plupart des démarches scientifiques. Je maintiens tout de même qu'on adoptant une position pragmatique dans la partie philosophique de l'argumentaire, on n'est pas seulement en mesure de réconcilier les deux méthodes, mais on est même obligé de les utiliser simultanément. La décision d'adopter une telle position s'appuie d'ailleurs sur les résultats particuliers du débat étudié.

La règle générale de toute étude historique est évidemment que les faits observés dans une situation historique devraient déterminer leur interprétation, et non pas l'inverse. En même temps, on ne peut probablement pas éviter de faire un choix de faits "pertinents" parmi tous les faits observés, et si on ne veut pas entrer dans un cercle vicieux, ce choix aura besoin de critères autres que le support donné à l'interprétation proposée. J'essaie d'y aboutir en "découpant" le corps amorphe de faits sous différents points de vue. (Un tel problème de critère intervient aussi dans le parcours des chercheurs aboutissant à une théorie mathématique ; ce sera une observation centrale dans ma discussion des outils philosophiques ; 1.1.3)

Je n'ai pas l'impression que la comparaison du développement de la TC et du développement d'autres théories mathématiques comme la théorie des groupes soit une méthodologie suffisante.

Face aux différentes discussions à analyser, on doit évidemment s'intéresser à la notion de *scientific community*, comme dans la majorité des cas, le débat s'est déroulé entre deux *communities* différents.

Je réfère brièvement la notion même de *scientific community*

Je mentionne quelques traits qui devraient permettre d'identifier une *community*.

Par "mathématique mainstream", j'entends les mathématiques sans les disciplines qui touchent aux bornes de la philosophie ou l'informatique (comme la logique mathématique, la théorie des ensembles).

Le but du chapitre 1 est de mettre en évidence les questions épistémologiques soulevées par la TC et de développer une position pragmatique qui semble adaptée à la résolution de ces questions. La justification des affirmations faites (i.e. que ces questions se posent en fait et que la position pragmatique est bien une voie de solution) se fera évidemment au cours des chapitres qui suivent ; le chapitre 1 sert surtout à fixer un vocabulaire et un point de vue qui interviennent couramment dans les interprétations qui suivent.

Préliminaires méthodologiques et terminologiques.

Pour chaque usage qu'on fait d'un concept, on peut distinguer si on l'utilise en tant qu'objet ou en tant qu'outil. Cette possibilité de changement de perspective est à la base de l'idée d'une hiérarchie conceptuelle d'activité mathématique.
Dans l'activité des mathématiciens, je distingue entre la solution même d'un problème donné (éventuellement par de longs calculs) et la clarification des concepts en vue d'une solution plus claire. Un plan conceptuel originalement introduit en vue d'une telle clarification peut évidemment de son tour donner lieu à des problèmes difficiles, exigeant pour leur solution un plan conceptuel encore plus élevé ; ainsi, les problèmes originaux peuvent disparaître de la pratique d'une communauté scientifique en faveur des problèmes nouveaux.

Je rappele ici la distinction entre des concepts admettant une explication formelle (Carnap) et des concepts dont l'usage est seulement accessible aux interlocuteurs d'un langage qui ont appris ce que Wittgenstein appelle le "jeu de langage" en question (c'est-à-dire l'admissibilité d'un usage particulier n'est pas contrôlable par l'application d'un critère formel, algorithmique, mais sera uniquement jugé en vue de ce qu'on a appris concernant l'usage "raisonnable" du concept). Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cette distinction a lieu dans l'analyse du discours mathématique ; un usage est jugé correct mais non raisonnable quand on attribue un caractère "pathologique" à une instance du concept en question.

La question intéressante est donc la suivante : comment est-ce qu'on apprend à ne faire qu'un usage "raisonnable" d'un concept ? Réponse simpliste : on l'apprend par les exemples "standard" du concept ; pour une réponse plus précise, je renvoie à tout ce qui suit pour le cas des catégories.

Qu'est ce qu'une théorie mathématique ?
– Usage naïf du terme : Collection de résultats et méthodes autour d'une notion/un concept. (théorie des nombres, des groupes, des nœuds, des jeux, ...)
– logique mathématique/théorie de la démonstration : la totalité des énoncés qu'on peut déduire de certains axiomes (cette totalité intervient avec le problème de la consistance).

Problème : Quels énoncés sont *intéressants* ? Quels sont les critères pour faire un tel choix ? Il va de soi que pour aborder cette tâche, on est obligé d'analyser le rôle des concepts introduits dans les contextes d'application où ils sont introduits. D'autre part, il faut aussi étudier les concepts de la théorie isolément, car ce n'est que leur séparabilité des applications originales qui entraîne leur applicabilité dans de nombreux contextes. La réponse au problème des critères pour choisir des énoncés intéressants — "ceux qui apportent quelque chose à l'étude d'autres problèmes" — ne peut donc satisfaire que partiellement.

Selon Poincaré, c'est la tâche du philosophe de comprendre les choix qui ont été faits (donc, dans notre terminologie, de répondre au problème des critères).
On peut renvoyer ici à la distinction entre contexte de découverte et contexte de justification, distinction abondamment employée en philosophie des sciences. L'approche traditionnelle dans les fondements des mathématiques (qui accentue le contexte de justification) ne donne pas de réponse au problème des critères. Mais ce sont justement les réponses à ce problème qui constituent les faits historiques auxquels sont confrontés les historiens.

Une forme que peut prendre la philosophie des mathématiques est d'en chercher les "fondements" ; je décris différents sens qu'a pris cette expression dans la tradition, et plus loin, j'en présente un nouveau.

On peut (et doit) distinguer deux types de fondements pour les mathématiques : les fondements de type mathématique consistent simplement dans la donnée d'une base pour la déduction (style fondements de la géométrie de Hilbert) ; avec des fondements de type philosophique, on essaye de comprendre les choix faits, c'est-à-dire on ne s'arrête pas au niveau déductif, mais on aborde aussi l'analyse du plan conceptuel permettant la déduction.

La méthode axiomatique était originalement (au début du 20ème siècle) fermement liée à la recherche de fondements ; aujourd'hui, elle est plutôt une méthode d'un certain nombre de disciplines de recherche mathématique, sans directement relever d'une problématique philosophique.

Parmi les mathématiciens qui représentent le mainstream mathématique, on rencontre souvent l'opinion selon laquelle la recherche de fondements n'a pas d'intérêt ; ceci ne veut pas dire dans tous les cas que les questions traitées par une telle recherche sont hors intérêt, mais plutôt que les méthodes appliquées et les réponses données par les philosophes jusqu'à présent n'étaient pas satisfaisantes — d'où la nécessité de réagir à ces critiques et de proposer d'autres approches philosophiques.

Chez Wittgenstein, on peut trouver des passages où il compare les bases conceptuelles plutôt à un lit de fleuve qu'à un fondement de maison, donc à une chose dynamique ; cette idée apparaît aussi dans le débat sur le rôle fondamental des catégories pour les mathématiques.

Christian Thiel a fait quelques propositions comment changer la notion de fondement pour mieux répondre aux tâches qu'un tel fondement devrait pouvoir accomplir. Je m'appuie sur ses propositions dans ce sens que je développe une proposition différant mais inspirée de la sienne.

Thiel distingue le contenu d'un fondement de l'activité fondationelle ; par recherche fondationelle, il entend la distinction d'une discipline fondamentale parmi les disciplines mathématiques.

Au lieu de voir dans les ensembles les objets ontologiquement primaires des mathématiques, Thiel voit dans les opérations de la théorie des ensembles des opérations fondamentales en mathématique, et il cherche à donner un “canon” de telles opérations en vue d'une discipline fondamentale. Mais il s'éloigne de la pratique mathématique, car ses opérations restent dans un cadre constructif.

Le mot “intuition” prend différents sens dans les différents énoncés qui sont analysés dans le présent travail.

Esquisse d'une épistémologie pragmatique.

Voilà ce que j'entends par épistémologie à caractère pragmatique : une position philosophique qui soutient que l'on ne peut pas parler de l'existence d'objets scientifiques indépendamment des méthodes utilisées. Donc il n'y a pas de connaissance indépendamment des moyens de connaissance. Ainsi, l'ontologie disparaît en faveur de l'épistémologie car on ne peut pas parler (ou on ne le peut le faire que d'un point de vue métaphysique) d'objets indépendamment de leur construction.
Peirce donne un argument contre le réductionnisme ; il s'intéresse d'une certaine manière à des constantes de la cognition ; ici, on se préoccupe plutôt à des instances historiques du phénomène : Le caractère intuitif d'un énoncé peut changer avec le temps (par apprentissage, clarification des concepts)

Dans la perspective pragmatique, l'approche traditionnelle qui voit dans l'intuition une capacité particulière amenant à une connaissance (p.e. Descartes : intuition innée) ne tient plus ; selon Heinzmann, le pragmatisme doit plutôt y voir une façon particulière d'utiliser un langage (un usage intuitif est un usage dont la validité n'est pas mise en question) ; ainsi, contrairement à ce qui était le cas pour l'ancien concept d'intuition, le caractère intuitif d'un énoncé dépend de la situation dans laquelle celui-ci est énoncé. Mais la mise en question de la validité dépend du contexte et des connaissances (d'expert). On peut remplacer dans cette définition “énoncé” par “concept” ; là, on ne s'intéresse plus à la validité, mais à l'admissibilité de l'usage d'un concept. Dans un système de langage, il y a habituellement des critères pour cette admissibilité, c'est-à-dire des critères d'usage correct du concept en question (un “sens commun”). Utiliser un concept de manière intuitive, ça revient donc à ne pas mettre en question l'admissibilité de l'usage en question, de considérer les critères d'usage correct du concept (et le fait qu'ils soient satisfaits dans l'usage qu'on envisage) comme clairs.
Dans une épistémologie réductionniste, la validité est réduite à la validité des énoncés de base (régression), donc l'intuition n'intervient qu'au dernier niveau. Dans une épistémologie pragmatique, l'intuition intervient à chaque niveau car les critères d'usage sont mis en question sur un niveau et non pas sur un autre (c'est exactement la différence entre l'usage comme objet et l'usage comme outil).

Le principe que la connaissance se comprend en examinant son mode d'acquisition entraîne la non-séparation des capacités de fonder la connaissance d'une part et de guider la connaissance (c'est-à-dire son acquisition) d'autre part ; cette vue est opposée à Hans Reichenbach avec sa distinction entre *erkenntnisleitend* et *erkenntnisbegründend*, respectivement entre contexte de découverte et contexte de justification.

1.3.4 ***Der pragmatische Ansatz im Kontext der Formalismusdebatte*** 29

Le goût des protagonistes de la TC pour des présentations formelles/axiomatiques dans leurs exposés semble contredire le point de vue pragmatique qui met l'accent plutôt sur l'apprentissage d'un langage par les jeux de langage (débat Oxford/Cambridge). Mais le formel a en fait une fonction communicative en TC, tandis que l'expert dispose des intentions par son "sens commun" technique.

1.4 ***Wider die reduktionistische Erkenntnistheorie*** 31

Cette section rassemble quelques alternatives au réductionnisme.

1.4.1 ***Thiels Vorschlag zur Abkehr vom Reduktionismus*** 31

Thiel propose de remplacer les objets de base par un arsenal (un "canon") d'opérations de base. Ainsi, sa perspective reste en principe réductionniste (bien que "pragmatique" dans le sens où il s'intéresse aux opérations).

1.4.2 ***Eine pragmatische Reduktionismuskritik*** 32

La philosophie des mathématiques classique est une épistémologie à caractère modèle : la validité des énoncés mathématiques est établie en réduisant les énoncés à un certain nombre d'axiomes de base (la théorie des ensembles, p.e.) ; l'intuition intervient soit dans l'accès au contenu des axiomes (Frege), soit dans les méthodes de démonstration de non-contradiction (Hilbert), soit dans l'absence actuelle de contradiction (Bourbaki). Si on accepte l'existence dont parle la théorie des ensembles, elle *fournit* l'existence des objets mathématiques ainsi réductibles à elle ; c'est donc une ontologie.
L'approche réductionniste cherche à comprendre une démonstration en la découpant en des pas élémentaires, en remplaçant des propositions sur des objets complexes par des propositions sur des objets plus simples. Avec une telle approche, les *propositions* elles-mêmes deviennent plus complexes : il devient peut-être plus facile de saisir la *vérité* des propositions (par la vérité des composants et le principe de compositionalité), mais il devient plus difficile de saisir la *signification* des propositions. Le même constat peut être fait concernant les déductions en remplaçant "vérité" par "correctitude" et "signification" par "stratégie" ou "idée clé". Donc, l'approche ontologique n'explique pas.
L'observation pragmatiste selon laquelle le caractère intuitif d'un énoncé dépend de la situation donne la possibilité de justifier des objets par rapport à un sens commun de niveau technique. Les objets du niveau ultérieur ne sont pas des simples abstractions des objets originaux, mais ce sont les théories mêmes de ces objets originaux.

1.4.3 ***Wittgensteins Reduktionismuskritik*** 35

La critique de Wittgenstein au "calcul des tirés" de Russell, selon laquelle ce n'est pas la démonstration formelle qui entraîne notre croyance dans la démonstration intuitive (mais l'inverse), nous invite à interroger quelle connaissance on pourrait tirer en réduisant une partie des mathématiques au langage et aux axiomes de la théorie des ensembles.

I ***Entwicklung der KT in Anwendungskontexten*** 39

Dans cette première partie du travail, je présente l'histoire de la TC en tant qu'intervenant comme théorie mathématique dans de différents contextes. La méthode sera la plupart du temps historique, mais je n'hésiterai pas à noter déjà en passant certaines conséquences pour l'interprétation philosophique.

2 ***Algebraische Topologie*** 41

Un événement important pour l'introduction de la TC en topologie algébrique fut l'introduction du concept de groupe d'homologie. Chez Poincaré, l'homologie n'était étudiée que sous la forme des invariants numériques (nombres de Betti) et des matrices d'incidence. En même temps, Poincaré parlait dès le début du groupe fondamental ; ceci est peut-être dû au concept de groupe dont il se servait à l'époque et qui était toujours un concept de groupe de transformations ; voir [Volkert 2002]. Il y avait deux voies vers la notion de *groupe* d'homologie :

- l'étude des fonctions continues (et non plus seulement des espaces) par des moyens combinatoires ; dans cette situation, on a besoin d'objets qui ne sont pas seulement des invariants des espaces mais qui admettent des relations entre eux correspondant aux fonctions entre les espaces ;
- la tentative de Vietoris d'étendre le concept d'homologie aux espaces arbitraires ; dans cette situation, les invariants numériques n'ont plus de signification (on obtient des groupes de rang infini).

L'étude des propriétés topologiques des fonctions continues commence avec le travail de Brouwer 1912. L'impulsion pour se servir du langage des groupes est due à Emmy Noether qui l'avait conseillée à Hopf et Alexandroff.

L'observation que les classes d'homologie forment un groupe fut faite dans des travaux antérieurs à Hopf et Alexandroff, mais sans conséquences importantes (je parle d'"instances non résistantes" d'un concept car on n'avait pas nécessairement besoin du concept dans ce qu'on voulait faire). Par contre, Vietoris semble s'être servi de l'idée de manière substantielle et indépendamment de Hopf ; voir 2.2.1.

Les travaux de Hopf des années 20 et 30 sont en grande partie consacrés à l'étude de la topologie de fonctions par des moyens homologiques.

Dans [1928], Hopf donne une nouvelle démonstration de la formule de Lefschetz pour les points fixes ; contrairement à la démonstration originale, la sienne utilise le concept de groupe d'homologie, ce qui simplifie considérablement l'argumentaire. Hopf propose de rassembler les propriétés des homomorphismes induits sous le titre d'"algèbre des applications" (en contraste avec "topologie des applications").

Parmi les types de fonction continue traités par Hopf [1933, 1935, 1931], figurent notamment des fonctions définies sur des sphères ou encore allant dans des sphères. P.e., il s'intéresse à déterminer les classes d'homotopie d'applications $K^n \to S^n$ (où K^n signifie un polyèdre à n dimensions). Sa solution de ce problème utilise la notion de groupe d'homologie (et l'idée de changement de coefficients).

La solution de Hopf de ce problème reste laborieuse ; elle sera simplifiée par l'application du concept de cohomologie. Cet approfondissement du plan conceptuel permet également de simplifier et de généraliser l'énoncé des théorèmes de dualité ; les groupes de cohomologie ont des propriétés algébriques "plus agréables" que les groupes d'homologie.

L'idée de regarder des homomorphismes non-surjectifs (idée courante dans la topologie algébrique des années 30) était une innovation par rapport à l'usage en algèbre ; [van der Waerden 1931] vs. [Seifert und Threlfall 1934] ou [Pontrjagin 1931]. (Selon Mac Lane, l'impulsion vint exclusivement de la topologie ; mais Pontrjagin cite van der Waerden, et Emmy Noether avait influencé Hopf et Pontrjagin.)

L'idée de symboliser une fonction par une flèche semble être issue de la topologie algébrique de l'époque ; je retrace quelques instances de ce symbolisme non encore traitées dans la littérature qui montrent que l'histoire de celui-ci est assez complexe.

L'effort d'introduire une théorie d'homologie pour des espaces quelconques (n'ayant pas les propriétés des polyèdres) conduit d'abord à l'accentuation du concept de groupe d'homologie et, dans une deuxième étape, à la clarification des concepts de limite inductive ou projective (qui ont été à leur tour important pour le développement de la TC).

Vietoris construit les cycles de son espace en analogie à l'opération de compléter un espace métrique, une relation "ϵ-homologue" jouant le rôle de la métrique. La terminologie de "suite fondamentale" (c'est-à-dire suite de Cauchy) est maintenue.

Pour sa définition des Groupes de Betti d'un ensemble fermé quelconque, Pontrjagin [1931] s'appuie sur la méthode d'Alexandroff des spectres de projection pour l'approximation des ensembles fermés quelconques par des complexes simpliciaux de plus en plus fins, liés par applications simpliciales. Pontrjagin lie pour la première fois cette méthode d'Alexandroff aux groupes d'homologie. Du coup, chaque complexe a son groupe de Betti ; les applications simpliciales induisent des homomorphismes — d'où une suite inverse de groupes.

Le but de Pontrjagin était d'étendre la dualité de Poincaré (le $r$ième et le $n-r$ième nombre de Betti sont égaux pour une variété orientée à n dimensions) aux ensembles fermés quelconques dans $\mathbb{R}^n$.

Pontrjagin définit le groupe limite (inductive) ainsi : pour une suite de groupes G_i et d'homomorphismes ϕ_i de G_i à G_{i+1}, les éléments du groupe limite sont obtenus à partir des suites d'éléments x_i des G_i tel que $\phi_i(x_i) = x_{i+1}$; sur ces suites (qu'il appelle "suites fondamentales", peut-être en réminiscence de Vietoris), on a une certaine relation d'équivalence, et les éléments du groupe à définir seront les classes d'équivalence de cette relation.
Vu que les groupes de Betti correspondants au spectre de projection forment une suite inverse de groupes, Pontrjagin avait en principe besoin de définir plutôt la notion de limite projective, mais il ne se sentait pas autorisé à le faire (il le dit explicitement). Il reste à en trouver les raisons. Pontrjagin utilisa un autre procédé ("paires de groupes").

En théorie de Čech, la limite est prise sur l'ensemble filtrant de tous les ouverts de l'espace.

Pontrjagin se bornait aux suites (indices : nombres entiers) au lieu des systèmes (indices : ensemble filtrant) ce qui n'est plus possible avec la théorie de Čech car les ouverts n'admettent qu'un ordre partiel.

Le procédé artificiel de Pontrjagin est remplacé par l'introduction du concept de limite projective par Weil, Lefschetz (et déjà d'autres auteurs que Weil mentionne).

Leur définition est celle d'un certain sous-groupe du produit direct des groupes du système comprenant seulement les éléments $\{x_n\}$ avec $\phi_n^m(x_m) = x_n$ pour $n < m$. On a besoin du concept de produit direct d'une infinité de groupes — dont apparemment Pontrjagin ne disposait pas. Ceci amène à un nouveau procédé pour la limite inductive : c'est un certain sous-groupe de la somme directe. Cette nouvelle définition est équivalente à celle de Pontrjagin (voir [Eilenberg und Steenrod 1952, 222]). Il serait intéressant de connaître l'histoire des concepts de produit et somme directe, en particulier de savoir pourquoi Pontrjagin ne s'en servait pas.

2.2.3.3 *Die Existenzbedingung von Limeshomomorphismen* 60

Selon le paradigme de l'étude des fonctions continues, on devrait pouvoir trouver des sources qui montrent que la question des critères pour homomorphismes entre les limites était traitée en vue d'une telle étude. Mais la situation d'Eilenberg-Mac Lane à l'occasion de laquelle ils évoquent ces critères était plus restreinte (voir ci-dessus).

2.2.4 *Exkurs : Limesgruppenbegriffe in Kontexten, die für die Entwicklung der KT nicht einschlägig waren* 62

Weil mentionne d'autres applications (dans d'autres contextes) du concept de limites. Le travail de Herbrand se situe dans le contexte de la théorie de Galois ; Weil s'appuie, dans sa théorie d'intégration sur les groupes topologiques, sur le travail de Pontrjagin concernant la dualité des groupes compacts. Curieusement, Pontrjagin se sert ici de la notion de limite projective sans commentaire.

2.3 *Group extensions and homology* 63

La TC fut introduite dans le contexte de l'application du concept d'extension de groupe à un problème en théorie d'homologie (liée au changement de coefficients).

Vorbemerkung zur Notation. 63

Par rapport aux notations originales d'Eilenberg et Mac Lane, la pratique actuelle est déviante ; ce changement de notation s'explique par une meilleure compréhension des concepts qui s'est manifestée entre-temps. Voir 2.3.1.3.

2.3.1 *Die Vorarbeiten Eilenbergs und Mac Lanes* 63

2.3.1.1 *Eilenberg : Die Homologie des Solenoids* 63

Eilenberg s'est intéressé à des problèmes concernant le calcul de groupes d'homologie de certains espaces topologiques, les "solénoïdes". Avant son travail avec Mac Lane, ce calcul ne se faisait qu'en utilisant des chaînes infinies.

2.3.1.2 *Mac Lane : Gruppenerweiterungen und Klassenkörpertheorie* 64

Mac Lane s'intéressait à la notion d'extension d'un groupe par un autre dans le contexte de la théorie algébrique des nombres. Il avait calculé le groupe abélien $\mathrm{Ext}(G, H)$ de toutes les extensions E d'un groupe abélien G par un autre groupe abélien H (c'est-à-dire $G \subset E$ et $H = E/G$) pour certains choix de G et H.

2.3.1.3 *Exkurs : Historische Beobachtungen zur Reihenfolge der Argumente des Funktors* Ext 64

Le changement de notation le plus remarquable est celui dans l'ordre des arguments du foncteur Ext. Tandis que l'ordre utilisé par Eilenberg-Mac Lane est intuitif par rapport à l'intention de l'extension d'un groupe par un autre, l'ordre devenu usuel est justifié par l'observation que Ext est le foncteur dérivé de Hom.

2.3.2 *Das Zusammentreffen* 65

Quand Mac Lane donna une conférence sur son travail, Eilenberg remarqua qu'un des Ext calculé par Mac Lane est isomorphe au groupe d'homologie du solénoïde.

Selon Mac Lane, on cherchait à exprimer la cohomologie à l'aide de l'homologie ce qui a dû conduire au problème des "coefficients universaux". Mais cette reconstruction rationnelle est difficile à maintenir. L'idée originale implicite dans les travaux de Hopf était d'exprimer les groupes calculés par rapport à un système de coefficients à l'aide de groupes calculés par rapport à d'autres systèmes. Les théorèmes de coefficients universaux qu'Eilenberg et Mac Lane démontrent n'expriment pas la cohomologie à l'aide de l'homologie, mais inversement ; en plus, l'apport principal de ces théorèmes est que dans ces expressions, l'homologie est calculée par rapport à des chaînes infinies, tandis que la cohomologie est calculée par rapport à des chaînes finies.

Pour transférer les théorèmes du cas des complexes au cas d'espaces généraux, Eilenberg-Mac Lane se servent de la théorie de Čech. À plusieurs reprises, se pose le problème de déterminer si le critère pour qu'il y ait un homomorphisme entre les limites est valable, c'est-à-dire si l'homomorphisme est "naturel". Eilenberg-Mac Lane cherchent à donner une définition précise de ce caractère naturel.

Après ce succès, Eilenberg-Mac Lane ont décidé de publier un texte consacré uniquement aux concepts d'homomorphisme naturel, foncteur, et catégorie.

L'écho à ce travail pionnier sur les catégories fut mitigé. On peut montrer qu'Eilenberg-Mac Lane eurent besoin d'être courageux pour soumettre un tel travail uniquement intéressé à la clarification de concepts et non pas à la solution de problèmes.

La tradition veut que l'exemple clé d'un foncteur soit celui d'homologie. Mais dans le travail original d'Eilenberg-Mac Lane, tous les homomorphismes entre limites qui sont étudiés sont des isomorphismes (car leur théorème consiste en la donnée de différentes expressions isomorphes pour un même groupe). C'est pour cela que les premiers textes de EM sur la TC [1942b, 1945] mettent l'accent sur les *équivalences* de foncteurs. Là, la fonctorialité de l'homologie ne les intéresse donc point ; c'est la fonctorialité des foncteurs Ext et Hom qui joue pour le transfert à la limite. La liaison historique de la TC à la fonctorialité de l'homologie n'est qu'indirecte).

Selon Mac Lane, il était courant à l'époque de parler d'homomorphismes "naturels", mais personne en n'avait une définition précise. J'essaye de trouver des sources pour un tel discours informel.

Je présente des textes de Lefschetz, Hurewicz, et Fox, où le terme de transformation naturelle est utilisé ; mais il semble artificiel d'y voir des usages du concept dans le sens d'Eilenberg-Mac Lane.

Le mot "catégorie" était également utilisé en mathématiques avant Eilenberg-Mac Lane ; on peut même trouver un usage assez proche de celui fait par Eilenberg-Mac Lane chez André Weil.

Eilenberg-Mac Lane transforment de nouveau le concept de limite : ils s'aperçoivent qu'on peut regarder un ensemble muni d'un ordre partiel comme une catégorie ; ainsi, les systèmes de groupes et homomorphismes deviennent des foncteurs de cette catégorie à la catégorie des groupes — et forment eux-mêmes une catégorie (de foncteurs) sur laquelle on définit la limite comme foncteur.

Ce procédé intègre le critère d'existence d'homomorphismes entre limites dans la définition même de la limite (les seuls morphismes admis dans la catégorie de base du foncteur limite sont ceux qui remplissent la condition, les "naturels"). Ceci conduisait aussi à l'idée d'introduire le concept de limite dans d'autres catégories que les groupes.

2.5 *Foundations of algebraic topology* 80

Le livre d'Eilenberg et Steenrod mérite d'être étudié ici car il fait un usage considérable de la TC.

2.5.1 *Das Projekt : Axiomatisierung von "homology theories"* 81

Le projet était l'axiomatisation de la notion "théorie d'homologie". Les axiomes devaient remplacer les calculs (parfois difficiles) des groupes d'homologie dans les démonstrations des théorèmes valables pour toutes les théories d'homologie (ou cohomologie) connues. La façon particulière de calculer ces groupes (comme la méthode de Čech, par exemple) n'intervient que dans la démonstration que la théorie d'homologie particulière est en fait une théorie d'homologie selon les axiomes.

2.5.2 *Die Rede von foundations* 83

Le fait qu'Eilenberg-Steenrod parlent ainsi de "fondements" nous invite à rappeler les distinctions faites au chapitre 1 quant à ce terme et à montrer que l'épistémologie à caractère pragmatique (basée sur les transformations d'usage intuitif) peut s'appliquer ici. Les véritables objets du niveau nouveau sont des énoncés sur les objets du niveau antérieur.

2.5.3 *Die Bedeutung der KT für die Unternehmung* 85

La TC intervient de manière essentielle dans l'entreprise d'Eilenberg-Steenrod. Les idées clé sont de regarder les théories d'homologie comme des foncteurs et de délimiter les catégories "admissibles" pour la formation de tels foncteurs. J'analyse quelques passages dans cet esprit.

2.6 *Simpliziale Mengen und adjungierte Funktoren* 88

2.6.1 *complete semisimplicial complexes* 88

Tandis qu'Eilenberg et Steenrod avaient laissé de coté les calculs particuliers en faveur d'un traitement axiomatique de l'homologie, il y avait en même temps intérêt à avoir à sa disposition certains constructions liées à des calculs particuliers ainsi que des exemples où les calculs se font de manière différente. C'est l'origine de la notion de complexe semi-simplicial introduit par Eilenberg et Zilber.

2.6.2 *Kans begriffliche Neuerungen* 90

De ce point de vue plus proche des problèmes de calcul que celui de l'axiomatique de l'homologie, la TC est aussi devenue importante avec les travaux de Kan.

2.6.2.1 *Einige Bemerkungen zur Entstehungsgeschichte von Kans Arbeiten* 90

La littérature existante veut que Kan ait été "découvert" par Eilenberg lors de son séjour en Israël, mais il y a des inconsistances quant aux dates usuellement attribuées à ces événements.

2.6.2.2 *Der Begriff des adjungierten Funktors* 91

Lors de son travail sur les complexes sémi-simpliciaux, Kan introduit le concept du foncteur adjoint — pour la première fois, si on ne compte pas l'introduction implicite par Grothendieck (voir 3.3.4.3). L'intérêt de Kan était de pouvoir faire un "détour" en passant à la limite.

2.6.2.3 *Kans neue Definition von Limit* 91

Kan donne également la définition entièrement générale de limite en remplaçant la catégorie qui correspond à un ensemble muni d'une relation d'ordre partielle par une catégorie quelconque.

2.6.2.4 *Auswirkungen für die Behandlung simplizialer Mengen* 93

Le traitement des complexes simpliciaux montre que les exemples clé de Kan pour le concept de l'adjonction n'étaient pas les exemples à l'aide desquels on introduit normalement le concept dans une perspective d'enseignement.

Le fait que la TC provienne de la topologie algébrique semble contingent ; hypothétiquement, on pourrait l'avoir trouvée ailleurs. Ceci entraîne une question méthodologique : une telle histoire hypothétique a-t-elle un apport pour la recherche historique ? Elle peut nous sensibiliser à la question “quelle est la particularité de la situation originale ?”.
Mais la situation d'origine, est-elle vraiment si contingente ? Je souligne plusieurs traits de cette situation qui la lient fermement à la TC :
– les limites par rapport à des ensembles filtrants quelconques ;
– la transition d'une discipline à une autre ;
– l'importance des flèches (en particulier des flèches non surjectives) ;
– l'idée de la dualité ;
– l'accent sur l'isomorphie d'objets obtenus par des constructions différentes.

Les changements conceptuels énumérés dans le chapitre 2 ont, en dehors de leur but original, conduit au transport de l'outil “homologie” dans d'autres contextes d'application (i.e. algèbre).

La collaboration entre Cartan et Eilenberg a produit le concept de dérivation de foncteurs de modules ; c'est l'idée clé pour une approche systématique à l'ensemble de situations où une théorie d'homologie ou cohomologie pour des objets algébriques (“algèbre homologique”) s'est manifestée.

Je note en passant quelques observations sur l'histoire de la notion de suite exacte, notion fondamentale pour toute forme d'algèbre homologique.

Dans la préface du livre de 1956, Cartan-Eilenberg développent leur stratégie de manière assez claire. Ils partent de trois “exemples” amenant à trois calculs “formellement analogues” ; ils en ont tirés une procédure générale (en langage fonctoriel). Le but est de mesurer à quel degré l'application d'un foncteur donné à une suite exacte altère l'exactitude de cette suite, c'est-à-dire de donner des invariants d'homologie ou cohomologie en fonction non pas des objets en question, mais du foncteur donné. Cette question se pose pour la première fois pour les foncteurs produit : est-ce que l'on peut, dans la situation algébrique, démontrer une proposition analogue à la formule de Künneth (qui, dans le contexte topologique original, met en rapport l'homologie de l'espace produit et les homologies des facteurs) ? Cartan-Eilenberg arrivent à une procédure assez générale qui s'applique non seulement aux foncteurs produit, mais à toute une famille de foncteurs de modules, les foncteurs additifs.
Je cite un témoignage qui lie le retard avec lequel le livre apparaît à une résistance de la part d'André Weil contre l'approche choisi dans ce livre.

Sont présentées deux procédures de la définition des groupes de cohomologie : l'une est itérative (c'est-à-dire, elle suit pas par pas les objets de la “résolution” du module) et aboutit aux foncteurs “satellites” ; l'autre s'applique sur la résolution en entier et donne ainsi les foncteurs “dérivés”. Tandis que la première procédure est plus fidèle à la présentation intuitive dans la préface (où le but est décrit de sorte qu'on cherche à rendre exacte une suite en ajoutant des noyaux/images), la deuxième est celle choisie par les auteurs pour le développement de leur théorie. Donc ici, ce n'est pas le caractère intuitif d'une stratégie qui sert comme critère pour l'adopter, mais sa capacité à donner lieu à des manipulations multiples en vue de l'établissement d'une théorie.

3.1.4 *Die Entwicklung des Verfahrens* 103

Dans leur traitement du problème de déterminer dans quelle mesure un foncteur préserve l'exactitude d'une suite exacte donnée, Cartan et Eilenberg ont tout d'abord remarqué que chaque module A admet des résolutions injectives et projectives (c'est-à-dire composées d'éléments injectifs ou projectifs) ; j'ignore si ce résultat était connu avant [Cartan und Eilenberg 1956]. Ces résolutions sont en particulier des suites exactes, et les groupes d'homologie de l'image d'une telle suite sous l'application du foncteur indiquent dans quelle mesure le foncteur a respecté l'exactitude de la suite. Mais en plus on peut démontrer que ces groupes d'homologie ne dépendent pas de la résolution choisie, mais seulement du module donné. On parle donc des foncteurs dérivés du foncteur donné. Encore plus : On a un isomorphisme naturel entre les valeurs du foncteur dérivé et les groupes d'homologie de l'image d'une suite exacte quelconque (pas nécessairement une résolution de A). Donc les foncteurs dérivés mesurent la capacité du foncteur donné de préserver l'exactitude.

3.1.5 *Buchsbaum 1955* 104

Buchsbaum, doctorant d'Eilenberg, généralise la méthode des foncteurs dérivés.

3.1.5.1 *Der Begriff der exakten Kategorie* 104

On peut caractériser en termes de flèches le noyau d'un homomorphisme (notion originalement caractérisée en termes d'éléments), ce qui permet de parler de résolutions en termes de flèches. On peut ainsi trouver une notion de catégorie "admissible" au processus des foncteurs dérivés : il faut que dans cette catégorie existent certains objets et flèches de sorte que certains diagrammes soient commutatifs. La catégorie des groupes abéliens et la catégorie des modules étant admissibles dans ce sens, Grothendieck a appelé cette sorte de catégories "catégorie abélienne" ; Buchsbaum, le premier qui a fait ce genre de considérations, les appelait "catégories exactes".

3.1.5.2 *Buchsbaums Leistung : Dualität* 105

La contribution principale de Buchsbaum est un principe de dualité selon lequel la catégorie duale d'une catégorie exacte est exacte ; ceci permet de simplifier l'argumentaire de Cartan-Eilenberg et Eilenberg-Steenrod.

3.2 *Entwicklungsschritte des Konzepts Garbe bis 1957* 107

Ce n'est que dans la théorie des faisceaux que la TC a montré sa vraie portée pour des considérations d'algèbre homologique. Pour pouvoir mettre en place des observations historiques et philosophiques, il faut d'abord rappeler les problématiques principales qui se sont présentées en théorie des faisceaux jusqu'à 1955 environ (à savoir autour de la recherche d'une théorie de cohomologie de faisceaux) — ce qui est fait dans cette section ; ce rappel n'est pas censé être pour lui-même une analyse historique de cette "préhistoire". L'idée principale de Grothendieck dans ce domaine était d'exploiter l'analogie formelle entre la théorie de cohomologie de faisceaux et la procédure des foncteurs dérivés de Cartan-Eilenberg.

3.2.1 *Leray : (Prä)Garben als Koeffizientensysteme für algebraische Topologie* 109

Jean Leray avait introduit le concept de faisceau pour étudier des systèmes de coefficients pour la cohomologie d'espaces fibrés ; l'idée clé était de ne pas simplement munir chaque fibre isolément d'un anneau de coefficients, mais de lier globalement les choix locaux en les soumettant à certaines conditions (Houzel).

3.2.1.1 *Lerays Arbeiten von 1946* 109

La définition de faisceau que donne Leray dans ses premiers travaux revient à définir un foncteur de la catégorie des ouverts de l'espace donné dans celle des anneaux.

3.2.1.2 *Zur Wahrnehmung dieser Arbeiten außerhalb Frankreichs* 110

La réception des travaux de Leray en dehors de France fut tardive ; Eilenberg, dans son abstract, ne mentionne pas la coïncidence de la définition de Leray avec la notion de foncteur.

Le Séminaire Cartan à partir de 1948/49 fut consacré à la topologie algébrique. Eilenberg participait activement en 1950/51 ; il cherchait partout à appliquer l'optique de Eilenberg-Steenrod, c'est-à-dire à définir pour les objets en question des théories d'homologie ou cohomologie de manière axiomatique.

Il doit y avoir eu une première tentative de développer la théorie des faisceaux dans ce séminaire en 1948/49 ; les exposés correspondants n'appartiennent plus à l'édition définitive (publiée vers 1956) car le séminaire en 1950/51 a vu un nouveau traitement de ce sujet, influencé par le travail récent de Leray (1950).

La définition de la notion de faisceau en 1950/51 ne se fait plus de la même manière que Leray 1946 (qui l'avait défini implicitement en termes de foncteurs), mais en termes topologiques : un faisceau est un espace topologique fibré (éventuellement avec des fibres munies d'une structure algébrique de manière continue) de sorte que la projection sur l'espace de base soit localement un homéomorphisme (Godement a plus tard baptisé "espaces étalés" les espaces de ce type). C'est difficile à dire quels sont les avantages de cette nouvelle définition qui justifient son introduction à la place de l'autre, car Leray, dans son travail de 1950 (qui a dû entraîner le remplacement des exposés de 1948/49), se servait toujours de la définition implicitement fonctorielle. La relation entre les deux définitions, liées par la construction fondamentale du foncteur Γ de sections, n'est pas entièrement éclaircie au séminaire Cartan.

Le but de Cartan était de définir une théorie de cohomologie pour les faisceaux, s'intéressant surtout au comportement de certains foncteurs de faisceaux (y compris le foncteur Γ) sur une suite exacte de faisceaux. Cartan aboutit à définir cette cohomologie à l'aide de la notion de résolution fine ; sa définition est formellement analogue à la dérivation (par rapport à une résolution fine plutôt qu'injective ou projective) d'un foncteur composé de Γ et un foncteur produit tensoriel.

Le travail de Serre est une tentative d'utiliser les méthodes de la topologie algébrique, surtout la théorie des faisceaux, en géométrie algébrique ; il s'appuie sur le fait qu'on dispose de la topologie de Zariski en géométrie algébrique. La définition de faisceau chez Serre est celle du Séminaire Cartan.

La définition de la cohomologie selon la procédure de Cartan ne marche plus ici, car un faisceau ne peut admettre une résolution fine que si l'espace de base est paracompact (c'est-à-dire séparé, en particulier) ce qui n'est pas vrai pour un espace de Zariski.

Pour contourner les défauts de la topologie de Zariski, Serre se sert du procédé de Čech pour définir les groupes de cohomologie.

Le pas prochain est d'établir une suite exacte longue pour la théorie de cohomologie qui résulte ; ceci est possible pour des faisceaux ayant une propriété supplémentaire ("faisceaux cohérents"), mais Serre doute que l'argument soit valable dans le cas général. De plus, on ne peut pas appliquer les méthodes de Leray 1950 ("suites spectrales") de manière immédiate, car ces méthodes, dans le développement que donne Leray, sont liées à des propriétés de la topologie non valides pour la topologie de Zariski.

3.3 ***Tohoku*** 120

Le travail de Grothendieck apparu en 1957 au Tohoku Journal résout les problèmes énumérés ci-dessus ; ceci a été possible grâce à l'interaction des deux définitions de faisceau en vue de transposer la méthode des foncteurs dérivés en théorie des faisceaux ; cette interaction à son tour est féconde grâce à la mise en œuvre de bon nombre de concepts catégoriels.
Ici, je présente ce travail de manière assez détaillée, en vue de l'étude du rôle de la TC pour les innovations de Grothendieck et en raison de l'impulsion que la TC a reçu pour son propre développement grâce à cette contribution.

3.3.1 ***Die Umstände der Entstehung*** 121

La description de l'article Tohoku commence avec la reconstruction historique de sa genèse à partir de 1955.

3.3.1.1 ***Die Korrespondenz Grothendieck-Serre*** 121

La correspondance entre Serre et Grothendieck, publiée récemment par la SMF, nous permet de suivre de près le processus de rédaction de Grothendieck en échange permanent avec Serre. Comme ces lettres sont naturellement écrites en français, je peux ici renvoyer le lecteur francophone au texte principal pour une orientation sur le contenu des extraits dont je me sers.

3.3.1.2 ***Der Kansas-Aufenthalt*** 125

Grothendieck fut invité au Kansas en 1955 où il eut l'occasion de consacrer beaucoup de temps à la rédaction de son manuscrit ; par ailleurs, c'est grâce à ce séjour que l'on a pour cette période une correspondance écrite avec Serre qui est assez intense et du coup précieuse pour la recherche historique.

3.3.1.3 ***Die Vorbereitung des Manuskripts*** 126

La correspondance Grothendieck-Serre montre clairement que Grothendieck dans son manuscrit original utilisait une terminologie un peu déviante par rapport aux usages ultérieurs. Ce fait a de l'impact pour l'argumentaire historique à différents endroits. De plus, Grothendieck avait originalement prévu le manuscrit comme rédaction Bourbaki, mais a dû décider de le publier hors Bourbaki, probablement en vue des discussions longues à ce sujet.

3.3.2 ***Grothendiecks Rezeption seiner Vorläufer in der homologischen Algebra*** 127

Grothendieck au départ n'avait pas pris connaissance du travail existant dans le domaine de l'algèbre homologique ; Herreman a montré que Grothendieck en général ne s'intéressait pas beaucoup à la lecture de textes mathématiques et plutôt à l'échange avec d'autres mathématiciens.

3.3.2.1 ***Die Homologische Algebra Cartans und Eilenbergs*** 127

Dans le cas du livre de Cartan-Eilenberg, Grothendieck ne pouvait pas l'avoir lu au début de son propre travail, car l'apparition du dit livre était retardée. Mais il avait bien évidemment connaissance des idées principales de ce travail (qu'il voulait exploiter en théorie de faisceaux, justement) — très probablement par la voie d'échange personnelle, par exemple au sein de Bourbaki.

3.3.2.2 ***Der Begriff der abelschen Kategorie und die Rede von classe abélienne*** 127

Grothendieck n'avait pas non plus connaissance du travail de Mac Lane et Buchsbaum sur les catégories abéliennes (voir exactes). Même le texte définitif ne s'appuie pas sur ces travaux, mais est "self-contained" quant au développement de la TC abélienne. Cette attitude de Grothendieck a conduit à un désaccord avec Eilenberg qui, parmi d'autres changements, voulait voir valorisé le travail de son thésard Buchsbaum avant de donner son accord à la publication du texte de Grothendieck dans un journal dont il était responsable ; Grothendieck a préféré changer d'éditeur.

Parmi les terminologies non retenues dans le manuscrit publié, il convient de mentionner celle de “classe abélienne” au lieu de “catégorie abélienne”, probablement choisie en rapport avec le concept de “classe de groupe” de Serre. Quelqu'un (Eilenberg p.e.) a dû suggérer à Grothendieck de changer cette terminologie, mais on retrouve quand-même dans la version publiée de Tohoku des traces de celle-ci qui ont survécu à toutes les lectures d'épreuves. On y voit que Grothendieck n'a pas appris la TC par le texte original d'Eilenberg-Mac Lane, mais l'a “redécouverte” avec Serre.

3.3.3 ***Der Plan von Tohoku*** 129

Pour transférer la procédure des foncteurs dérivés dans un autre contexte d'application, il suffit *grosso modo* de démontrer que dans ce contexte on a affaire à une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets injectifs/projectifs. C'est ce que Grothendieck faisait pour définir — “suivant les lignes supposées de Cartan et Eilenberg” — une théorie de cohomologie pour les faisceaux (qui ne sont pas des objets algébriques qu'on pourrait considérer comme modules).

3.3.3.1 ***Garben als spezielle Funktoren über den offenen Mengen eines topologischen Raumes*** 129

Grothendieck regarde un faisceau comme un foncteur, comme l'avait fait Leray ; plus précisément, il appelle un tel foncteur “préfaisceau” qui devient un faisceau si une certaine condition supplémentaire est remplie. C'est exactement cette condition qui complète l'étude de la relation entre les deux définitions de faisceau au Séminaire Cartan. Grothendieck arrive à une équivalence entre la catégorie des espaces étalés d'une part et la catégorie des faisceaux (dans le sens qu'il donne à ce terme) d'autre part.

3.3.3.2 ***Die Beobachtung, daß Garben eine abelsche Kategorie bilden*** 131

La démonstration que les faisceaux forment une catégorie abélienne est contenue en grande partie dans le Séminaire Cartan ; ce n'est pas encore ici que l'équivalence des deux catégories montre sa portée en totalité.

3.3.3.3 ***Die Konzentration auf injektive Auflösungen*** 132

Dans la procédure de Cartan-Eilenberg, le choix entre résolutions projectives et résolution injectives dépend de la variance et de l'exactitude du foncteur dont on vise la dérivation ; comme un module admet les deux, on peut, dans le développement de la théorie pour les modules, se contenter du cas projectif (qui est plus simple) et réduire le cas de foncteurs avec une autre variance ou exactitude au cas projectif par le moyen de considérations de dualité (Buchsbaum). Du coup, l'intérêt dans les résolutions injectives était marginal avant Grothendieck. Or, Grothendieck doit s'intéresser — au moins a priori — aux résolutions injectives, à cause de l'exactitude et de la variance du foncteur particulier qui l'intéresse (le foncteur Γ des sections). En plus, dans la situation des faisceaux, on n'a plus affaire à cette symétrie agréable comme dans le cas des modules : comme le montre Grothendieck, il y a des faisceaux n'admettant pas de résolution projective ; l'affirmation correspondante pour le cas injectif est vraie, mais a priori on en n'a pas une démonstration (Grothendieck en donne une ; voir ci-dessous). De toute façon, la procédure de Buchsbaum permettant de s'intéresser seulement aux résolutions projectives ne s'applique pas ici.

3.3.3.4 ***Der Nachweis, daß es genügend injektive Garben gibt*** 134

Pour démontrer que les faisceaux admettent toujours une résolution injective, Grothendieck énonce quelques axiomes supplémentaires, et il démontre deux choses :

a) si ces axiomes sont valides dans une catégorie abélienne quelconque, alors les objets de cette catégorie admettent une résolution injective ;

b) les axiomes sont valides dans une catégorie de faisceaux.

Plus loin, j'analyse le rôle du langage catégoriel pour ces démonstrations.

3.3.3.5 ***Bereitstellung von Spektralsequenzen durch injektive Auflösungen und der Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck*** 136

Les problèmes énumérés par Serre (voir 3.2.3.3) peuvent se résoudre maintenant, car la définition de la théorie de cohomologie par dérivation de Γ conduit à une suite exacte longue (indépendamment des restrictions sur la cohérence du faisceau ou sur la topologie de l'espace), et également à différentes suites spectrales permettant de rétablir les méthodes de Leray 1950 en géométrie algébrique. Grothendieck note en passant que ceci n'aurait pas eu lieu en poursuivant la voie choisie par Serre qui est une théorie de type Čech, car la comparaison des deux théories de cohomologie montre quelques différences qui disparaissent justement dans le cas d'un faisceau cohérent ou d'une topologie paracompacte.
Grothendieck peut ainsi établir son premier résultat important en géométrie algébrique : un théorème de Riemann-Roch valable pour un type assez général de variétés algébriques et même pour le cas "relatif" (c'est-à-dire l'affirmation correspondante pour un morphisme de variétés).

3.3.4 *Grothendiecks KT und ihre beweistechnischen Aufgaben* 138

Ici, j'analyse de près le rôle de concepts de la TC pour l'argumentaire de Grothendieck.

3.3.4.1 *Die Grundbegriffe : infinitäre Pfeilsprache* 138

On voit facilement que Grothendieck, pour ses définitions de monomorphisme, épimorphisme, sous-truc, se place entièrement dans le cadre de langage de la TC (même s'il fait sembler se servir d'un langage ensembliste en codifiant les équations portant en réalité uniquement sur la composition de flèches en termes d'applications entre ensembles de flèches). En revanche, pour la formulation des axiomes en vue de a), il a besoin de constructions infinitaires (produit infini, somme infinie) qu'il introduit à l'aide des constructions correspondantes de la théorie des ensembles ; de plus, dans sa démonstration de a), les considérations de cardinalité dans l'infini jouent un certain rôle. Donc son travail ne s'arrête pas à la TC "élémentaire" (c'est-à-dire de premier ordre).

3.3.4.2 *schémas de diagrammes und die Thematisierung von* $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ 141

Le concept de "catégorie définie par schéma de diagramme" revient, en termes systématiques d'aujourd'hui, à considérer des constructions dans la catégorie Cat des catégories. C'est ce concept qui permet de déduire que si les axiomes utilisés dans a) sont valables dans la catégorie des groupes abéliens (ce qui est le cas, on le sait) alors ils le sont aussi dans la catégorie de préfaisceaux de groupes abéliens. C'est là le pas décisif pour la démonstration de b) (pas qui est d'ailleurs laissé au lecteur chez Grothendieck). Buchsbaum, dans une situation semblable, s'arrêtait en disant qu'il ne dispose pas d'une "définition" (c'est-à-dire construction) d'un produit et d'une somme infini dans une catégorie exacte quelconque ; Grothendieck se contente de démontrer que si ces objets existent dans une catégorie abélienne C, alors ils existent aussi dans une catégorie définie à partir de C "par schéma de diagramme". Il s'agit donc de donner un critère pour que la validité des axiomes soit "héritée".

3.3.4.3 *Die Äquivalenz von Kategorien und ihre Rolle beim Nachweis, daß es genügend Injektive gibt* 142

C'est Grothendieck qui définit pour la première fois le concept d'équivalence de deux catégories, en vue de l'équivalence fondamentale pour son travail (voir 3.3.3.1). Comme Jean-Pierre Marquis l'a souligné, Grothendieck donne implicitement une définition du concept d'adjonction de foncteurs en donnant celle du concept d'équivalence de catégories. Deux remarques :

1) On n'est pas satisfait de sa présentation du concept d'équivalence de catégories, car il ne dit pas clairement si les flèches ϕ, ψ intervenant dans sa définition sont en effet des isomorphismes (et non pas seulement des morphismes fonctoriels) — mais on peut raisonnablement penser qu'il voulait dire exactement cela. En dehors de raisons de nature mathématique, on peut évoquer l'utilisation d'une terminologie déviante ce qui semble indiquer une faute de frappe. C'est-à-dire, il semble s'agir ici d'une chose oubliée lors des unifications et actualisations de terminologie (3.3.1.3), donc du coup d'une chose qui (ayant échappé au lecteur d'épreuves) ne peut pas avoir le tampon "ceci est bien ce que l'auteur veut dire mathématiquement".

2) Selon moi, Grothendieck observe donc simplement que l'équivalence est un cas particulier de ce qu'on va appeler plus tard une adjonction, les ϕ et ψ jouant le rôle des "units of adjunction" usuelles (ψ à inverse près) — ces dernières n'étant pas forcément d'isomorphismes dans le cas général (et dans les cas intéressants) d'une adjonction. Les équations en question sont toujours vraies pour des isomorphismes, donc ne devraient plus faire partie de la définition proprement dite de l'équivalence (comme il est bien sous-entendu qu'il s'agit d'isomorphismes ; voir 1)). Reste à connaître la raison pour laquelle Grothendieck mentionne cette propriété. En avait-il besoin ? Comme les démonstrations où l'équivalence en question intervient sont largement laissées au lecteur, c'est difficile à juger.

Il convient de souligner que le succès de Grothendieck n'est pas d'avoir démontré l'existence de certains objets dans une catégorie où on n'a pas à sa disposition des éléments d'objets. Freyd a démontré qu'un énoncé qui peut être déduit dans la catégorie des groupes abéliens peut aussi être démontré dans une catégorie abélienne arbitraire, donc on n'est pas obligé de se priver des éléments dans ses démonstrations.

Tandis qu'Eilenberg et Steenrod ont entendu par une théorie d'homologie ou cohomologie un foncteur sur une catégorie d'espaces topologiques avec certaines propriétés, en cohomologie de faisceaux on regarde plutôt l'argument "abélien" de ce foncteur comme variable : on fixe l'espace et change le faisceau (le système de coefficients). Les suites exactes intervenant dans les axiomes d'une théorie de cohomologie sont établies par rapport à cette variable, contrairement au procédé antérieur.

On remarque qu'il y a deux communautés plus ou moins séparées l'une de l'autre : la communauté américaine autour d'Eilenberg s'intéresse d'une part à la topologie algébrique et d'autre part à une algèbre homologique "abstraite" continuant le travail de Buchsbaum ; la communauté française autour de Cartan, Serre et Grothendieck s'intéresse aux applications de l'algèbre homologique à la géométrie algébrique. La séparation entre les deux communautés a conduit à des efforts superflus ; elle semble être due à un manque d'intérêt pour le travail des autres de la part des Français et au fait que les Américains n'ont pas suffisamment profité des occasions qu'il y avait pour faire connaître leurs travaux.

On lit à plusieurs reprises que ce n'était qu'avec de résultats publiés vers la fin des années 50 que la TC devint plus qu'une langue commode et développa ses forces comme outil de recherche. À ce basculement, on lie soit le travail de Grothendieck publié en 1957, soit l'invention de la notion de foncteur adjoint par Kan publié en 1958. Ici, j'interroge cette version dans le cas du travail de Grothendieck.

Il est peu probable que Grothendieck voulait réellement créer une discipline de recherche autonome qui est la TC, mais dans une certaine mesure, ceci semble être une des conséquences de son activité.

Il est affirmé que Grothendieck a transformé la TC d'un langage en un outil de recherche ; je propose quelques réflexions sur cette distinction.

Dans ce chapitre, j'étudie le rôle de la TC en géométrie algébrique. Ici, son apport commence avec le tournant de Grothendieck vers cette discipline autour de 1956. Mes analyses historiques et philosophiques des contributions de Grothendieck dans ce domaine ne peuvent être que très fragmentaires ; je présente quelques éléments d'interprétation illustrés par un petit choix d'exemples, mais à vérifier sur un corpus énorme.

Les innovations conceptuelles de Grothendieck sont déjà présentes dans la partie purement géométrique de ses SGA (1-3) ; j'en décris certaines qui font usage direct du langage des catégories.

La notion de variété est transformée en celle de "schéma".

Selon Cartier, Chevalley et Serre abordaient, chacun dans sa direction, une transformation de la notion de variété comme fixée par Weil autour 1949. Je n'ai pas l'impression que dans ce cadre, la TC ait joué déjà un rôle très important ; mais il est clair que Grothendieck s'est inspiré de ces travaux. Il faut surtout souligner que ces approches n'étaient pas adaptées à résoudre deux problèmes que Cartier juge fondamentaux : celui de définir le produit des variétés, et celui du changement de corps de base.

Grothendieck propose la notion de schéma, en partant de la topologie de Zariski sur le "spectre" (l'ensemble des idéaux premiers) d'un anneau commutatif (ainsi laissant consciemment de coté les restrictions sur la nature des anneaux de base qui étaient en vigueur auparavant) ; il associe à un tel espace un certain faisceau d'anneaux, et il appelle "schéma" un objet qui est de cette sorte (espace d'idéaux premiers + faisceau) "localement". Il peut résoudre les deux "problèmes fondamentaux" en adoptant strictement une perspective catégorielle : il définit ce qu'est un morphisme de schémas provenant d'un homomorphisme d'anneaux donné (ainsi la construction de spectre est vue comme foncteur), et il passe directement à la catégorie relative de la catégorie ainsi définie : un S-schéma est un morphisme de schémas $X \to S$, S jouant le rôle du corps de base. Le produit des S-schémas est le produit dans cette catégorie (voir 5.1.3) — et non pas l'espace produit d'espaces topologiques ; aussi, l'ensemble sous-jacent de ce produit n'est pas l'ensemble produit des ensembles sous-jacents des schémas de départ. L'opération auparavant paradigmatique de munir un ensemble d'une structure n'a pas lieu ici. De même pour le changement de base S : celui-ci est exprimé à l'aide de ce produit.

Le traitement du problème célèbre d'étudier la variété des "moduli" d'une variété a considérablement progressé dans le cadre conceptuel de Grothendieck qui observait que le foncteur que constitue un schéma est "représentable" (provient d'un objet). La notion de foncteur représentable fut introduite exactement dans ce contexte.

Brève discussion de la définition de Grothendieck de "point géométrique", utilisant le nouveau plan conceptuel.

La topologie de Zariski n'étant pas bien adaptée à bon nombre d'opérations souhaitables, Grothendieck prend l'occasion de définir d'autres types de topologies, en s'appuyant sur la caractérisation catégorielle de la topologie.

4.1.2.1 ***Probleme mit der Zariski-Topologie*** 164

On énumère un certain nombre de problèmes avec la topologie de Zariski qui entraînent de passer à un autre type de topologie. Mais la topologie de Zariski reste intéressante, ne serait-ce que pour motiver ces autres topologies.

4.1.2.2 ***Der Begriff der Grothendieck-Topologie*** 165

La formulation en termes de flèches rencontra un autre succès lorsque Grothendieck remplaça la notion classique de topologie par celle de site. Plus précisément : au lieu de définir les faisceaux (dont on veut se servir) par rapport à la catégorie des ouverts dans la topologie de Zariski, on les définit par rapport à d'autres catégories dans lesquelles d'autres flèches que les seules injections $U \to X$ sont admises. On peut faire ceci après avoir caractérisé les notions d'union, intersection, recouvrement ouvert, qui interviennent dans la définition ancienne de la notion de faisceau, en termes de flèches (produit et somme dans la catégorie considérée) ; ainsi, on peut passer à d'autres catégories qui disposent de tels produits et sommes. Les faisceaux définis par rapport à un site forment une catégorie que Grothendieck appelle un topos.

4.1.2.3 ***Der Topos ist wichtiger als der Situs*** 167

Dans les textes qui essayent de juger la portée des résultats de la nouvelle théorie, Grothendieck souligne que la notion de topos est supérieure à celle de site ; ses visions donnant lieu à ce jugement ne sont référées ici que de manière allusive. De toute façon, la notion de topos fut caractérisée ultérieurement indépendamment de celle de site par Giraud qui s'est intéressé directement à l'existence de certaines limites dans les topos eux-mêmes (sans passer par les sites correspondants).

4.2 ***Die Weil-Vermutungen*** 169

Dans SGA 4, Grothendieck applique sa théorie aux conjectures de Weil.

4.2.1 ***Propädeutik*** 170

Je présente brièvement en quoi consistent les conjectures de Weil.

4.2.2 ***Weils Originaltext*** 170

Dans son texte original, Weil prend soin de limiter le cadre conceptuel pour présenter ses conjectures ; plus tard, on emprunte plutôt une voie de solution en termes d'une théorie de cohomologie.

4.2.3 ***Grothendiecks Rezeption der Vermutungen und die Suche nach der Weil Cohomology*** 173

L'effort est de construire la théorie de cohomologie de Weil non pas pour les variétés, mais pour les schémas. Pour aboutir à cela, Grothendieck remplace la topologie de Zariski par ce qu'il appelle la topologie étale, et il introduit le calcul des catégories dérivées en algèbre homologique.

4.2.4 ***Grothendiecks Visionen : Standardvermutungen, Motive und Tannakakategorien*** 176

Les conjectures standard sont la tentative d'établir la dernière conjecture de Weil ouverte selon un modèle technique développé par Serre dans un contexte semblable ; leur démonstration est censée être possible par la détermination de la "catégorie des motifs", une instance d'un type général de catégories appelé “tannakiennes” (inspiré de la catégorie des espaces vectoriels réels et de l'idée de transformer la théorie des représentations de groupes en théorie de cohomologie). Mais la solution de Deligne évite cette démarche conceptuelle qui depuis a montré ses limites.

4.3 ***Wieso gerade Kategorientheorie — und wozu ?*** 179

Dans les applications que fait Grothendieck de la théorie, le pas décisif vers une nouvelle connaissance (et l'impulsion principale pour la décision de s'appuyer sur la TC) est en général la clarification des concepts et non pas la preuve des théorèmes, preuve qui résulte assez souvent directement de la mise en oeuvre des « bons » concepts.

Grothendieck parle de ses notions introduites à l'aide de la TC en tant que "fil conducteur" (SGA 4). Pour lui, le choix d'un cadre conceptuel est approprié quand ce cadre a une capacité "guidante" — comme certains l'attendent d'une épistémologie des mathématiques, et comme l'approche réductionniste ne semble pas pouvoir le procurer (1.2.1).

4.4 ***Eine überraschende Anwendung : "Geometrische Logik"*** 182

Le travail de Giraud sur les topos a donné lieu à une autre application importante de ce concept, en dehors de la géométrie algébrique : Lawvere et Tierney ont transformé le concept de topos en un concept (non équivalent) de premier ordre, gagnant ainsi la possibilité de l'appliquer en théorie de modèles. Par cette voie, ils ont donné une nouvelle démonstration de l'indépendance de l'hypothèse du continuum.

5 ***Nachlese : Geschichte des KT-Begriffssystems*** 185

Après avoir regardé de près trois contextes d'application de la TC, il est possible de résumer les changements qu'a apportés la TC aux concepts de base de ces contextes, mais aussi le développement qu'a subi la TC elle-même lors de ces mises en œuvre.

5.1 ***Der Einfluß der KT auf einige zentrale Begriffe*** 185

La tendance générale est de transformer les notions en langage de diagrammes.

5.1.1 ***Homologie*** 185

La transformation du concept d'homologie était au centre de l'intérêt dans les trois études de cas ; on pourrait donc avoir l'impression que l'homologie est plus ou moins le seul concept pour lequel la TC apporte quelque chose d'essentiel, mais ceci serait une simplification (l'impression est largement due au choix des exemples).

5.1.2 ***Komplexe*** 186

Dans la situation de départ de la topologie algébrique des années 30, il y avait différents types de complexes en concurrence (chacun adapté à une certaine problématique) ; la TC accentue celui qui est le plus abstrait (où aucune base n'est fixée dans les groupes de chaînes ou cycles).

5.1.3 ***Limites, Produkte und Summen*** 188

Les notions de limite inductive ou projective, produit cartésien, somme directe ont été étudiées avant l'introduction de la TC, mais cette dernière a permis d'intégrer tous ces concepts sous une seule notion, la notion de limite de Kan.

5.1.4 ***Koeffizienten von Homologie und Cohomologie*** 190

La première modification du concept de coefficients de l'homologie a été la transition des coefficients entiers à des coefficients plus généraux ; ceci était un pas important pour la solution de Hopf du problème des Sphères (2.1.2.2) ou chez [Hurewicz 1936a], qui s'intéresse, en langage moderne, à des cas où les classes d'homotopie d'applications entre espaces données recouvrent les classes d'homologie (l'inverse étant vrai en général). Par la transition à la variable "abélienne" en algèbre homologique (3.4.1), la perspective se perd dans laquelle on calcule la cohomologie d'un espace par rapport à un système de coefficients (les éléments d'un groupe) — en faveur de l'idée de voir le faisceau comme "le coefficient" (l'argument).

5.1.5 ***Garben*** 192

Parallèlement à ce qui a été dit concernant les coefficients, le concept de faisceau perd sa raison d'être originale de constituer un système de coefficients locaux ; dans le traitement du SGA, la notion de faisceau n'est même plus liée à la présence d'un espace topologique dans le sens classique.

5.1.6 ***Gruppoide*** 193

Un précurseur indépendant de la TC a été la théorie des groupoïdes. Historiquement, il s'agit d'une généralisation du concept de groupe ; dans une perspective systématique, on y voit plutôt une spécialisation du concept de catégorie.

5.1.6.1 ***Brandt*** 194

Brandt a introduit les groupoïdes dans un contexte algébrique (composition des formes quadratiques à quatre variables), mais cette entreprise ne semble pas avoir eu beaucoup de succèsseurs.

5.1.6.2 ***Ehresmann*** 195

Il est difficile à dire quand Ehresmann a commencé d'utiliser la notion de groupoïde et quand la relation au travail de Brandt d'une part, à la TC d'autre part a été remarquée. Ehresmann semble s'inspirer du travail de Veblen et Whitehead en géométrie différentielle, mais aussi d'un exercice dans l'Algèbre de Bourbaki qui semble en rapport avec la théorie de Brandt.

5.1.6.3 ***Homotopie*** 196

L'exemple du groupoïde fondamental semble être l'exemple-clé qui a aidé à réunir les diverses conceptions de la notion de groupoïde. Il se peut que d'abord Eilenberg et Weil dans leur rapport sur la topologie algébrique pour Bourbaki, puis le Séminaire Cartan s'aient inspirés de l'usage fait de cette terminologie dans l'exercice mentionné.

5.2 ***Die Theoriewerdung der KT*** 198

Avec la multiplication de ses applications, la TC est devenue une vraie "théorie" avec des constructions et des problèmes propres au langage catégoriel. Je présente des éléments de l'histoire des concepts-clé de la théorie.

5.2.1 ***Elemente der Analogiebildung zu anderen Theorien*** 198

L'hypothèse que la TC pourrait s'être développé de façon analogue à d'autres théories (comme la théorie des groupes) trouve un certain support ; cependant, ce support ne suffit pas pour la compréhension de ce développement.

5.2.2 ***Der Weg zum Begriff des adjungierten Funktors*** 200

La notion d'adjonction de foncteurs, fondamentale en TC dans une perspective systématique (p.e. elle munit cette théorie de ses problèmes les plus profonds), a été introduite pour la première fois dans un contexte bien particulier (2.6.2.2).

5.2.2.1 ***Verspätung ?*** 200

Problématisation de la thèse de l'introduction tardive du foncteur adjoint

5.2.2.2 ***Unwiderständige Beispiele*** 202

Les exemples d'adjonction aujourd'hui considérés comme "exemples standard" ont été présents dès le début de la TC, mais n'ont pas conduit au concept général car n'étant pas suffisamment "résistants" (c'est-à-dire le point de vue général n'aurait apporté rien de nouveau aux contextes).

5.2.3 ***Das Aufkommen weitreichender kategorieller Konstruktionen*** 204

On examine l'histoire d'un certain nombre de constructions propres à la TC qui entre-temps ont montré leur importance.

5.2.3.1 ***Hom-Funktoren*** 204

Les foncteurs Hom sont présents dès le début des travaux d'Eilenberg-Mac Lane, en accord avec leur but initial de comprendre le rôle du foncteur Ext en homologie. Ce qui change au cours des années, c'est la catégorie dans laquelle ce foncteur prend ces valeurs : au départ, on s'intéressait surtout à des foncteurs Hom à valeurs dans la même catégorie ou dans les groupes abéliens ; plus tard, on a commencé à considérer également des foncteurs Hom à valeur dans les ensembles.

5.2.3.2 ***Funktorkategorien*** 205

Les catégories de foncteurs, très importantes chez Grothendieck et Freyd, avaient déjà été mentionnées par Eilenberg-Mac Lane, mais dans une perspective d'application toute différente (en fait marginale, d'où le fait que les problèmes ensemblistes liés à cette notion n'ont pas été immédiatement remarqués).

La catégorie de toutes les catégories semble apparaître implicitement dans l'article Tohoku ; plus tard, cette notion a, malgré les problèmes qu'elle pose, trouvé d'applications importantes.

Les intentions des concepts de base de la TC ont évolué, comme l'indique aussi un texte de Manin ; celui-ci souligne en même temps l'importance de la TC dans les tentatives de solution d'un certain nombre de fameux problèmes ouverts : conjecture de Fermat, $P = NP$, certains problèmes en physique. La hiérarchie d'équivalences esquissée par Manin (Cat, 2-Cat etc.) rappele la hiérarchie des inductions dans le travail de Bernays ; voir [Heinzmann 2003].

Qu'est-ce qu'un objet ? — cette question admet quantité de réponses, la perspective étant philosophique ou technique.

La théorie des ensembles, dans l'interprétation de Quine, donne une réponse : un objet/une entité, c'est quelque chose dont on peut parler raisonnablement ; pour cela, on a besoin d'un critère d'identification — ce qui, en théorie des ensembles, est assuré par les relations d'équivalence, comme, p.e., dans l'identification ("objectification") des nombres rationnels etc. Ici, on se sert évidemment d'une définition philosophique préalable de ce qui est un objet. Cependant, la TC n'en emploie aucune, mais laisse ouverte la signification du mot "objet" en se servant de ce dernier seulement en accord avec un certain nombre de postulats. Mais quel est le modèle de ces postulats, c'est-à-dire quelle signification du mot "objet" se manifeste dans les postulats ?

Comme un objet de la TC n'est pas automatiquement un ensemble (le mot "ensemble" ne faisant pas partie du vocabulaire de la TC), on ne peut pas forcément parler de ses éléments. Pour ceci, on a d'abord besoin d'une traduction du concept ensembliste d'élément dans le langage catégoriel. Lawvere, dans sa caractérisation catégorielle de la catégorie des ensembles, remarque que cette catégorie admet un objet terminal $\mathbf{1}$, et les éléments d'un ensemble X peuvent être vus comme les différentes flèches $\mathbf{1} \to X$. Dans d'autres catégories, il y a trois scénarios possibles : soit la situation est la même, soit il n'y a pas d'objet terminal (donc on ne peut même pas parler d'éléments dans le sens de la TC), soit il y en a, mais il y a des X qui ne disposent pas de flèches $\mathbf{1} \to X$ (donc un tel X n'a pas des éléments dans le sens de la TC).
Partant de considérations semblables, Grothendieck redéfinit la notion de "point" géométrique et identifie, en géométrie algébrique, les équations sans solutions aux "espaces sans points". C'est par cette voie que furent attaqués plusieurs fameux problèmes, p.e. la conjecture de Fermat.

L'approche catégorielle de la notion d'élément suggère une manière de récupérer dans la TC des informations sur des objets n'ayant pas d'éléments : au lieu des flèches $\mathbf{1} \to X$, on considère toutes les flèches $Y \to X$ pour tous les objets Y de la catégorie — car toute l'information sur X qui est présente dans la catégorie l'est sous la forme de la totalité des $Y \to X$ et de leur comportement par rapport à la composition avec d'autres flèches. On considère donc l'objet comme non apréhendable directement, comme caractérisé uniquement par son interaction avec les autres objets. Mettant l'accent sur l'acte même de mise en rapport, un « objet » (dans le sens de la TC) est donc caractérisé uniquement par toutes les manipulations possibles dans un cadre méthodologique donné.
Il me semble que cette vue soit anticipé en philosophie par les monades de Leibniz (qui n'ont pas de "fenêtres" — pas de structure interne — et pour lesquelles la seule chose qui compte sont leurs relations mutuelles), ou encore par la vue de Poincaré selon laquelle "ce que [la science] peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, [. . .] ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable."

Mais, bien entendu, dans la TC il ne s'agit pas d'introduire par cette voie une ontologie réductionniste qui ramène tout à des objets-points, irréductibles. Au contraire, ce qui nous intéresse dans cette approche, c'est la possibilité de pouvoir changer de perspective, de pouvoir considérer des objets en extension dans une catégorie et les réduire à des points dans l'autre, en mettant chaque fois l'accent sur un autre type de "rapport entre les choses". Bref : on a moyen de changer le cadre méthodologique, voir le niveau de thématisation, ce qui réfléchit bien l'idée-clé de l'approche pragmatique.

5.3.1.4 ***Exkurs : Intensionale Gleichheit und "externe" Charakterisierung*** 213

Le critère d'identification d'objets en TC décrit ci-dessus est plus faible que l'égalité extensionnelle ; en même temps, ce critère a un caractère intensionnel, vu sa définition par les manipulations possibles.

5.3.1.5 ***KT-Identifikationskriterium für Objekte : Gleich bis auf Isomorphie*** 216

En donnant dans la TC un sens particulier au mot "isomorphisme" qui n'implique pas "bijection", on identifie typiquement des objets isomorphes, car il n'y a pas moyen de les distinguer à l'intérieur de la TC (où toute l'information accessible sur les objets est "externe" et du coup invariante par isomorphisme).

5.3.2 ***Was ist ein Pfeil ?*** 217

Selon l'intention standard de la TC, les flèches sont des actes de transport de structure. Mais ce qui rend efficace la TC, c'est qu'on peut prendre les propriétés principales de ces transports et les appliquer dans d'autres contextes qui ne sont pas des transports de structures dans un sens naïf. Il n'est pas sous-entendu que les flèches sont des fonctions.

5.3.2.1 ***Ist KT durch die Pfeile intuitiv ?*** 217

Une flèche étant tout d'abord un signe graphique (exprimant une dynamique), on a proposé que le caractère intuitif de la TC repose sur l'intuition que l'on a de ces signes. Ceci semble être partiellement vrai, mais en même temps, je montre qu'une tentative de retrouver cette liaison dans le développement historique est incomplète.

5.3.2.2 ***Die Gleichheitsbegriffe für Funktionen und Pfeile*** 220

Alors que le critère d'identification d'objets est plus faible en TC qu'en théorie des ensembles, il est plus fort pour les flèches : deux fonctions qui sont égales d'un point de vue extensionnel sont néanmoins distinguées en TC si leurs codomaines ne coïncident pas. Cette idée provient de la situation en topologie algébrique.

5.3.3 ***Was ist eine Kategorie ?*** 220

5.3.3.1 ***Gibt es einen intendierten Begriffsinhalt ?*** 220

Le mot "catégorie" pourrait être choisi justement à cause des connotations auxquelles son usage donne lieu. Ceci est interrogé et confirmé en partie.

5.3.3.2 ***Standard- und Nonstandardkategorien*** 221

L'intention standard de la notion de catégorie est la suivante : une collection d'ensembles munis de structures et d'applications qui respectent la structure, et une loi de composition pour ces applications. Cette intention est en un sens trop étroite pour permettre de comprendre l'histoire de la théorie. En effet, certaines catégories "non-standard" jouaient un rôle prédominant pour le développement de la TC :
– la catégorie qui correspond à un ensemble partiellement ordonné ;
– certaines catégories duales, obtenus par renversement des flèches ;
– les catégories de schémas dans la géométrie algébrique.

Déjà dans le travail original d'Eilenberg-Mac Lane, les axiomes sont choisis de manière à laisser ouverte la porte aux modèles non-standards ; de plus : si seuls les modèles standard étaient visés, le choix des axiomes paraîtrait artificiel à certains endroits (ce n'est pas la peine d'imposer l'associativité de la composition quand on a affaire uniquement aux applications, car là, la composition est associative automatiquement).
On peut ici distinguer deux sortes de modèles non-standard :
– "Dangereux" : On laisse de coté les axiomes qui sont apparemment valides automatiquement, et on rencontre des modèles où ils ne le sont pas.
– "contrôlés" : On postule les axiomes en question, en admettant une redondance par rapport à l'intention standard, et on rencontre des modèles qui sont "de la bonne sorte".

5.3.3.3 *KT-Identifikationskriterium für Kategorien : Äquivalenz* 225

Le critère d'identification pour les catégories n'est pas l'existence d'un isomorphisme, mais d'une équivalence. On voit ainsi que la catégorie des catégories n'est en vérité pas une catégorie, mais une "2-catégorie". L'histoire du concept d'équivalence est retracée.

II *Diskussionen über Kategorientheorie* 229

Après avoir décrit, dans ce qui précède, l'action de la TC en mathématique dans les cas les plus importants, je m'intéresse, dans la deuxième partie du travail, aux discussions qui se sont manifestées lors de cette action. J'essaye de reconstruire ces discussions historiquement, mais aussi de critiquer et continuer leurs contributions philosophiques.

6 *Bourbaki und die Kategorientheorie* 231

La discussion au sein de Bourbaki n'a pas abouti à la décision d'intégrer la TC dans leur œuvre ; tout au contraire, il semble que la démission du mathématicien visionnaire Alexander Grothendieck du groupe ait été motivée en partie par le grand désaccord sur cette question, la TC jouant un rôle extrêmement important dans ses travaux. On peut dire qu'à ce moment, Bourbaki perd une partie de son poids dans les mathématiques françaises, au moins en ce qui concerne son rôle de l'avant-garde de la recherche mathématique.
Le chapitre 6, dans sa description de ladite discussion, s'appuie pour l'essentiel sur des textes en français. Les citations de ces textes constituent une partie importante du chapitre et peuvent conduire le lecteur francophone dans son parcours de celui-ci ; je peux donc le résumer de manière moins détaillée.

6.1 *Die Funktionsweise von Bourbaki* 231

Le fonctionnement de Bourbaki était le suivant : le groupe se réunissait trois fois par an pour discuter les rédactions ; les comptes rendus de ces congrès Bourbaki sont réunis dans "la Tribu". Un volume de ce journal interne comprend typiquement :
– une liste des participants ;
– quelques anecdotes du congrès ;
– dates, lieu et organisateurs du congrès prochain ;
– *engagements du congrès* : les obligations de rédaction de chaque membre ;
– *état des rédactions* : une liste de l'avancement des travaux pour chaque chapitre en production ;
– *plan général* : réflexions sur la structure des *Éléments* (répartition en parties, livres, chapitres) ;
– *décisions* : résultats de la discussion des rédactions lues au congrès.

6.2 *Bourbakis Philosophie der Mathematik* 233

Je maintiens que pour comprendre la discussion sur la TC, il faut d'abord rappeler les positions philosophiques évoquées par Bourbaki à différentes reprises ; je propose une critique de ce positions dans la perspective des thèses philosophiques soutenues dans le présent travail.

6.2.1 ***Strukturalistische Ontologie*** 233

La position ontologique adopté par Bourbaki est le “structuralisme” ; mais si on veut vraiment maintenir (comme Bourbaki l'a fait) qu'une telle ontologie peut remplacer l'ontologie ensembliste, alors le terme “structure” demande une définition indépendante de la notion d'ensemble.

6.2.2 ***Der Terminus “Struktur” und Bourbakis Versuch einer Explikation*** 234

La définition mathématique de “structure” que donne Bourbaki dépend, malgré la doctrine du primat de la notion de structure, de la notion d'ensemble. L'opération de base est de munir un ensemble d'une structure.

6.2.3 ***Die hypothethisch-deduktive Doktrin*** 237

La position épistémologique de Bourbaki s'appelle “hypothético-déductive” (une réponse spécifique au fait que le programme de Hilbert ne soit pas réalisable, faute de preuve de non-contradiction) : On peut assurer la non-contradiction “empiriquement” en s'appuyant toujours sur un système approuvé mainte fois (la théorie des ensembles) ; en cas de contradiction, on cherche des solutions ad hoc. Il semble difficile d'harmoniser l'ontologie et l'épistémologie de Bourbaki.

6.2.4 ***Überprüfung der strukturalistischen Sicht der Mathematik*** 238

Je rappele brièvement quelques critiques de la vue structuraliste des mathématiques.

6.3 ***Bourbaki und Themen, für die KT nützlich ist*** 238

La discussion sur la TC a eu lieu dans différents contextes qui dans la présentation systématique d'aujourd'hui sont normalement traités en termes catégoriels.

6.3.1 ***limites inductives et projectives*** 238

Bourbaki a envisagé un traitement des limites d'abord dans EVT (en continuant et généralisant la présentation de la thèse de Grothendieck avec sa “topologie limite”), puis dans les structures (E IV étant conçu comme un chapitre réunissant les outils généraux d'une “mathématique des structures”.

6.3.2 ***applications universelles*** 242

Le traitement général de problèmes universels semble être la tentative la plus ancienne de Bourbaki de dire quelque chose de substantiel sur des constructions structurales apparaissant à maintes reprises dans les mathématiques.

6.3.2.1 ***Ein appendice, sein Ort, seine Resonanz und zwei auf ihm basierende Texte*** 242

Le premier texte publié à ce sujet est un appendice à l'Algèbre multilinéaire de 1948 (qui disparaît dans les éditions ultérieures) ; cet appendice donne lieu à deux textes qui redéveloppent et élargissent ce traitement, restant indépendant de la TC tous les deux : l'article [Samuel 1948] publié hors Bourbaki, et une section dans E IV. Dans ces textes, une construction aboutissant à une solution d'un problème universel est développée qui marche pour la plupart des exemples étudiés.

6.3.2.2 ***In welchem Maße hat man es hier implizit mit KT zu tun ?*** 247

La remarque de Corry que dans la construction de Samuel, on a implicitement affaire à des concepts catégoriels, n'est pas justifiée car dans cette construction l'opération de munir d'une structure le produit cartésien de certains ensembles est essentielle.

6.3.3 ***algèbre homologique*** 249

Les protagonistes étant tous membres du groupe, Bourbaki a discuté en largeur l'intégration d'un texte sur l'algèbre homologique dans les Éléments. Comme en l'a déjà vu en 3.3.1.3, le texte Tohoku de Grothendieck était originalement conçu comme une rédaction Bourbaki. Mais le texte à ce sujet qui a réellement apparu (en 1980 seulement) donne grosso modo l'état de l'art chez Cartan-Eilenberg, laissant de coté les faisceaux.

Je présente des extraits de la discussion sur le texte.

Mac Lane mentionne un débat violent concernant l'application de la terminologie de suite exacte, Weil s'opposant à ce choix terminologique. Pour cet épisode, je n'ai pas pu trouver de sources directes.

Le livre de Godement, originalement issu d'un cours donné à l'université de l'Illinois en 1954/55 [Gray 1979, 9], était prévu pour Bourbaki, comme l'indique *Tribu 34*. Mais Bourbaki n'a jamais rien publié sur les faisceaux.

La géométrie algébrique dans le sens de Grothendieck a été discutée au sein de Bourbaki : *Tribu 41* vise à traduire le langage "ancien" des variétés dans un langage catégoriel ("machine de Grothendieck") ; *Tribu 45* contient un plan d'un *Livre de Géométrie Algébrique* par Grothendieck comprenant les notions principales de SGA.

Les débats décrits dans la section précédente ayant tous amené à la thématisation du langage catégoriel, il va de soi que Bourbaki a également discuté de l'adoption de ce langage.

Il y avait des avocats d'une telle adoption ; en revanche, quelques témoignages indiquent qu'André Weil s'y est opposé strictement. D'autres avaient des doutes quant à la méthode d'adoption.

Bourbaki a constaté un conflit entre la TC et les *structures* ; là, même Eilenberg (qui évidemment était pour l'introduction des catégories) dit dans un texte écrit à ce sujet (que j'ai trouvé à New York) qu'il ne voit pas comment le résoudre.

Il y a aussi une vaste discussion du problème de donner un fondement ensembliste à la TC, suivant les lignes de la discussion générale sur ce problème (voir chapitre 7). C'est au sein de Bourbaki que Grothendieck présente ses Univers pour la première fois, rejetant une distinction entre objets mathématiques et objets métamathématiques qui était proposée comme solution par Lacombe (logicien consulté par Bourbaki).

Le texte *Ad majorem fonctori gloriam*, écrit à l'occasion de la démission de Grothendieck, montre bien que cette démission était lié, au moins en partie, au refus de Bourbaki d'adopter la TC et à l'agressivité avec laquelle on a dû discuter la question.

L'opposition contre les Univers de Grothendieck se comprend devant la position hypothético-déductive : en ajoutant l'axiome des inaccessibles, on perd la "sureté empirique" de ZF. La position de Grothendieck semble être au-delà d'une épistémologie de ce type.

Le concept de l'ensemble sous-jacent d'une structure est artificiel. La logique traditionnelle veut délimiter, une fois pour toutes, le niveau d'appartenance des descriptions d'objets (premier ordre, deuxième ordre etc.). Selon Lawvere, la TC admet la possibilité de changer la perspective, de "se placer en dehors" : un énoncé d'ordre supérieur peut être élémentaire dans une autre perspective.

L'introduction des univers par Grothendieck est la préhistoire de l'élimination de l'idée d'ensemble sous-jacent : Alors que l'on pourrait avoir l'impression que Grothendieck voulait plutôt renforcer cette idée au lieu de l'éliminer, son vrai intérêt était d'avoir le droit de quantifier librement, de pouvoir parler des notions que Lawvere mentionne comme n'étant pas élémentaires dans tous les cas — et on peut réaliser ceci en se débarrassant de l'ensemble sous-jacent, comme Lawvere l'indique.

7 *Mengentheoretische Grundlegung der KT* 269

Le développement des concepts de base de la TC a conduit à des problèmes dans la réduction de ces concepts à la théorie des ensembles, en particulier avec les applications en géométrie algébrique (Grothendieck).

7.1 *Die Probleme und ihre Interpretation* 270

7.1.1 *KT und Probleme des "Selbstenthaltens"* 270

Il s'agit de problèmes du type "appliquer un concept à soi-même" : une propriété de collections qui a une classe propre comme extension semble être applicable à cette extension ; mais ceci n'est pas admis dans la théorie des ensembles usuelle car une classe propre ne doit pas appartenir à quoi que ce soit, y compris soi-même.

7.1.2 *Legitime Mengen* 272

Certaines constructions catégorielles mènent à des ensembles illégitimes par rapport aux formalisations de la théorie des ensembles *en vigueur*. Mais la légitimité est conventionnelle, a une histoire ("en vigueur"), et "illégitime" n'est pas équivalent à "contradictoire". D'une part, une théorie d'ensembles peut être trop restrictive et exclure des constructions non contradictoires ; d'autre part, comme il n'y a pas de démonstration de la consistance de la théorie des ensembles, on ne peut pas savoir si "légitime" implique "non contradictoire". La seule justification possible par cette voie est donc une démonstration de consistance "relative" (noyau épistémologique de la position hypothético-déductive, 6.2.3).

7.1.3 *Die Widersprüchlichkeit der unbeschränkten KT* 274

Dans une TC sans restrictions, on peut déduire facilement des contradictions, comme "chaque foncteur admet un adjoint".

7.1.4 *Der common sense der Kategorientheoretiker* 274

Malgré le résultat de la dernière section, les catégoriciens sont tout de même d'avis que l'on peut (et doit) se servir des constructions "critiques" si on le fait avec précaution. Car ces constructions, contrairement aux antinomies ensemblistes (qui sont "pathologiques", c'est-à-dire inventées dans une perspective "clinique" juste pour montrer que les concepts ne recouvrent pas les intentions), s'imposent naturellement dans les études visées. Donc pour les catégoriciens, les objets en question ne sont pas justifiés par la réduction (manquante) à la théorie des ensembles, mais par un sens commun technique, c'est-à-dire par la possibilité de s'en servir de manière féconde. De plus, ce qui intéresse n'est pas leur ontologie (leur extension), mais leur caractère "purement formel".

7.1.5 *Die Parteien der Diskussion* 277

Les protagonistes de la TC sont surtout intéressés d'avoir le droit de travailler librement avec les constructions dans les applications visées ; les logiciens professionnels ont leur compétence dans l'analyse des concepts indépendamment des applications et cherchent à établir à quels principes d'existence on fait vraiment appel lors de l'usage de ces concepts. Cette différence d'approche conduit à des malentendus dans la discussion.

7.2 *Problembewußtsein und Entwicklungsstand der KT* 279

On élargissant l'usage qu'on fait de concepts catégoriels, on a rencontré des problèmes dont on n'avait pas conscience auparavant, et on a changé la partition des constructions en "pathologies" et "constructions naturelles". Dans ce cheminement historique, je distingue les trois étapes qui suivent.

Les problèmes dont ont conscience Eilenberg-Mac Lane sont uniquement les problèmes des "catégories larges" (solvables par NGB). Ils ne font pas un usage substantiel d'une catégorie de foncteurs, et ils disent explicitement qu'ils ne visent pas à faire des constructions *sur* des catégories.

À l'époque de Tohoku, les constructions *sur* des catégories et des catégories de foncteurs jouent un rôle important et sont considérées comme des objets naturels à considérer ; la solution par NGB n'est plus satisfaisante.

Avec SGA et la suite, la théorie des ensembles perd de l'intérêt car une grande partie des constructions ensemblistes est remplacée par des constructions en termes de flèches. Parmi les conséquences possibles de cette situation, les deux suivantes sont réellement prises en considération : 1) éliminer parmi ces constructions les constructions non-élémentaires (c'est-à-dire qui se font à l'aide de familles d'ensembles quelconques) ce qui a conduit à la théorie des topos élémentaires ; 2) remplacer la notion ensembliste de famille par des concepts catégoriels (catégories fibrées, Bénabou).

Cette section est consacrée à la proposition de réponse aux problèmes qui a eu la plus grande influence, celle des univers de Grothendieck. Je traite d'une part l'histoire même de cette idée, d'autre part son rapport avec le développement de la théorie des ensembles en tant que discipline de recherche mathématique avec ses propres apriori et problématiques.

L'introduction de Grothendieck se faisant à l'intérieur de Bourbaki et sans publication directe (6.4.3), les premières publications sont celles de Gabriel et Sonner — le premier se référant à Grothendieck, le deuxième en apparence développant les idées indépendamment de Grothendieck.

L'affirmation de l'existence d'univers peut être exprimée comme l'affirmation de l'existence de nombres cardinaux inaccessibles. Ici, j'étudie brièvement l'histoire de cette notion.

La notion de nombre cardinal inaccessible semble apparaître pour la première fois dans les travaux de théorie des ensembles de Felix Hausdorff, mais celui-ci ne voit pas encore d'applications à ce concept.

Le premier qui travaille de manière systématique sur les inaccessibles est Alfred Tarski ; il déduit de l'affirmation de l'existence d'inaccessibles ("axiome $\mathscr{A}$") l'axiome du choix, et il s'intéresse surtout à l'application de tels postulats dans la théorie de décidabilité.

Après les travaux de Tarski, l'intérêt pour la notion est en régression — pour se revitaliser avec son application dans les fondements de la TC.

Dans quelle mesure l'axiome $\mathfrak{a}$ est-il *ad hoc* ? Pour les catégoriciens, il sert à une fin, il "convient", mais cette attitude envers l'affirmation d'axiomes supplémentaires en théorie d'ensembles est naive dans le sens qu'on ne s'intéresse pas à l'étude de la théorie des ensembles et ses problématiques. Sur ce plan, les résultats de Cohen sur l'indépendance de l'hypothèse du continuum ont conduits à des critères d'acceptabilité pour des axiomes supplémentaires ; un choix de tels axiomes est vu comme le choix d'un modèle de la théorie des ensembles. Historiquement, c'était plutôt avec ces résultats qu'avec les problèmes de la TC que l'idée d'un univers de discours pour les mathématiques, donné une fois pour toutes et non pas faisant objet d'investigation lui-même, a été mise en question.

La solution des problémes par la méthode des univers n'est pas tout à fait satisfaisante du point de vue des catégoriciens car elle oblige de s'appuyer sur des constructions artificielles qui, d'un point de vue "purement formel", ne jouent aucun rôle.

Ici, je m'intéresse à d'autres propositions de solution qui n'ont pas eu autant d'influence que la proposition de Grothendieck.

Dans son texte sur les "locally small catégories", Mac Lane lit Grothendieck avec les lunettes de sa propre communauté, à savoir Kan, Yoneda, Buchsbaum. J'évoque des raisons qui confirment l'impression que Mac Lane n'a pas lu soigneusement Grothendieck (ceci étant conforme avec le fait que Marquis a été apparement le premier à remarquer les adjoints là-dedans, voir 3.3.4.3). Mac Lane propose une solution limitée à la situation des catégories abéliennes.

Ehresmann propose de laisser tomber de manière attentive l'interdiction globale qu'une collection ne doit pas appartenir à soi-même. Dedecker développe le concept de "relation collectivisante" qui permet de distinguer formellement parmi toutes les relations celles qui ont une extension exprimable dans la théorie des ensembles. Par cette voie, on peut éviter un certain nombre de contradictions lorsque l'on passe à des ensembles larges.

Kreisel étudie les problèmes du point de vue de la théorie de démonstration, c'est-à-dire il pose la question dans quelle mesure les principes d'existence sollicités par les catégoriciens interviennent réellement dans les démonstrations en vue. Il aboutit à proposer l'application d'un principe de réflexion selon lequel les propriétés intéressantes du modèle de la théorie des ensembles sont déjà reflétées dans un segment suffisamment petit de ce modèle.

Bénabou remplace le recours à la théorie des ensembles là où il intervient — par exemple sous forme de "familles d'objets" etc. — par des équivalents en langage catégoriel, s'appuyant sur le concept de catégorie fibrée ; ainsi, la TC devient exprimable dans un topos quelconque.

Le fait que la TC n'entre pas facilement dans le cadre de la théorie des ensembles a entraîné la mise en question de l'universalité de la justification ensembliste en faveur d'une justification "intuitive", indépendante, de la TC ; dans une deuxième étape, la TC a même été vue comme pouvant justifier d'autres parties des mathématiques ou plutôt certaines activités mathématiques (Lawvere).

Je rappele brièvement les contributions principales à la discussion sur la question comment la TC pourrait être vue comme fondement des mathématiques.

Lawvere essaye de donner une axiomatique de la catégorie des catégories. Les théorèmes qu'il affirme sont faux en partie.

Lawvere voit dans l'omniprésence du concept de l'adjonction de foncteurs en mathématiques un trait "fondamental" de ce concept. Ici, il s'agit de transformer le concept de fondement.

Bell propose de se placer dans chaque recherche particulière dans un topos approprié servant comme "fondement local", en analogie avec la physique relativiste.

J'essaye de voir dans quelle mesure on fait recours à des concepts ensemblistes travaillant dans un topos.

Tandis qu'on doit faire le choix de son modèle en travaillant dans ZF, se placer dans un autre topos que Set ne veut pas dire choisir un autre modèle de ZF, mais une autre catégorie de base (avec une autre gamme de modèles que Set).

McLarty s'engage à rectifier un certain nombre d'erreurs dans l'histoire officielle des fondements catégoriels : le concept de topos n'a pas été inventé pour pouvoir remplacer Set, et d'autres concepts "fondamentaux" comme celui de catégorie abélienne sont plus importants pour les applications mathématiques de la TC que le concept de topos.

Des arguments s'opposant à l'idée même de voir dans la TC un fondement pour les mathématiques étaient invoqués. Kreisel, sans l'avoir dit explicitement, pourrait avoir vu dans les tentatives de Lawvere une tentative formaliste (et du coup inacceptable). Feferman souligne la "priorité psychologique" des concepts opération et collection par rapport aux concepts de structure plus riche (comme catégorie).

À titre de conclusion, les résultats épistémologiques du présent travail sont énoncés.

On a rencontré quantité de preuves que la question ontologique était considérée de moins en moins importante dans la réflexion sur la TC. L'ontologie est remplacée par la possibilité des actes.
Quant au changement du caractère intuitif d'usages, on a deux types de phénomènes :
- un concept utilisé antérieurement de manière intuitive est mis en question, analysé, car on espère pouvoir ainsi enrichir, généraliser et systématiser les méthodes disponibles.
- un concept clarifié par son analyse et son développement obtient un statut qui permet au mathématicien initié de l'utiliser de manière intuitive. Les critères d'usage correct du concept pour lui sont clairs, il n'a plus besoin de thématiser l'admissibilité de l'usage en question. Cette clarté peut s'apprendre avec l'usage du concept, au départ en thématisant les critères d'usage correct.

Dans l'analyse des bases conceptuelles des mathématiques, le critère non réaliste de la consistance est remplacé par un autre critère, celui de caractère "adéquat".

Les acteurs principaux (Grothendieck, p.ex.) ne s'appuyaient pas vraiment sur la nature des objets, mais sur l'emploi libre de certaines méthodes de manipulation (dans un sens large) de manière intuitive. Ces méthodes comprennent le changement de définitions (en particulier l'élargissement de leur portée), le transport de problèmes dans d'autres contextes mieux adaptés à leur solution, et certaines constructions plus spécialisées. On peut même voir que le formalisme de la TC implémente d'une certaine façon ces types d'opération, c'est-à-dire les transforme en objets mathématiques ouverts à leur tour à une recherche. Ainsi, on voit l'esquisse d'une discipline fondamentale qui est à la fois mathématique par ses méthodes et pragmatique dans sa perspective de justification.
On peut tirer de l'historique de la TC le résumé suivant : au début, il y avait un certain nombre d'actions pour aborder la solution de certains types de problèmes. La possibilité des actions était fourni par les contextes, non par la TC elle-même. Cette dernière ne pouvait pas garantir la possibilité d'agir de telle et telle manière dans une situation de problème ; elle décrivait seulement les actes respectifs comme instantiations diffèrentes de la même forme de traitement des choses (langage)
Cette relation de la TC aux actes qu'on peut décrire avec elle changea avec les applications en algèbre homologique : ce sont maintenant des résultats de la TC comme théorie mathématique (collection de théorèmes) qui montrent la possibilité de la construction en question. Elle peut maintenant opérer sur d'elle-même ; actes sur des actes (outil). On passe de la description à l'implémentation (qui dépasse la description pure), de la définition nominale (identification) à la définition réelle (qui fournit la possibilité du défini).

Dans le traitement philosophique de la TC, le point de vue pragmatique est pertinent selon lequel la possibilité de réduction d'objets mathématiques à des ensembles comme objets de base n'est pas constitutive pour la justification de la connaissance mathématique (cette justification se faisant à chaque niveau par rapport au sens commun technique). Les objets des théories de niveau ultérieur ne sont pas de simples abstractions des objets originaux, mais à leur tour les théories de ces objets originaux. Autrement dit, la TC est une théorie d'opérations typique de la mathématique de structures, et c'est en ce sens qu'elle a un caractère fondamental.

Je fais d'abord état d'une liste des sources qui m'ont servi pour délimiter le corpus des documents existants.

J'explique le fonctionnement des différents archives où se trouvent les matériaux Bourbaki.

J'explique l'histoire de la nomenclature (numérotation) des rédactions Bourbaki.

Je fais état d'une liste qui comprend le numèro, le titre (s'il y en a) et le lieu actuel de toutes les rédactions Bourbaki auxquelles je fais référence dans mon analyse. Cette liste donne les informations bibliographiques nécessaires pour une consultation éventuelle des documents sur lesquels je m'appuie dans mon analyse. Ainsi, je rends contrôlables mes affirmations.
Bien entendu, une très grande partie de ces rédactions n'est mentionné dans mon texte qu'en passant (dont celles auxquelles je n'avais pas accès, bien évidemment). Cependant, certaines d'entr'elles sont examinées de plus près.

Il y a un certain nombre de documents dont l'existence est connue (et dont le titre entraîne que leur consultation serait utile pour le travail présent) mais qui ne sont pas accessibles.

Je fais état d'une liste des dates et participants des congrès Bourbaki à partir des Tribu 21 à 56 (j'ai pris connaissance de ces volumes à Nancy ; y manque le volume 36). Dans l'argumentaire, je me sers de tous ces volumes de Tribu sauf les 23, 33, 48, 50, 52 et 55.

J'utilise les *Engagements du Congrès* des Tribus 24, 25, 28, 30-32, 34, 37-42, 45, 49, 54 et 56. Je fais part (non nécessairement sous forme de citation verbale) d'un certain nombre d'informations qui concernent les chapitres et rédactions en question ; la plus grande partie de ces informations se limite à la mention qu'à un moment donné, tel et tel auteur s'engagea de rédiger un texte à tel et tel sujet jusqu'à une date donnée (d'où la possibilité de vérifier s'il l'a vraiment fait pour cette date ou une autre) etc. Ces informations sont indispensables pour une comparaison entre les projets Bourbaki à un moment donné et ce qui était vraiment achevé et publié ; une telle comparaison (d'ailleurs toujours limitée à ce qui concerne les catégories et leurs applications principales) donne bien évidemment la clé de l'analyse historique pour la discussion sur les catégories.

Dans le même esprit, je m'appuie sur les plans généraux publiés dans les Tribus 25, 39, 41 et 42.

Kapitel 1

Prolog: Pragmatismus und Mathematik

1.1 Methodisch-terminologische Vorbereitungen

1.1.1 Problemlösung, Begriffsklärung und Verselbständigung

Als "mathematische Arbeitssituation" bezeichne ich eine Konfiguration[26] aus Begriffen, Methoden, Problemen, Resultaten, die einem konkreten Fall mathematischen Handelns (Operierens) zugrunde liegt. "Methode", "Problem", "Resultat" sind hierbei Termini, die bezeichnen sollen (und üblicherweise bezeichnen), welche Funktion die mit ihnen bezeichneten Dinge in einem Handlungsprozeß jeweils einnehmen: Die Handlung wird vom Problem ausgehen und versuchen, mithilfe der Methode zum Resultat zu gelangen. Natürlich können die so bezeichneten Dinge ihre Rolle auch wechseln; z.B. kann eine Methode Gegenstand einer eigenen Untersuchung (ein Problem) werden. Entsprechend ambivalent wird der Terminus "Begriff" verwendet: Eine Sache, die als mathematischer Begriff bezeichnet wird, kann sowohl Erkenntnismittel sein (also eben zum *Begreifen*, Erfassen eines Sachverhalts dienen) als auch selbst Gegenstand einer Untersuchung sein. Begriffe gehören also ebenso unter die Probleme wie unter die Methoden; es mag sogar gelegentlich sinnvoll sein, von einem Resultat als einem Begriff zu sprechen, etwa so: Der und der Satz gibt uns einen Begriff von der und der Klasse von Gegenständen, oder: Die und die Untersuchung führt uns auf folgenden Begriff. Insgesamt bleibe ich hier (im Einklang mit der üblichen Verwendung des Terminus im informalen Diskurs der Mathematiker) bei einer nicht näher explizierten Verwendung von "Begriff"[27].

Allerdings treffe ich in der Regel folgende Unterscheidung zwischen "Konzept" und "Begriff": Das lateinische Wort *concipere* und seine Ableitungen in den modernen Sprachen (*conceive, concevoir*) sind nicht allein mit "begreifen", "erfassen" zu übersetzen, sondern auch mit "ersinnen", "(einen Plan) fassen". In dieser letzten Bedeutung wird im Deutschen das Fremdwort "konzipieren" gebraucht. In diesem

[26]Vgl. Epples Rede von "epistemischer Konfiguration" [2000, 150].

[27][Wittgenstein 1984a] VII 70. (S.433) "›Begriff‹ ist ein vager Begriff".

Sinn rede ich von einem Konzept als von der Planung einer Handlung; eine Vorgehensweise wird zurechtgelegt. Unter einem (mathematischen) "Begriff" verstehe ich zumeist etwas, das einen Umfang hat, unter das Dinge fallen können. Für ein Konzept im gerade erklärten Sinn ist eine solche Verwendung ganz offenbar nicht zwingend sinnvoll: Ein Konzept muß keineswegs ein Prädikat sein.

Typischerweise unterzieht man Begriffe folgenden Behandlungen:

1. Entwicklung der Theorie eines Begriffs: Es wird untersucht, welche wahren Aussagen sich über Dinge machen lassen unter der Annahme, daß diese Dinge unter den Begriff fallen (deduktiver Begriffsumfang).

2. Erprobung der Extension eines Begriffs: Es wird untersucht, was unter den Begriff fällt.

3. Anwendung des Begriffs: In anderen Kontexten (in denen es um andere Erprobungen geht) wird durch Auffinden von Dingen, die unter den Begriff fallen (Exemplifikation), ein Einsatz von Methoden, die auf den wahren Aussagen über den Begriff fußen, möglich.

4. Abstraktion, ausgehend von Begriffen: Begriffe werden selbst verdinglicht und unter Begriffe höherer Stufe zusammengefaßt.

Ein mathematisches Objekt kann in verschiedenen Arbeitssituationen verschiedene Funktionen übernehmen: Es kann Gegenstand der Untersuchung sein oder Werkzeug zur Untersuchung anderer Gegenstände. Dies hängt von der jeweiligen Handlungsperspektive derjenigen ab, die gerade mit dem Objekt umgehen. Diese einfache, aber wichtige Beobachtung wird für die zu machenden erkenntnistheoretischen Betrachtungen von entscheidender Bedeutung sein. Vor diesem Hintergrund kann man eine wissenschaftliche Untersuchungssituation eher unter dem Aspekt der "Problemlösung" oder eher unter dem der "Begriffsklärung" (oder Methodenklärung) sehen. Auch Fragen der Begriffsklärung *sind* Probleme (auf der nächsten Ebene); Fragen, die zu einem Zeitpunkt als die vordringlichen zu lösenden Probleme der Wissenschaft angesehen werden, können zu einem früheren Zeitpunkt als reine Fragen der Begriffsklärung, als auf einer "Meta"-Ebene angesiedelt gegolten haben. Die Frage muß also lauten: Was wird *gerade jetzt* für gegenständlich gehalten, was für werkzeughaft? Dies kann innerhalb einer Forschergemeinde variieren[28]. Es geht nicht so sehr darum, *grundsätzlich* mehr problemorientiert oder mehr methodenorientiert zu sein[29]; die Methoden für die Probleme von heute halten die Probleme von morgen bereit[30]. Insgesamt hat man es mit dem Phänomen zu tun, daß verschiedene *communities* verschiedenen Paradigmen (i.S. Kuhns) anhängen können.

[28]Vgl. die divergierenden zeitgenössischen Urteile über [Eilenberg und Mac Lane 1945] (dargestellt in 2.4.1).

[29]Diese Unterscheidung unterstreicht [Fisher 1972, 1100]: *"Two stereotypical styles of work are evident.* [. . .] *Men in* [the first] *category search for problems which can be solved by their methods, while those in the other try out many techniques in their attempts to solve a given set of problems".*

[30]Ein Beispiel hierfür geben die Standardvermutungen — vgl. 4.2.4 — ab: diese sind völlig verselbständigt; hierzu hat die anderweitige Lösung der ursprünglichen Probleme sogar gewissermaßen beigetragen.

Mit der *ersten* Lösung eines Problems[31] ist das Problem gelöst und interessiert den "Problemorientierten" nicht weiter; den "Begriffsorientierten" interessiert die *Klarheit* der Lösung (die er durch Analyse der Begriffe und eventuelle Einführung neuer Begriffe zu vergrößern hofft). Lösungen erscheinen "kompliziert" (unklar, *elaborate, tedious*), wenn keine Formulierung der Lösung in hergebrachten Begriffen vorliegt, die einfach, übersichtlich etc. genannt werden könnte. So ist die "Suche nach dem richtigen Begriff" motiviert; in solchen neuen Begriffen formuliert, ist eine einfachere Lösung desselben Problems möglich. In manchen Fällen wird durch die neuen Begriffe eine Ausdehnung der Lösungsmethode auf andere Probleme möglich; dies unterstützt die Überzeugung von der "Richtigkeit".

Fortschreiten der Mathematik ist möglich durch das Ineinandergreifen der Problemlösungstendenz und der Begriffsklärungstendenz. Erstere stellt Lösungen bereit, die in einem erreichten begrifflichen Stadium formuliert sind und allmählich (im Fortschreiten von Problem zu Problem) komplizierter, schließlich "zu" kompliziert werden. Zweitere analysiert die Begriffe und Methoden und schlägt Konzepte vor, die eine "Klärung" der Lösungen erlauben, aber auch auf neue Probleme führen. (Es soll hier allerdings nicht behauptet werden, dies sei der einzige Weg, auf dem neue Probleme auftreten. Auch bezieht sich die obige Analyse v.a. auf denjenigen Anwendungskontext, wo die KT am meisten *reagiert* (algebraische Topologie); was geschieht beim Lösen *noch ungelöster* Probleme?)

Derjenige, der sich mit der schieren Lösung des Problems (unabhängig von ihrer Klarheit) nicht zufrieden gibt, übernimmt die Aufgabe des Philosophen i.S. von Abschnitt 1.2.1.

Die Fälle, in denen ein bereits vorliegender Satz auf neuem Wege bewiesen wird, sind einerseits wichtig für die Legitimation von Begriffstransformationen (sozusagen als Tauglichkeitstests); umgekehrt können Begriffstransformationen auch gerade von daher motiviert sein, für einen wichtigen Satz einen "angemessenen" Beweis zu erbringen (es bliebe hier allerdings ein explizites Kriterium der "Angemessenheit" anzugeben). Beispiele sind das quadratische Reziprozitätsgesetz[32], der funktorielle Beweis von Brouwers Satz von der Invarianz der Dimensionszahl [Spanier 1966], Weils Beweis des Satzes von de Rham. Zu unterscheiden von der Angabe eines neuen, "angemesseneren" Beweises ist die Ausdehnung von Sätzen, die dank der Begriffstransformation möglich wird; Beispiele sind der Dualitätssatz von Poincaré (2.1.2.3, 4.2.3), der Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck (3.3.3.5), die Lefschetzsche Fixpunktformel (2.1.2.1, 3.2.3.3).

Im Vorangegangenen habe ich zuweilen auf den Gemeinplatz unter Mathematikern rekurriert, daß neue Begriffssysteme zu dem Zweck eingeführt werden, offene mathematische Probleme besser angehen zu können, als dies mit den bisher vorhan-

[31] Vgl. z.B. die Diskussion von Hopfs Lösung des "$K^n \to S^n$-Problems" in 2.1.2.2.

[32] *"Die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie hat nun wirklich gezeigt, daß der Inhalt des quadratischen Reziprozitätsgesetzes erst verständlich wird, wenn man zu den allgemeinen algebraischen Zahlen übergeht, und daß ein dem Wesen des Problems angemessener Beweis sich auch am besten mit diesen höheren Hilfsmitteln führen läßt, während man von den elementaren Beweisen sagen muß, daß sie mehr den Charakter einer nachträglichen Verifikation besitzen."* [[Hecke 1923, 59]; auch in [Dress 1974, 173]].

denen Begriffen gelang. Dieser Gemeinplatz bedarf allerdings der Kritik. Gelegentlich ist es nämlich gar nicht so, daß in dem neuen Kontext schließlich die alten Probleme gelöst werden können. Der wahre Kern des Satzes scheint mir zu sein, daß umfassende Änderungen der Begriffs- und Methodenrahmen immer dann anstehen, wenn sich die alten Begriffe "totgelaufen" haben[33]. Bei der Einführung der neuen Begriffe springt aber zuweilen nicht etwa plötzlich die Lösung des vermeintlich unbezwingbaren Problems wie von selbst aus der Nußschale (wie sich Grothendieck in *Recoltes et semailles* ausdrückt), sondern die neue Sprache (oder besser der neue Kontext, die neue "Sicht der Dinge") verselbständigt sich, bringt eigene Probleme hervor, die die Arbeitskraft derjenigen, die nach der neuen Weise arbeiten, in Anspruch nehmen. Angesichts dieser Beobachtung bestehen manche Vorurteile nicht weiter, so zum Beispiel die Binsenweisheit, die Akzeptanz von Begriffen hänge ausschließlich an ihrer Eignung zur Lösung offener Probleme. Das gesamte Konzept des Forschungsprogramms bedarf in diesen Fällen einer Umbewertung: Es sind nicht immer die großen offenen Fragen, die eine kollektive mathematische Aktivität zusammenhalten. Neue Richtungen (wie etwa die moderne Algebra Emmy Noethers oder ähnlich Grothendiecks Mathematik) erhalten nicht immer deshalb Zustrom, weil die jungen Forscher spüren, daß sie hier den "Gipfelsieg" über lange für unbezwingbar Gehaltenens mitgestalten können — sondern in diesen Fällen ist ein Paradigma eben gerade durch *seine* Fragen von seinen Vorgängern geschieden. Erst wenn etwas Zeit vergangen ist und der erhoffte Rückfluß auf die "großen" Probleme ausbleibt, kann es vorkommen, daß die Aktivität rund um eine einst neue, nun jedenfalls "geschiedene" Sprache abnimmt.

1.1.2 Formale Definitionen und Sprachspiele

1.1.2.1 Korrekte Verwendung und sinnvolle Verwendung

Wittgensteins für Mathematiker zweifellos schwer verdauliche Einsicht ist es gerade, daß es neben formalen Verwendungsregeln von Begriffen Verwendungsregeln anderer Art gibt, die sich nicht formalisieren lassen, aber gleichwohl eine regelmäßige Verwendung der Begriffe als Basis einer sinnvollen Kommunikation erlauben; ohne die Postulation eines solchen Typs von Verwendungsregeln — Wittgenstein spricht von Sprachspiel — scheint Sprache, so, wie sie vorfindlich ist, nicht stimmig beschrieben werden zu können.

Ich unterscheide entsprechend zwei Arten von "richtiger" Verwendung eines Begriffs, jeweils charakterisiert durch den Typus der dabei eingehaltenen Regeln.

- *Formale Regeln* gehen darauf, daß die beabsichtigte Verwendung des Begriffs tatsächlich eine Aktualisierung des Schemas ist, tatsächlich unter die Extension des im Schema Explizierten fällt. Die formalen Regeln sind in der mathematischen Definition des Begriffs zusammengestellt. Sind sie eingehalten, spre-

[33]Poincaré stellt — im Bezug auf Physik — darauf ab, daß Konventionen uninteressant werden können: *"Si un principe cesse d'être fécond, l'expérience, sans le contredire directement, l'aura cependant condamné"*. [1905, 146].

che ich von *korrekter Verwendung*. Man kann ihr Eingehaltensein prinzipiell zu jedem Zeitpunkt durch Anwendung eines Algorithmus überprüfen (Entfaltung des Begriffs, Nachrechnen).

- *Informelle Regeln* betreffen die Intention des Konzepts (Sprachspiel), kontrollieren den "stiftungsgemäßen" Einsatz. Sind diese eingehalten, spreche ich von *sinnvoller Verwendung*.

Können die Regeln des zweiten Typs überhaupt benutzt werden? Wittgenstein argumentiert so:

> Man kann sagen, der Begriff 'Spiel' ist ein Begriff mit verschwommenen Rändern. — "Aber ist ein verschwommener Begriff überhaupt ein *Begriff*?" [. . .] Frege vergleicht den Begriff mit einem Bezirk und sagt: einen unklar begrenzten Bezirk könne man überhaupt keinen Bezirk nennen. Das heißt wohl, wir können mit ihm nichts anfangen. — Aber ist es sinnlos zu sagen: "Halte Dich ungefähr hier auf!"? [. . .] Und gerade so erklärt man etwa, was ein Spiel ist. Man gibt Beispiele und will, daß sie in einem gewissen Sinn verstanden werden. — Aber mit diesem Ausdruck meine ich nicht: er solle nun in diesen Beispielen das Gemeinsame sehen, welches ich — aus irgend einem Grunde — nicht aussprechen konnte. Sondern: er solle diese Beispiele nun in bestimmter Weise *verwenden*. Das Exemplifizieren ist hier nicht ein *indirektes* Mittel der Erklärung, — in Ermangelung eines Bessern. Denn, mißverstanden kann auch jede allgemeine Erklärung werden. [Wittgenstein 1984c, §71]

Informelle Regeln spielen in der Mathematik eine größere Rolle, als man vielleicht auf den ersten Blick annähme. Mathematiker, die mit einem Konzept arbeiten, nehmen ein auf diesem Konzept beruhendes Konstrukt (das einwandfrei unter die formale Definition des Konzepts fällt) als "pathologisch" wahr, wenn sie das Gefühl haben, die "tatsächliche" Intention des zugehörigen Konzepts sei in dem Konstrukt irgendwie verfehlt worden. Das Kriterium dafür, wann diese Intention verfehlt ist, ergibt sich daraus, daß sie über ein Sprachspiel zur Verfügung steht: Man hat gelernt, in welchen Zusammenhängen das Konzept sinnvoll zu verwenden ist, und stellt fest, daß der im Falle der Pathologie aufgeworfene Zusammenhang nicht dazugehört. Die Konstruierbarkeit von Pathologien ist also ein Indiz, daß die "eigentlich gültige" Definition eines Begriffes nicht die formale ist, sondern ein Sprachspiel (unter das die Pathologien nicht fallen).

Das Gefüge aus Begriff und intendierter Verwendung ist nicht statisch, sondern hat eine Geschichte. Der "Kanon" von sinnvollen Verwendungen kann im Laufe der Geschichte erweitert werden, und oftmals werden demjenigen die größten Verdienste um die Weiterentwicklung eines Konzepts zugesprochen, der auf eine besonders innovative (ursprünglich nicht intendierte) Verwendung hinweist (ein Beispiel kommt in 3.3.2.2 zur Sprache). Begriffliche Innovation manifestiert sich also in verschiedenen Formen:

- Einführung neuer Begriffe;

- Übertragung hergebrachter Begriffe in neue Verwendungsperspektiven;

- Anpassung hergebrachter Begriffe an ihre intendierte oder neue Verwendung (ermöglicht durch Begriffsanalyse);

- Anpassung der Verwendungsperspektiven an die mittlerweile unter Erprobung erkannten Möglichkeiten des Begriffs.

Diese Möglichkeit, "Überraschendes" hervorzubringen, ergibt sich aus der Differenz zwischen Explikation und Explikandum. Die ursprüngliche Intention des Begriffs ist sein Explikandum. Die Extension der Explikation, die man nach und nach herausfindet, kommt natürlich der Explikation zu und nicht dem Explikandum, das dieser vorangeht.

1.1.2.2 Das Lernen informeller Regeln

Wie sind nun informelle Regeln, Sprachspiele gekennzeichnet? Im obigen Zitat Wittgensteins wird deutlich, daß man die sinnvolle Verwendung von Begriffen wie "Spiel" nur durch Exemplifikation lernen kann; an anderer Stelle spricht er von "Abrichten" (Dressur); heutzutage würde man wohl "Training" sagen (was etymologisch auch nichts anderes heißt). Es gibt keine andere Möglichkeit, sich die Fähigkeit zum Einhalten der informellen Verwendungsregeln anzueignen (das ist bei formalen Regeln nicht so; deren Eingehaltensein kann man nach einem Algorithmus prüfen).

Doch der Erwerb dieser Fähigkeit ist unverzichtbar. Im Fall mathematischer Begriffe ergibt sich zwar die korrekte Verwendung eines mathematischen Begriffes aus seiner Definition; allerdings vermag man, bloß weil man gewissermaßen die Grammatik beherrscht, noch nicht automatisch mit der Semantik umzugehen: Man muß auch lernen, unter welchen Umständen der Begriff *sinnvoll* einzusetzen ist. Ein Begriff ist stets ein Paar von zwei voneinander abhängigen Dingen: einer präzisen Begriffsdefinition einerseits und einer Begriffsintention andererseits. Wer die Intention eines Begriffs kennt, verfügt über eine Art Spürsinn, der zum "rechten" Umgang mit dem präzisen Begriff anleitet, der klarmacht, was mit dem Begriff "eigentlich" gemeint ist. Es wird in diesem Zusammenhang auch davon gesprochen, daß man sich als Lernender eine "Intuition" des Begriffs verschafft[34]; man wird erst dann sagen können, den Begriff "wirklich" verstanden zu haben, wenn man über diese Intuition verfügt. Diese setzt sich meist aus vielen einzelnen Bestandteilen zusammen — etwa einem Beispielkatalog; kurzen (unpräzisen) Zusammenfassungen des Begriffsinhalts; typischen Situationen, in denen, und typischen Weisen, auf die der Begriff sinnvoll eingesetzt werden kann; eventuell auch einer räumlichen Veranschaulichung. Man lernt also wie in einem Sprachspiel die Verwendung des Begriffs.

Z.B. kann man den Begriff der Kategorie erst lernen, wenn man viele andere mathematische Begriffe kennt[35] (deren Extensionen Beispiele von Kategorien sind); ähnliche Phänomene treten auch an vielen anderen Stellen auf. Vorwissen kann zur

[34] Hierbei scheint "Intuition" mit "Intention" verwechselt zu werden; wir werden aber in 1.2.4 sehen, daß die Rede von Intuition hier durchaus in einem gewissen Sinn gerechtfertigt ist.

[35] *"The subject matter of this paper is best explained by an example"* [Eilenberg und Mac Lane 1945, 231].

Bedingung dafür werden, daß man einen Begriff überhaupt verstehen kann, mit ihm etwas anfangen kann. Dies ist eine sehr wichtige Beobachtung, wie wir sehen werden.

Die Lehre nimmt auf diesen Punkt grundsätzlich Rücksicht; zugleich ist sie nicht unabhängig davon, welche als tieferliegend empfundenen Begriffe an ihrem Ende stehen. Eine Ausbildung wird zwar bei den einfacheren Konzepten anfangen, aber immer (zumindest im Kopf des Lehrers) darauf ausgerichtet sein, irgendwann die tieferen Begriffe zu erreichen. Der Lehrer wird das Verständnis seiner Schüler daran messen, ob sie schon an dem Punkt angekommen sind, den er für das "richtige" Verständnis hält.

Neue Begriffe werden zunächst erlernt *von den alten her*: "Was heißt dies?" $\rightarrow$ Rückübersetzung $\rightarrow$ "Aha!" (Abstraktion). Irgendwann beginnt man auf die Rückübersetzung zu verzichten ("Vertrautwerden") und verläßt sich eher auf die Charakterisierung des neuen Begriffs durch bestimmte Eigenschaften.

1.1.3 Die Rede von "Theorie", das Kriterienproblem und die Rolle der Anwendung

Die Auflistungen der möglichen Formen des Einsetzens und Transformierens von Begriffen bei 1.1.1 und 1.1.2.1 lassen offen, wie man sich überhaupt entscheidet, welche Begriffe man bilden und wie man sie transformieren soll (d.h. nach welchen Kriterien unter den "korrekten" Bildungen die "sinnvollen" ausgezeichnet werden). Ich werde Probleme diesen Typs unter dem Namen "Kriterienproblem" zusammenfassen[36]. Nach 1.1.2.1 können jedenfalls diese Kriterien keine formalen sein.

Der Anlaß zur Auseinandersetzung mit dem Kriterienproblem ist die Analyse der historischen Entwicklung einer Theorie. Hierzu ist zunächst festzuhalten, wie der Ausdruck "Theorie" in der Mathematik üblicherweise benutzt wird:

- Im naiven Gebrauch bezeichnet eine Theorie meist eine Sammlung von Resultaten und Methoden rund um ein bestimmtes Konzept (Beispiele: Zahlentheorie, Gruppentheorie, Knotentheorie, Spieltheorie, Beweistheorie...).

- Eine bestimmte mathematische Teildisziplin, nämlich die mathematische Logik bzw. Beweistheorie[37], bedient sich einer Explikation von $\lhd$Theorie$\rhd$: Eine Theorie ist die Gesamtheit der Aussagen, die man aus bestimmten Axiomen mit bestimmten Deduktionsmitteln ableiten kann ("deduktive Hülle"). Die Motivation dieser Explikation kommt vom Problem der Konsistenz her (wo man sich die Frage stellt: Kann man nicht zuviel ableiten?)

[36] Es fragt sich bereits hier, in welchem Verhältnis solche Kriterienprobleme zu erkenntnistheoretischen Fragen stehen. Trifft man die Entscheidungen aus Einsicht in ihre Richtigkeit? Durch solch eine Behauptung würden die Entscheidungen ja nachträglich "geadelt"! Es wird sich herausstellen, daß das Kriterienproblem für eine Erkenntnistheorie der Mathematik mit pragmatischem Charakter entscheidend ist.

[37] Man sieht hier, daß die Bezeichnung der Sammlung von Resultaten und Methoden zugleich auf diejenige Teildisziplin übergeht, die sich mit dem jeweiligen Konzept befaßt.

Abgesehen von dem speziellen Zweck, dem diese Explikation von ◁Theorie▷ dient, kann man sie wohl kaum als gelungene Explikation des Terminus "(mathematische) Theorie" in seinem gängigen Gebrauch ansprechen. Die Gruppentheorie im Sprachgebrauch der Mathematiker ist nicht dadurch gegeben, daß man sich die Gruppenaxiome und eine Logik erster Stufe nimmt und munter drauflos deduziert (man würde so gültige Sätze über den Begriff Gruppe erhalten). Mathematiker meinen mit Gruppentheorie eher die Untersuchung spezieller Konstruktionen oder Instanzen, z.B. mit dem Ziel der Klassifikation von Gruppen oder ähnliches. Theorie bezeichnet also im Sprachgebrauch der Mathematiker einen Wissens- und Methodenkorpus rund um einen Ausgangsbegriff; hierbei sind insbesondere die Methoden in der zugehörigen Theorie im beweistheoretischen Sinn überhaupt nicht präsent. Mehr noch: Die Zielsetzung der Beweistheorie, Erkenntnisse über die Widerspruchsfreiheit zu gewinnen, ist nur scheinbar unverzichtbarer Bestandteil der Legitimation einer Theorie. Die KT steht in der Geschichte nicht allein als eine Theorie, deren Widerspruchsfreiheit fraglich war[38], die aber beibehalten und verwendet wurde, *weil sie geeignet schien, zu Fortschritten der Forschung anzuleiten*. D.h. das Widerspruchsfreiheitskriterium ist in Wahrheit gar nicht voll in Kraft; es gibt ein anderes Kriterium.

Vorfindliche mathematische Theorien werden offensichtlich nicht als deduktive Hüllen im Sinne der Beweistheorie wahrgenommen; vielmehr werden wieder bestimmte Verwendungen eines Konzepts als "sinnvoll" hervorgehoben (vgl. 1.1.2.1). Es geht dabei nicht um die Unterscheidung zwischen wohlgeformten (syntaktisch sinnvollen) und semantisch sinnvollen Ausdrücken, sondern um die Auswahl besonders ausgezeichneter "interessanter" Aussagen innerhalb der semantisch sinnvollen. Entsprechendes gilt für die konzeptuellen Erweiterungen (Definitionen), die im Rahmen der Entwicklung einer Theorie vorgenommen werden: Eine Theorie ist ein Begriffs*system*, kein Begriffs"haufen"[39]. Daher kann sich eine Theoriegeschichte nicht in der Aneinanderreihung von Informationen über die ersten Definitionen verschiedener Begriffe erschöpfen, sondern muß den schrittweisen Aufbau eines *Netzes* von (aufeinander bezogenen) Begriffen aufzeigen.

Insgesamt entsteht folgender Eindruck: Eine Theorie, einmal formalisiert und auf die syntaktische Ebene übergegangen, bringt zunächst eine recht amorphe Masse von aus ihrem Sprachschatz (Ausdruckssprache und Deduktionsrahmen) möglichen begrifflichen und propositionellen Erweiterungen mit sich, die gewissermaßen aus dieser Masse ausgezeichnet, hervorgehoben, abgegrenzt werden können. *Auf diesem*

[38] Es hat sogar gerade im Bereich der formalen Logik viele "interessante" Systeme gegeben, die sich als widersprüchlich erwiesen:

> Inconsistencies [. . .] frequently occur in early versions of interesting formal systems: Frege's set theory, Church's 'set of postulates', Martin-Löf's type theory were all inconsistent. [Longo 1988, 94]

(Zu *Church's 'set of postulates'* vgl. insbesondere [Church 1956, 201]).

[39] *"Le savant doit ordonner; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison"* [Poincaré 1968, 158].

Hintergrund stellt sich die Frage nach Kriterien dafür, welche Auszeichnungen unter den prinzipiell möglichen man treffen soll. Der historische Befund (die Theorie in ihrer vorfindlichen Ausprägung) präsentiert sich als Ergebnis einer solchen Auswahl.

Auf einen solchen Eindruck rekurriert auch Poincaré in seiner Besprechung des Kriterienproblems[40] in *Science et méthode*. In einem Abschnitt, in dem er die in das logistische Projekt gesetzten Erwartungen dämpfen will, zeigt er das Problem so auf:

> Admettons même que l'on ait établi que tous les théorèmes peuvent se déduire par des procédés purement analytiques, par de simples combinaisons logiques d'un nombre fini d'axiomes, et que ces axiomes ne sont que des conventions. Le philosophe conserverait le droit de rechercher les origines de ces conventions, de voir pourquoi elles ont été jugées préférables aux conventions contraires.
>
> [. . .] Parmi toutes les constructions que l'on peut combiner avec les matériaux fournis par la logique, il faut faire un choix ; le vrai géomètre fait ce choix judicieusement parce qu'il est guidé par un sûr instinct, ou par quelque vague conscience de je ne sais quelle géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit. [Poincaré 1908, 158]

Poincaré sieht also die Aufgabe des Philosophen in der Erklärung des Zustandekommens der Konventionen; ich werde diese Sichtweise in Abschnitt 1.2.1 aufgreifen. Zum Schluß versucht sich Poincaré daran, eine solche Erklärung zu geben, und zwar unter Rückgriff auf einen "Instinkt" (im Anschluß an die wiedergegebene Passage deutet Poincaré kurz an, daß man natürlich fragen kann, wo ein solcher Instinkt herkommt, gibt aber keine Antwort). Die noch darzustellende pragmatische Position wird zu einer im Kern ganz ähnlichen, dabei aber vollständigeren und klareren Auffassung führen.

Zuallererst ist festzuhalten, daß der Historiker dem Eindruck von einer Auswahl aus einer amorphen Masse zu mißtrauen haben wird. Er wird sich zu fragen haben, ob die Mathematiker, die eine Theorie entwickeln (ausprägen — d.i. die besagten Auszeichnungen treffen), tatsächlich eine solche Sicht von ihrem Gegenstand als einem gewissermaßen noch unbehauenen Material haben, oder ob sie nicht vielmehr überhaupt nur im Blick auf gewisse beabsichtigte Auszeichnungen zu einer Theorie gelangen, die diese Auszeichnungen enthält.

Es fällt nicht schwer, eine vernünftige Hypothese darüber aufzustellen, von welchen Absichten die Mathematiker hier geleitet sind. Popper hat gemäß [Costazza 1993, 217] folgende Definition des Begriffes der (naturwissenschaftlichen) Theorie gegeben: "Die Theorie ist ein Werkzeug, das wir durch Anwendungen erproben und über dessen Zweckmäßigkeit wir in Zusammenhang mit seiner Anwendung entscheiden." Dehnt man diese Definition auf mathematische Theorien aus, kommt man zu einer utilitaristischen Position, die die Legitimität der Untersuchung "aus sich heraus interessanter" Theorien negiert; andererseits steht es außer Frage, daß man auch in der Mathematik fast immer über die "Zweckmäßigkeit" einer Theorie urteilt, insofern

[40] Das Problem wird auch noch von anderen Autoren angesprochen, z.B. von Hao Wang ⟨#6 S.36⟩ oder Gerd Heinz Müller ⟨#130 S.315⟩.

fast jede Theorie zumindest *innermathematische* Anwendungen hat[41]. Es kommt also auf das Zusammenspiel mit Anwendungen an; um die "Auswahl" (historisch) zu verstehen, muß man die Anwendungskontexte untersuchen, in denen die Auswahl vorgenommen wurde. In der Gegenüberstellung von Gegenstand und Werkzeug sind es die dem jeweiligen Ding als Werkzeug zugedachten Aufgaben, die seine spezifische Behandlung als Gegenstand (also die Auszeichnung gewisser Aussagen über das Ding vor anderen solchen Aussagen) bestimmen.

Aber mit den ursprünglichen Anwendungskontexten allein ist es nicht getan, denn erst der Umstand, daß man die Theorie "selbst" getrennt von den ursprünglichen Anwendungen entwickeln kann, sorgt für ihre Anwendbarkeit in verschiedensten nicht von vorneherein feststehenden Kontexten. Bei vielen Begriffen der KT reicht das Aufzeigen des originären Anwendungskontextes nicht aus, um die Bedeutung zu erklären, die den Begriffen später zukam; ein frappierendes Beispiel ist der Begriff des adjungierten Funktors.

Durch Verzahnung der Entwicklung einer Theorie und der Anwendung derselben nehmen beide ihre jeweilige Gestalt an: die gewünschten Anwendungen legen nahe, welche Aussagen man sinnvollerweise zu beweisen versucht (da sich im Falle des Erfolgs dieses Beweisversuchs aus ihnen eine Anwendung ergäbe); der deduktive Begriffsumfang hilft dabei, einzuschätzen, in welchen Anwendungsfeldern ein Einsatz sinnvollerweise versucht werden sollte (weil man mehr Berührungspunkte hat als die schiere Beobachtung, das gewisse Dinge unter den Begriff fallen). Es ergibt sich also, daß der Zustand der einen Entwicklungsrichtung als Leitprinzip für die Entwicklung der jeweils anderen funktioniert; man könnte von wechselseitigem Leitprinzip sprechen. Es scheint insgesamt sinnvoll, die Interaktion der KT mit einem ihrer Anwendungsfelder unter zwei Schnitten zu betrachten: einmal, wie sich das Anwendungsfeld dadurch verändert hat (z.B., daß man ◁freies Objekt▷ nunmehr kategorientheoretisch ausdrückt — vgl. 5.2.2.2), und zum andern, wie sich die KT dadurch weiterentwickelt hat (z.B. welche Typen von Kategorien sinnvollerweise unterschieden werden, wenn man eingrenzen will, wo von ◁exakte Sequenz▷ gesprochen werden kann — vgl. 3.1.5.1).

Mit der hier entwickelten historischen Methodik scheine ich mich von dem Schema zu entfernen, nach dem die Mathematik üblicherweise didaktisch vermittelt wird. Z.B. entwickelt Albrecht Dold in seinem Lehrbuch [1980] zunächst die Methoden und Konstruktionen der singulären Homologie. Kurz vor der Einführung der Mayer-Vietoris-Sequenzen sagt er:

> A reader who at this point would rather study some interesting geometric *applications* instead of pursuing further the *theory* of singular homology can continue with Chapter IV [. . .] [S.47]

Eine solche explizite Gegenüberstellung von *theory* und *applications* eines Begriffes ist ein gängiges Sprachspiel. Wie oben dargelegt, halte ich in einer historischen

---

[41] Aus modelltheoretischer Sicht gibt es zwei Möglichkeiten der "Anwendung" von Theorie: Einmal die Interpretation der Axiome (d.h. die Angabe eines Modells, eine Exemplifikation der Theorie); zum andern die "Einbettung" in eine andere Theorie (Addition der Axiome).

Perspektive eine Trennung von Theorie und Anwendungen nicht für sinnvoll, sondern behaupte im Gegenteil, daß der historische Verlauf der Theorieentwicklung am überzeugendsten aus den Interaktionen mit den Anwendungen erklärt werden kann; zugleich können sich auch aus dem jeweils aktuellen Stand der Theorieentwicklung Erklärungen für den Verlauf von Anwendungsversuchen ergeben. Ob die historische Perspektive unter diesem Gesichtspunkt zwingend in einen Gegensatz zu einer lehrbuchmäßigen Darstellung treten muß (wo die Trennung gemeinhin für sinnvoll gehalten wird), lasse ich einmal dahingestellt. Man könnte z.B. Dolds Vorschlag, erst in die Anwendungen hineinzusehen, bevor man in der Theorieaneignung weiterschreitet, auslegen als implizite Anerkennung der Bedeutung der Anwendungen nicht nur für die historische Theorieentwicklung, sondern auch für die individuelle Theorieaneignung[42].

1.2 Aufgaben und Formen der Erkenntnistheorie

1.2.1 Die Aufgabe des Philosophen; mögliche Ziele einer Erkenntnistheorie von Mathematik

Erinnern wir uns an Poincarés Bestimmung der Aufgabe des Philosophen: *"Le philosophe conserverait le droit de rechercher les origines [des axiomes], de voir pourquoi elles ont été jugées préférables aux conventions contraires."* Demnach beginnt die Aufgabe des Philosophen dort, wo die des Mathematikers endet: Für einen Mathematiker ist ein Resultat richtig, wenn er den Beweis hat; für den Philosophen ist ein Resultat richtig, wenn der Beweis zeigt, welche Voraussetzungen eingegangen sind und welche konzeptuellen Rahmenbedingungen nötig sind. Er will *verstehen*, wieso gerade diese Axiome und keine anderen gewählt wurden[43]. Insbesondere bewegt den Philosophen die Frage, ob die jeweils gewählten Axiome tatsächlich das intendierte Modell erfassen. Die Berechtigung der Frage ergibt sich aus dem in 1.1.2.1 Gesagten (formale Definitionen, Axiome reichen keineswegs automatisch aus, die Intention eines Konzepts zu erfassen); gleichzeitig ist die Frage methodologisch sehr schwierig, denn eine Begriffsbildung steht ja zunächst nur als formale Explikation zur Verfügung[44].

[42]Andererseits muß dies noch keineswegs heißen, daß sich charakteristische Züge der Theorieentwicklung auch an der Theorieaneignung feststellen ließen (dies wäre dann die mathematikdidaktische Version des biogenetischen Prinzips; Literatur hierzu gebe ich bei [Krömer 1998] Kapitel 7 und [Krömer 2000] an): In einer historischen Würdigung des Begriffs der singulären Homologie wäre z.B. erst noch nachzuprüfen, ob sich tatsächlich in ihrem Fall die Motivation der Betrachtung von Mayer-Vietoris-Sequenzen aus bestimmten Anwendungen ergeben hat. Ohne zu weit abschweifen zu wollen: Die Antwort liegt wahrscheinlich darin, daß Dold eben von *einer* festen Homologietheorie ausgeht, während Eilenberg und Steenrod zusammenstellen, was einem in der Auseinandersetzung mit *jeder* Homologietheorie zwangsläufig begegnet (vgl. 2.5.2) — und zu letzterem gehören die Fragen, die auf Mayer-Vietoris-Sequenzen führen.

[43]Zu Poincarés Hervorhebung des Verstehensziels vgl. auch [Heinzmann 1998b].

[44]Quines Ergebnis war gerade, daß man über das Explikandum unabhängig von der Explikation nicht sinnvoll sprechen kann (in der Kombination "sinnvoll sprechen über" verwende ich das Wort

Jedenfalls wird deutlich, daß die Aufgabe des Philosophen mit einem Kriterienproblem verbunden ist.

Die Intention der noch näher darzustellenden pragmatischen Position ist es, daß diese Aufgabe des Philosophen von den Forschern selbst, innerhalb ihrer Arbeit, wahrgenommen wird. In der Realität erfolgt jedoch zumindest eine explizite Wahrnehmung der Aufgabe meist erst nachträglich (Poincaré stellte hiervon eine seltene Ausnahme dar). Voraussetzung dafür, daß sich der nachträglich intervenierende Philosoph in einer Arbeitssituation befindet, die so weitgehend wie möglich mit der Arbeitssituation der ursprünglichen wissenschaftlichen Akteure übereinstimmt — so daß die Wahrnehmung der philosophischen Aufgabe aus der Sicht des Pragmatismus gerade noch sinnvoll möglich ist — ist offensichtlich eine historisch orientierte Methodik, der *per se* an der Rekonstruktion jener ursprünglichen Arbeitssituation gelegen ist.

Kant sah die Aufgabe von Erkenntnistheorie darin, die Bedingungen der Möglichkeit des Erkennens von Gegenständen zu bestimmen. Die Erkenntnistheorie geht also nicht darauf, was die Gegenstände *sind* (Ontologie), sondern darauf, wie wir sie erkennen (Zugangsweisen). In der pragmatischen Philosophie fällt allerdings beides in einem bestimmten Sinn zusammen, wie wir sehen werden. Das 19. Jahrhundert (insbesondere Helmholtz) hat gegenüber Kant die Bedeutung der physiologischen Rahmenbedingungen für diesen Zugang hervorgehoben. Gleichwohl hebt sich die Erkenntnistheorie von der Kognitionswissenschaft ab, da sie auf die Logik geht, nicht auf das Gehirn; der Pragmatismus setzt allerdings den Akzent auf die Erkenntnismittel — wozu auch das Gehirn gehört.

Was heißt nun "Erkennen von Gegenständen"? Gemeint ist, daß wir Aussagen über Gegenstände *einsehen* (wir können dann von den Aussagen als *Sachverhalten* sprechen); und die Erkenntnistheorie untersucht, was die Bedingungen für die Möglichkeit solchen Einsehens sind.

Betreibt man Mathematik, so versucht man, für Aussagen Beweise zu erbringen, d.h. die fraglichen Aussagen logisch aus anderen Aussagen (Prämissen) abzuleiten. Eine Aussage einsehen können, das heißt, einen Beweis für sie haben — sofern die Prämissen des Beweises bereits eingesehen sind. Es bleibt allerdings zu klären, worauf die Einsehbarkeit jener Prämissen beruht. Entweder gibt es für diese ihrerseits Beweise (d.h. logische Ableitungen aus wieder anderen Aussagen), oder man kommt überein, sie an den Anfang zu stellen (man spricht dann von Axiomen oder Postulaten). Der Philosoph interessiert sich nun dafür, wie die Entscheidung zustandekommt, welche Aussagen man als Axiome nehmen soll. Denn auf dieser Entscheidung beruht ja die Möglichkeit des Einsehens der abgeleiteten Aussagen.

Bei herkömmlichen Ansätzen in der Erkenntnistheorie[45] wird nach Reichenbach deren Aufgabe in verschiedene Teilaufgaben aufgeteilt: Erkenntnisleitung, Erkenntnisbegründung, Erkenntnisbegrenzung. Es wird üblicherweise ein Akzent auf Er-

"sinnvoll" in einer anderen Bedeutung als in der bei 1.1.2.1 besprochenen Kombination "sinnvoll verwenden").

[45]In Abgrenzung zum pragmatischen Ansatz; in 1.3.1 wird letzterer eingehender dargestellt und mit den herkömmlichen Ansätzen verglichen.

kenntnisbegründung gesetzt.

Die "Aufgabe des Philosophen", die ich oben im Anschluß an Poincaré bestimmt habe, erschöpft sich darin allerdings nicht, denn die Frage, wieso gerade bestimmte Axiome und keine anderen gewählt wurden, ist offensichtlich eine Frage nach der Erkenntnisleitung[46]: Welche Kriterien sind wirksam? Die jeweilig vorfindliche Mathematik präsentiert sich als Ergebnis einer historischen Abfolge von Entscheidungen von Fragen der Art "Welche Gegenstände soll man betrachten? Welche Definition soll man machen? Welchen Satz soll man zu beweisen versuchen?" etc. — kurz: von Instanzen des "Kriterienproblems". Die Erkenntnistheorie scheint mir die Aufgabe zu haben, diese Kriterien — deren sich die Forscher bedienen, ohne sie zu evozieren — zuallererst anzugeben. Denn diese Kriterien können ja nicht ohne Auswirkung bleiben auf die Bedingungen der Möglichkeit des Erkennens der Gegenstände, für deren Betrachtung man sich entschieden hat.

Die Aufgabe einer solchen Erkenntnistheorie besteht allerdings nicht darin, *normativ* das Kriterienproblem zu lösen (also dem Wissenschaftler zu sagen: "Verfahre so und so, und Du wirst das Richtige finden"). Sie besteht auch nicht nur darin, den beobachtbaren Mechanismus der Entscheidungsfindung zu beschreiben und zu analysieren; eine Lösung des Kriterienproblems kann nicht von Philosophen aufgrund solcher Analyse vorgelegt werden, sondern nur von Mathematikern immer wieder neu instantiiert.

Man muß sich darüber klarwerden, was man von einer Erkenntnistheorie erwarten kann. Man kann keinesfalls einfach Fragen der Art: "Welches sind die Bedingungen für die Möglichkeit des Erkennens dieses oder jenes Gegenstands?" hernehmen und von der Erkenntnistheorie erwarten, daß sie eine definitive Antwort gibt. Denn man kann ja nicht so tun, als hätten die Termini "Erkennen" und "Gegenstand" überhaupt eine feste Bedeutung unabhängig von der jeweiligen erkenntnistheoretischen Position.

1.2.2 Die Suche nach "Grundlagen"

1.2.2.1 Grundlage: mathematisch und erkenntnistheoretisch

Ähnlich wie man die Aufgabe (oder Perspektive) des Philosophen von der des Mathematikers unterscheiden kann, so kann auch der Ausdruck "Grundlage" (der Mathematik) eine mathematische und eine philosophische Bedeutung haben. Eine mathematische Grundlage der Mathematik oder eines ihrer Bereiche ist eine Grundlage i.S. von Hilberts "Grundlagen der Geometrie", besteht also in der Angabe von Axiomen. Von philosophischer oder erkenntnistheoretischer Grundlage würde man allerdings erst sprechen, wenn man am "Boden" angekommen ist, wenn die Analyse nicht mehr

[46]In der Akzentuierung der Aufgabe der Erkenntnisleitung schließe ich mich verschiedenen Autoren an, die die heuristische Funktion von Grundlagenforschung hervorheben, z.B. Wang ⟨#3 S.xxxii⟩, Lawvere (8.1.2), Bénabou ⟨#4 S.18⟩ und indirekt Wittgenstein: *"Un esprit wittgensteinien reproche à un fondement ensembliste [. . .] de ne procurer aucun lien entre la définition des axiomes et les activités conduisant au choix de son modèle"* [Heinzmann 2003, 9]. Auch Machs Plädoyer für Geschichtsforschung, besprochen in 0.3.1, kann so verstanden werden.

weiter zu treiben ist — während man sich bei den mathematischen Grundlagen eher darauf *einigt*, sie nicht mehr weiter zu treiben, ohne festzustellen, ob diese Einigung zwingend vorgenommen werden muß oder nicht; auch handelt es sich zumeist um eine Einigung bis auf Widerruf.

Der Gedanke dieser Unterscheidung geht auf Aristoteles zurück, der zwischen ὕλη und εἶδος unterschied bzw. zwischen *causa materialis* (Grund i.S. von Boden) und *causa formalis* (Grund i.S. von Ursache). Mit "Boden" ist hier gemeint: Man dringt zu den Bedingungen für die Möglichkeit des Erkennens der Gegenstände vor (auf diesen Bedingungen (be-)"ruht" alles).

Mathematische Grundlegung heißt Methoden- und Begriffsanalyse: Die Methoden und Begriffe der Disziplin werden gesammelt, festgelegt, organisiert, schließlich untersucht und weiterentwickelt in einem dafür geeigneten Rahmen. Insbesondere werden sie expliziert. Philosophische Grundlegung heißt Verstehen: Die Aussagen, die von der jeweiligen Disziplin gemacht werden, werden begründet — aber nicht in dem Sinne, in dem dies schon innerhalb der Disziplin geschieht: hier geht es um Begründungen für die Stichhaltigkeit der internen Begründungsverfahren, z.B. durch Analyse der Axiome.

Mit dieser Unterscheidung im Hinterkopf können wir besser verstehen, welche Kritik Kreisel an einem bestimmten Gebrauch des Ausdrucks "Grundlage" durch Mathematiker übt:

> The reader will have heard such expressions as 'foundations of ring theory', not in the sense of a logical analysis in terms of some foundational scheme, but simply as an *organization* or presentation of the subject. The expression [. . .] corresponds to a *positivistic* conviction which became current after the failure of Hilbert's programme. Forgetting that the latter was intended to establish a really quite implausible conjecture (namely the possibility of a formalist reduction of mathematical reasoning) people thought there was no hope of *any* foundational analysis! [. . .] On this same view the discovery of axioms is supposed to be made by describing what mathematicians 'do' and not by analyzing concepts. [. . .] The view is most unempirical if one remembers how axioms were actually found! [Kreisel 1969, 244]

Letztlich läuft der Vorwurf darauf hinaus, daß man mathematische und philosophische Grundlagen nicht verwechseln darf; setzt man sie bewußt gleich, ist dies Positivismus. Hingegen erwartet Kreisel von einer Grundlage, die den Namen "philosophisch" verdient, eine Erklärung (eine Antwort auf sinnvolle Fragen; vgl. 1.2.2.3); in diesem Punkt stimme ich mit ihm überein. Seine strikte Trennung zwischen Konzeptanalyse und Beschreibung dessen, was Mathematiker 'tun', ist aber aus pragmatischer Sicht nicht verständlich[47].

[47] Auch historisch ist sein Vorwurf, in der Redeweise von den Grundlagen bestimmter Einzeldisziplinen komme notwendig eine positivistische Überzeugung zum Vorschein, nicht recht haltbar. [Heinzmann 2002] zeigt auf, daß der Rede von den "Grundlagen der Mathematik" historisch die Rede von den "Grundlagen der (jeweiligen) Einzeldisziplin" (z.B. Geometrie) vorausging.

1.2.2.2 Grundlegungsbestrebungen und die axiomatische Methode

Die axiomatische Methode hat sich von einer Methode der mathematischen Grundlagenforschung zu einer Methode der Forschungsdisziplin Mengenlehre (und anderer mathematischer Forschungsdisziplinen) gewandelt. Dies liegt vor allem daran, daß sich die Interpretation der Axiome gewandelt hat. Eine Wandlungsrichtung kann man so darstellen:

- Bei Aristoteles sind Axiome wahre Beschreibungen;
- Bei Hilbert haben die Axiome nicht die Aufgabe, zu beschreiben, sondern zu definieren; es wird von ihnen nicht verlangt, daß sie wahr, sondern daß sie widerspruchsfrei sind;
- Beim hypothetisch-deduktiven Standpunkt wird, aufgrund der Tatsache, daß ein Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht möglich ist, auf diesen verzichtet; die Position ist also: "es geht, da bisher noch nichts passiert ist" (vgl. 6.2.3).

Doch diese Wandlungsrichtung ist nicht die entscheidende, da man es bei Bourbaki immer noch mit Erkenntnistheorie zu tun hat (vgl. Anm.72).

Eine andere Wandlungsrichtung "zweigte" von der obigen ab. Das Programm des Logizismus beruhte auf der Beobachtung, daß die Logik besonders intuitiv ist in dem Sinn, daß man für das Einsehen der Richtigkeit logischer Sätze keines weiteren Zurückführens auf noch intuitivere Wahrheiten bedarf. Die im logizistischen Programm zutagegetretenen Probleme (Russells Antinomie) führten dann allerdings dazu, über die Logik hinaus auch Existenzpostulate (wie das Reduzibilitätsaxiom der Typentheorie oder das AC) in die Grundlagen einzubeziehen. Diese Zurückführung der Mathematik auf (axiomatische) Mengenlehre fand in einem weiteren Kreis Anerkennung als das Programm Hilberts, im Rahmen solch einer Zurückführung einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Mathematik zu finden. Man traute den Axiomen der Mengenlehre zu, einzufangen, was man sich unter den Eigenschaften von Extensionen vorgestellt hat (was intendiert war); insofern waren diese Axiome "intuitiv".

Nun war die ursprüngliche Intention natürlich in Freges unbeschränktem Komprehensionsaxiom ausgedrückt; als sich herausgestellt hatte, daß dieses Axiom nicht haltbar ist, war also gewissermaßen eine Richtschnur erforderlich, entlang derer man geeignete Substitute für dieses Axiom aufstellen kann. Wie sah diese Richtschnur aus? Als historische These mag man behaupten, daß die Axiome der Mengenlehre derart zusammengestellt wurden, daß man diejenige Mathematik mit ihnen machen kann, die man machen wollte[48]. Allerdings kann unter dieser Maxime der axiomatische Rahmen irgendwann über das hinausgehen, was ursprünglich intendiert war und was man zunächst mit dem unbeschränkten Komprehensionsaxiom zu explizieren hoffte!

[48]Da die vorliegende Arbeit keine Geschichte der Mengenlehre ist, werde ich diese These keiner näheren Überprüfung unterziehen. Einen ähnlichen Weg des Ansammelns von Axiomen für die *category of all categories* behauptet Lawvere gegangen zu sein; ⟨#127 S.307⟩.

Die Reibung zwischen dieser Maxime und der genannten Vorstellung von der Intuitivität läßt sich etwa am Beispiel des Auswahlaxioms darstellen. Dessen Unabhängigkeit[49] von ZF zerstört die Hoffnung, in den Axiomen der Mengenlehre völlig intuitive Aussagen zu haben, und zwar in folgendem Sinn: Nun *kann* $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ gelten, es *kann* aber auch $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{AC}$ gelten. Somit geben die Axiome also nicht den intuitiven Mengenbegriff wieder, denn sie sind nicht (wie zuvor praktiziert) Beschreibung eines Mengenbegriffs *ohne* Thematisierung des Geltungsanspruchs[50]: Man merkt plötzlich, daß das, was intuitiv war, so nicht beschrieben werden kann: "Was ich geglaubt habe, ist ja vielleicht gar nicht gültig?"

Damit wurde die Rolle der axiomatischen Mengenlehre als Grundlegung eines inhaltlichen Begriffs brüchig, und sie spielt nun eher die Rolle einer Basis für deduktives Schließen und mathematische Differenzierungsmöglichkeiten. [Heinzmann 2002] drückt es, [Weyl 1985, 13] paraphrasierend, so aus:

> Whereas the axiomatic method was [formerly] used for the purpose of elucidating the foundations on which mathematicians build (Hilbert's position), it has become a tool for concrete mathematical research [. . .]; while formerly Axiomatics was concerned with axioms which determine the structure of the system, axiomatic systems are now the common basis for the investigation of individual entities arising by specified constructions and differentiations such as the study of definable sets of real numbers (descriptive set theory) or by the variety of models of a given system.

1.2.2.3 Der Streit über die Relevanz von Grundlagen

War die Grundlagendebatte des beginnenden zwanzigsten Jahrhunderts geprägt von dem Aufeinandertreffen verschiedener konkurrierender Entwürfe, so geht die Debatte der zweiten Jahrhunderthälfte unterschwellig in eine ganz andere Richtung — nämlich darüber, ob Grundlagen überhaupt relevant sind oder nicht. Soziologisch betrachtet stellt sich diese Frage als Konflikt dar zwischen der großen Gruppe der "arbeitenden Mathematiker" einerseits (das sind *per definitionem*[51] diejenigen, in deren Arbeit — und oftmals auch in deren Perspektive — Grundlegungsprobleme

[49] Ausführlicher wird dieser Punkt für die Kontinuumshypothese in 7.3.3 diskutiert.

[50] Vgl. hier Abschnitt 1.3.2.

[51] Die Rede vom *working mathematician* geht vermutlich auf Hardys Autobiographie zurück (*A mathematician's Apology* 1940 (1967) S.61, 143). [Mathias 1992, 7] nimmt irrtümlich an, Bourbaki sei der Urheber der *"odious phrase"*; richtig ist natürlich, daß Bourbaki Multiplikator dieser Rede und der damit verbundenen Auffassung war. Den komplementären Forschertypus des "nicht arbeitenden Mathematikers" definiert [Mehrtens 1990, 159] folgendermaßen: *"[Mit] nicht arbeitenden Mathematiker[n sind] Grundlagenforscher oder Mathematikphilosophen gemeint [. . .], mathematisch ausgebildet und darum ›Mathematiker‹, jedoch nicht an der ›eigentlichen‹ Mathematik arbeitend"*. Diese Gruppe als "nicht arbeitend" zu bezeichnen, ist von den Verwendern der Sprechweise (denen, die sich selbst als *working mathematicians* bezeichnen; allen voran Hardy) wohl durchaus herabsetzend gemeint. Ich verweise noch auf meine Unterscheidung der *mainstream*-Mathematik von denjenigen mathematischen Disziplinen, die auf der Grenzlinie zwischen Mathematik und Philosophie anzusiedeln sind, wie der mathematischen Logik und der Mengenlehre (0.3.2.3); diese Unterscheidung ist mit der hier besprochenen nicht deckungsgleich, beide hängen aber zusammen, was ihre jeweilige diskursive Funktion betrifft.

nicht vorkommen) und der sehr viel kleineren Gruppe der Mathematikphilosophen andererseits. Letztere Gruppe hat sich vermutlich erst im Zuge jener vorangegangenen Grundlagendebatte einigermaßen institutionell etablieren können[52], so daß die Soziologie mit einer Erklärung des skizzierten Konflikts schnell bei der Hand ist, nämlich derjenigen, daß diese kleine Gruppe weiter um institutionell manifestierte Relevanz kämpfen muß.

Die Soziologie vermag allerdings nicht das Desinteresse zu erklären, das weite Teile der arbeitenden Mathematiker der Arbeit der Mathematikphilosophen entgegenbringen. Ich versuche mich, entsprechend der teilweise erkenntnistheoretischen Natur des Beitrags der vorliegenden Arbeit, in Optimismus und gehe davon aus, daß nicht so sehr die Fragen, mit denen sich die Philosophen beschäftigen, für irrelevant gehalten werden, sondern daß vielmehr die spezifische Zugangsweise (beginnend bei der Formulierung der Fragen), die bislang in der Mathematikphilosophie vorgeherrscht hat, für ungeeignet gehalten wird, relevante Ergebnisse hervorzubringen. Kreisel vertrat eine pessimistischere Sicht, wonach weithin eine formalistisch-positivistische Doktrin (also eine Ablehnung jeder Bemühung um andere als mathematische Grundlagen) in Kraft sei; Kreisel bezeichnet diese Doktrin als einen *“Kult der intellektuellen Impotenz, [weil] sie [. . .] uns vormachen [will], daß natürliche Fragen sinnlos seien”* [1974, 71]. Diese pessimistische Sicht mag zu einem bestimmten Zeitpunkt berechtigt gewesen sein[53]; ich glaube aber zu spüren, daß die Fachmathematiker heutzutage durchaus ein Interesse an philosophischer Auseinandersetzung mit ihrer Disziplin haben.

1.2.2.4 Grundlage: Fundament oder Flußbett?

Wenn meine Diagnose zutrifft, daß das Desinteresse weiter Teile der arbeitenden Mathematiker an der Arbeit der Mathematikphilosophen weniger auf die originär philosophischen Fragen als vielmehr auf die bisher von der Mathematikphilosophie präsentierten Ansätze zur Bearbeitung der Fragen geht, so kann es nicht ausbleiben, daß die Philosophie hierauf zumindest in gewissem Maße reagiert und alternative Konzepte entwickelt und zur Diskussion stellt. Ein Kritikpunkt scheint zu sein, daß philosophische Grundlegungen meist normativ auftreten und eine Anpassung an sich weiterentwickelnde wissenschaftliche Praxis nicht zulassen. Man könnte nun meinen, dieser Mißstand läge in der Natur der Sache, da die Philosophie eben den “Boden” suche und der sich schlechterdings nicht ändern könne. Hier scheint Wittgenstein anderer Meinung zu sein — wenn man die folgende, zugegeben sehr poetische Äu-

[52]Die Trennung der beiden Aufgaben Grundlagenforschung und “Arbeit an der eigentlichen Mathematik” scheint historisch gewachsen zu sein im Zuge der zunehmenden Spezialisierung des einzelnen Forschers; noch Hilbert (der freilich auch ein Ausnahmetalent war) konnte beide Aufgaben in einer Person vereinen. I.d.v.A. wird der Gedanke vertreten, der Mathematiker habe prinzipiell beide Funktionen des Forschers und des philosophisch Reflektierenden in einer Person zu vereinen. Die Akzentsetzung ist hierbei, daß zu einer kompetenten philosophischen Reflektion zuallererst eine genaue Kenntnis der reflektierten Wissenschaft erforderlich ist.

[53]Es liegt nahe, anzunehmen, daß Kreisel hier an Bourbakis Rede von den “Pseudoproblemen” denkt (vgl. 6.2.1).

ßerung so verstehen darf.

> 97. Die Mythologie kann wieder in Fluß geraten, das Flußbett der Gedanken sich verschieben. Aber ich unterscheide zwischen der Bewegung des Wassers im Flußbett und der Verschiebung dieses; obwohl es eine scharfe Trennung der beiden nicht gibt.
>
> [. . .]
>
> 99. Ja, das Ufer jenes Flusses besteht zum Teil aus hartem Gestein, das keiner oder einer unmerkbaren Änderung unterliegt, und teils aus Sand, der bald hier bald dort weg- und angeschwemmt wird. [Wittgenstein 1984b]

(Wollte man sehr weit in der Philosophiegeschichte zurückgehen, so könnte man sagen, Wittgenstein stelle hier Heraklit über Parmenides.)

Es gibt mathematische Begriffe und Theorien, deren Form sich wandelt, um in andere Theorien eingreifen zu können. Darf eine Grundlage solche Wandlungsmöglichkeiten behindern? [Kreisel 1969] kritisiert diese Denkweise, Grundlagen dürften nicht "im Weg sein". Hingegen appellieren McLarty und Bénabou an die Beweglichkeit von Grundlagen.

> It might become common sense that foundations come out of practice, and will change as practice develops, and will lose contact with the subject if they do not change with the practice. [McLarty 1990, 370]

> "Foundations" can only be "foundations of a given domain at a given moment", therefore the framework should be easily adaptable to extensions or generalizations of the
> #4 domain, and [. . .] it should suggest how to find meaningful generalizations [Bénabou 1985, 10].

Bénabou meint natürlich eine spezifische Form von Grundlegung *(framework)*, insbesondere also mathematische und nicht erkenntnistheoretische Grundlagen; die Stoßrichtung seiner Äußerung ist aber schon die, daß die damit formulierte Adäquatsheitbedingung an eine Grundlegung der Kategorientheorie von mengentheoretischen Grundlegungen jedenfalls nicht erfüllt wird, wie er im Anschluß aufzeigt (7.4.4) — und es ist ja klar, daß die übliche erkenntnistheoretische Implikation mengentheoretischer Grundlagen nicht die eines beweglichen Flußbetts ist, das sich praktischen Bedürfnissen anpaßt.

1.2.3 Thiels Vorschläge zur Revision des Grundlagenbegriffs

Es hat in der Tat alternative philosophische Ansätze gegeben; ich möchte hier die Auffassung Christian Thiels zum Grundlagenbegriff, die er in [1995] niedergelegt hat, herausgreifen, da die Auseinandersetzung mit dieser Auffassung für die Entwicklung meiner eigenen Auffassung von Bedeutung war[54].

[54] Thiel befaßt sich mit dem Problem der Grundlagenkrisen auch schon in [Thiel 1972], einer Arbeit, mit der ich mich noch nicht eingehend auseinandergesetzt habe. Besonders interessant erscheint mir, daß er dort Vorschläge zur Streitbeilegung erarbeitet.

1.2.3.1 Thiels Rede von “Grundlagen*disziplin*”

> Die Frage, ob es eine Fundamentaldisziplin der Mathematik gibt, wird im folgenden als die Frage verstanden, ob es unter den Teildisziplinen der Mathematik eine gibt, die als für die anderen und damit für die Gesamtmathematik “fundamental”, d.h. grundlegend, angesehen werden kann. Offensichtlich läßt sich dies erst sinnvoll erörtern, wenn erstens geklärt ist, welche Teildisziplinen die Mathematik überhaupt hat, welche Rolle sie spielen und in welchem Verhältnis sie zueinander stehen, und wenn zweitens feststeht, welche Bedingungen eine Disziplin erfüllen muß, um als “Fundamentaldisziplin” gelten zu können. [. . .] [Thiel 1995, 303]

Thiel nimmt mit seiner Rede von Fundamentaldisziplinen Rücksicht auf den Umstand, daß die bislang üblichen Vorschläge einer Grundlegung der Mathematik alle so aussahen, ein bestimmtes Teilgebiet der Mathematik auszuzeichnen. Was nun die erste Präliminarfrage nach den Teilgebieten der Mathematik betrifft, hebt Thiel sogleich das Hauptproblem hervor:

> [Es] ist unübersehbar, daß Zahl und Art der mathematischen Teildisziplinen vom jeweiligen historischen Entwicklungsstand der Mathematik abhängen, sich also im Laufe der Zeit ändern [ebd.].

Thiel nimmt auf den nächsten Seiten diese Beobachtung zum Anlaß, zunächst für die antike Mathematik die Geometrie als eine Fundamentaldisziplin zu beschreiben und dann überblickartig zu schildern, welche Disziplinen sich in der Neuzeit hervorgetan haben, bis hin zu der Feststellung, daß der Akzent mittlerweile offenbar auf der Interaktion von Disziplinen liegt, auf ihrer Anwendung aufeinander. Er referiert entsprechend Bourbakis Rede von den klassischen Disziplinen als den *“Kreuzungspunkten [. . .], an denen mehrere allgemeine mathematische Strukturen zusammentreffen und aufeinander einwirken”* [Bourbaki 1974, 155]. Thiel erarbeitet aus Bourbakis Position als eine mögliche Antwort auf seine zweite Frage schließlich, daß es nicht so sehr auf Fundierung der Mathematik als mehr auf Vereinheitlichung derselben ankommt (S.308).

1.2.3.2 Thiels Suche nach einem Kanon von Operationen

[Thiel 1995] skizziert auf S.313f ein Programm der “Erfassung der möglichen Typen von Operationen, die in der Mathematik auf ihrem gegenwärtigen Stand vorgenommen werden”. Thiel zieht folgenden Schluß:

> Das Ergebnis könnte sehr wohl sein, daß die Universalität der Mathematik auf der immer neuen Anwendbarkeit der (jeweils bekannten!) sehr allgemeinen Operationen beruht und nicht darauf, daß die Mathematik von besonders allgemeinen (“ontologisch ersten” oder jedenfalls irreduziblen) Gegenständen handelt. Daß wir in der Mathematik i.a. über “Mengen von . . . ” reden, und uns mit den Pünktchen auf jeweils verschiedene, aber stets inhaltlich bestimmte Sorten mathematischer Gegenstände beziehen, legt in der Tat bereits nahe, daß wir zwar immer die gleichen mengentheoretischen *Operationen* in verschiedenen Gebieten der Mathematik ausführen, daß es

> aber nicht “Mengen” als autonome *Gegenstände* gibt, die eine eigene Kategorie bilden oder etwa gar die Gegenstände “in sich” haben, deren Typus an der Stelle der Pünktchen unseres Ausdrucks genannt wird. Es gilt daher zu bedenken, ob nicht die Idee einer Fundamentaldisziplin der Mathematik im Sinne einer “regionalen Ontologie” besser *ad acta* gelegt und statt dessen eine “Fundamentaldisziplin” ins Auge gefaßt werden sollte, die als fundamentaler *Kanon* für den Umgang “mit allem und jedem” in der Mathematik gerade die Aufgabe erfüllt, die einer Fundamentaldisziplin im Sinne der bisherigen Darlegungen zugedacht war [1995, 314].

Thiel klammert KT und Topostheorie aus seiner Untersuchung explizit aus (ebd. S.309); es wäre also eine Einbeziehung der KT in eine Fortsetzung seiner Untersuchung denkbar. Thiels Ausklammerung ist übrigens nicht verwunderlich, da er letztlich einer konstruktivistischen Position verhaftet bleibt (s.u.).

Thiels Idee scheint zu sein, daß die Mengenlehre nicht in dem Sinn der Mathematik zugrundeliegt, daß die Mengen als ontologisch erste Objekte die Bausteine der übrigen Mathematik sind, sondern in dem Sinn, daß in der Mengenlehre einige Grundoperationen vereint sind, die im Betreiben von Mathematik immer wiederkehren. (Dies mag auch gerade der Grund dafür gewesen sein, daß die Mengenlehre als Grundlage der Mathematik von seiten der Mathematiker Zuspruch gefunden hat.) Es geht also nicht um ein “System” Mathematik (als Wissenskorpus), das eine zu untersuchende Struktur hat, sondern um eine (durchaus schematische) Aktivität. Insofern ist Thiels Kanon eine andere *Art* Grundlage: nicht die Struktur des Systems Mathematik wird bestimmt, sondern die mathematische Untersuchung wird (ihrerseits) untersucht; es geht nicht auf den Wissens*korpus*, sondern auf den Wissens*erwerb*.

Setzt man sich allerdings näher mit Thiels Arbeiten auseinander, so hat man den Eindruck, Thiel ginge es mit seinem “Kanon” um die Einschränkung auf gewisse als intuitiv und konstruktiv qualifizierte Operationen; insbesondere umfaßt sein Kanon keine Auswahloperation im Sinne des Auswahlaxioms. Damit wäre wiederum der Praxis ein Riegel vorgeschoben. Thiels Programm ginge dann nicht weit genug, weil Typen von Operationen wieder auf einen Kanon von *Grundoperationen* reduziert werden sollen und nicht vielmehr gefragt wird, wieso der Einsatz der und der Operation für den Experten intuitiv ist. Wenn Grothendieck Mengenlehre- und KT-Operationen simultan verwendet (3.3.4.1), dann, weil er die zugehörigen Theorien als Hilfsdisziplinen ansieht, sie seinen Zielen unterwirft, einer Konzeption, deren Intuitivität erlernbar ist (allerdings ist dazu Training erforderlich)[55].

1.2.4 Reden von “Intuition”

Im Rahmen seines Versuches, die Kategorie aller Kategorien axiomatisch zu charakterisieren (vgl. 8.1.1), sagt Lawvere

> Our intuition tells us that whenever two categories exist in our world, then so does the corresponding category of all natural transformations between the functors from the first category to the second. [1966, 9]

[55] Näheres zu dieser Auffassung, die von der Thiels abweicht, wird in 1.4 dargestellt.

Versucht man, kategorientheoretische Konstruktionen auf die Mengenlehre zurückzuführen, hat man im Falle der Funktorkategorien allerdings mit einigen Problemen zu schaffen (Kapitel 7). Lawvere (dem es aufgrund seines Ziels der Axiomatisierung nicht auf solch eine Zurückführung ankommt) beruft sich hier auf "Intuition", um zu unterstreichen, daß derjenige, der mit kategorientheoretischen Begriffen arbeitet, trotz jener Probleme gleichwohl das Gefühl hat, daß die besagte Konstruktion ganz klar, sinnvoll und legitim ist. Nicht die Zurückführbarkeit auf Mengentheorie, sondern eine näher zu bestimmende "Intuition" steht hier ein für die Klarheit, Sinnfülle, Legitimität eines sich aus einer mathematischen Arbeitssituation ergebenden Konstrukts. Insbesondere beruft sich Lawvere offenbar auf eine *kollektive* Intuition, einen *common sense* — denn er sagt ausdrücklich *our* intuition[56]. Weiter geht es hier offensichtlich um einen *common sense* auf *technischer* Stufe, denn das "Wir" kann sich ja nur auf eine solche *community* erstrecken, die an das Arbeiten mit den besagten Begriffen gewöhnt ist[57]. Das intendierte Modell der Theorie ist technischer Art; die Überprüfung der Übereinstimmung der Axiome mit diesem Modell (die Aufgabe des Philosophen) muß auf technischer Ebene wahrgenommen werden.

Für die KT kann dies erst am Ende d.v.A., wenn genügend Vorbereitungen getroffen sind, sinnvoll versucht werden. Im vorliegenden Kapitel wird es einstweilen um Berufungen auf Intuition im Allgemeinen gehen; dazu soll hier zunächst zusammengestellt werden, in welchen verschiedenen Wortbedeutungen der Terminus "Intuition" üblicherweise (in hier relevanten Kontexten) verwendet wird.

In der Philosophie bezeichnet "Intuition" unmittelbare, nicht konzeptuell vermittelte Erkenntnis. Vgl. z.B. [Otte 1994, 308]: *"Im berühmten »Heureka« oder Aha-Erlebnis der intuitiven Erkenntnis präsentiert sich ein Sachverhalt in intimer Identität mit der Feststellung seiner Wahrhaftigkeit"*.

Die Verwendung des Wortes Intuition im Kontext von Geltung (unmittelbare Einsicht in die Wahrheit einer Aussage) ist deutlich zu trennen von der Verwendung als *Versinnlichung* ("Veranschaulichung"). Diese letztere ist z.B. zu verstehen, wenn man sagt, die KT sei durch die Pfeile intuitiv (5.3.2.1): Es geht um Kategorien als Bilder, die Vorstellung wird empirisch versinnlicht, sichtbar gemacht. Nun ist Sprache *auch* eine Darstellungsweise, aber anders als bei Sprache hat bei Bildern der Begriff der Geltung keinen Sinn. Zur Unterscheidung spreche ich von *sinnlicher Intuition* und *Geltungsintuition*.

In der deutschen Umgangssprache ist "Intuition" in der Wortbedeutung "Spürsinn" in Gebrauch. Diese Wortbedeutung ist insbesondere gemeint, wenn Mathematiker sagen "intuitiv müßte es sich so und so verhalten" oder ähnliches. Dies entspricht dem französischen "flair", das ebenso wie das dt. "Spürsinn" primär für den Spürsinn z.B. bei Hunden gebraucht wird, weiterhin aber auch metaphorisch

[56] Da ich das Privileg hatte, Lawvere persönlich kennen zu lernen, kann ich im Blick auf seine äußerst unprätentiöse Persönlichkeit schlechterdings nicht annehmen, er habe sich hier in einem "wissenschaftlichen *pluralis majestatis*" auf seine persönliche Intuition beziehen wollen — mit der er ja auch nichts hätte legitimieren können, während er das unter Berufung auf den *common sense* der *community*, für die er schreibt, sehr wohl kann.

[57] Auf die Rolle dieses technischen *common sense* im Zusammenhang mit problematischen Konstruktionen der KT komme ich bei 7.1.4 und 7.2.2 zurück.

z.B. für den Spürsinn von Sherlock Holmes. Die "intuitiven Ideen" eines Mathematikers leiten ihn bei seiner Suche. Vgl. [Bourbaki 1974, 152]; auch folgende Stelle bei Wittgenstein gehört hierher:

> Wie, wenn man statt »Intuition« sagen würde »richtiges Erraten«? das würde den Wert einer Intuition in einem ganz anderen Lichte zeigen. Denn das Phänomen des Ratens ist ein psychologisches, nicht aber das des richtig Ratens. [Wittgenstein 1984a] IV 22. (S.235f)

Hier ist offenbar der Aspekt der Erkenntnis*leitung* berührt. Gerade die sinnliche Intuition kann die erkenntnisleitende, heuristische Funktion übernehmen[58]; [Volkert 1986, xviii]. So gibt es in der Geschichte der Mathematik zahlreiche Arbeitssituationen, in denen das Hereintragen einer sinnlichen Intuition, einer anschaulichen Vorstellung von den untersuchten Gegenständen bei der Weiterentwicklung des Wissens über diese Gegenstände hilfreich war. [Artin 1950, 67] hebt hervor, Emmy Noether habe durch die Interpretation von Matrizen als lineare Transformationen (die Einführung des *representation space*) der Algebrentheorie erst die geometrische Intuition erschlossen[59].

Ähnlich sieht auch Fréchet einen echten Gewinn für die Forschung durch die Einführung einer "geometrischen" Terminologie:

> On peut [...] considérer les nombres de la suite [des coefficients d'une série de TAYLOR] comme les coordonnées [d']un point d'un espace [...] à une infinité dénombrable de dimensions. Il y a plusieurs avantages à opérer ainsi [dont] l'avantage qui se présente toujours quand on emploie le langage géométrique si propice à l'intuition par les analogies qu'il fait naître [...] [Fréchet 1906]

Mathematische Ausdrucksweisen kommen häufig aus einem umgangssprachlichen Gebrauch, dessen (anschauliche) Konnotation erwünscht ist, um eine "Intuition" dessen zu erzeugen, was intendiert ist. Die KT und ihr Umfeld liefern gute Fallbeispiele für diese Rolle der Umgangssprache in mathematischer Begriffsbildung; vgl. dazu 5.3.2.1.

Demgegenüber gibt es natürlich auch die Tendenz, beim Aufbau von Theorien Zugeständnisse an anschauliche Gegebenheiten möglichst weitgehend zu eliminieren. [Corry 1996, 301] zitiert [Mumford 1965, iv] (ähnliches finde man bei [Shafarevich 1974, v]):

> It seems to me that algebraic geometry fulfills only in the language of schemes that essential requirement of all contemporary mathematics: to state its definitions and theorems in their natural abstract and formal setting in which they can be considered independent of geometric intuition.

Zwischen dem in der Philosophie üblichen Gebrauch des Terminus "Intuition" (unmittelbare, nicht konzeptuell vermittelte Erkenntnis) und Intuition als Spürsinn vermittelt die wie folgt bestimmte Rede vom *Erlernen einer Intuition*. In 1.1.2.1 ging

[58] Wir werden später sehen, daß auch Geltungsintuition eine erkenntnisleitende Funktion übernehmen kann *(one is convinced from the beginning that the result has to be true*; Abschnitt 4.3).

[59] Dazu auch [Krömer 1998, 63].

es um Lernvorgänge, durch die man in die Lage kommt, einen Begriff "sinnvoll" zu gebrauchen. Es ist aus philosophischer (zumindest pragmatischer) Sicht sinnvoll, bei einem erfolgreichen Lernvorgang vom Erwerb einer Intuition zu sprechen, weil das Zustandekommen der Herstellungsregeln des Gegenstands, dessen Verwendung man erlernt, schließlich nicht mehr thematisiert wird (1.3.2). Zugleich steht aber am Horizont solchen eher partikularen Lernens der Erwerb *der* Intuition (in der Wortbedeutung "Spürsinn"), deren Besitz die selbständige Konzipierung geeigneter (sinnvoll verwend*barer*) Begriffe und Methoden erlaubt.

1.3 Entwurf einer pragmatischen Erkenntnistheorie

Im Folgenden wird in einiger Allgemeinheit eine bestimmte erkenntnistheoretische Position dargestellt[60]; diese wird vorerst noch nicht auf ein konkretes Stück mathematischen Wissens bezogen. Am Ende der vorliegenden Arbeit wird dann aber die Konkretisierung der Position auf den dann besser bekannten Befund zur Kategorientheorie versucht; erst vor dem Hintergrund eines umfangreichen Befundes kann man im Detail sehen, wie der pragmatische Ansatz zur Interpretation der Entwicklung der KT genutzt werden kann. Hingegen soll durch diese Konkretisierung der Befund *nicht* benutzt werden, um die erkenntnistheoretischen Überlegungen irgendwie zu "untermauern" (Stichwort Fallbeispiel). Man hätte dann nämlich das methodische Problem, daß eine erkenntnistheoretische Doktrin nicht gleichzeitig *a priori* als Auswahlkriterium und Interpretationsmittel für die historischen Fakten dienen und *a posteriori* durch den Befund untermauert werden kann; die letztliche Begründung der erkenntnistheoretischen Doktrin muß von woanders her kommen. Eine solche stelle ich hier nicht ausführlich dar (dies ist keine Arbeit über pragmatische Philosophie im allgemeinen[61]). Allerdings zeigen die folgenden Kapitel schon, daß sich diese Interpretationsrichtlinie *im speziellen Fall der KT* als fruchtbar erwiesen hat.

[60] Der Verfasser nimmt nicht für sich in Anspruch, sämtliche in den folgenden Ausführungen niedergelegten Gedanken selbständig entwickelt zu haben; vielmehr stammen die Grundgedanken von Gerhard Heinzmann, der dazu auch eine Publikation vorbereitet. Das Novum der vorliegenden Arbeit ist der Versuch der Übertragung dieses Ansatzes auf einen konkret gegebenen mathematikhistorischen Befund. Auf eine eigenständige Darstellung des Ansatzes kann hier aufgrund der Literaturlage nicht verzichtet werden.

[61] Man wird hier auf die oben angekündigte Publikation Heinzmanns warten müssen.

1.3.1 Pragmatismus und Ontologie: Wider den Reduktionismus

Vor Peirce war die Erkenntnistheorie bestimmt von der Vorstellung eines *Ergreifens* (einer *saisie*) von Objekten; intuitives Erkennen galt nach Descartes als besondere, eingeborene Erkenntnisfähigkeit, unbeschadet sie bei den Idealisten auf das Allgemeine, bei den Empiristen auf das Einzelne ging. Die Aufgabe dieser besonderen Erkenntnisfähigkeit war die *Begründung* der Erkenntnistheorie; schon von Aristoteles' erster Prämisse der Syllogismen her ging es darum, auf etwas erstes zurückgehen zu können.

Die herkömmliche Erkenntnistheorie ist ontologisch orientiert. Denn von der Ontologie der Gegenstände her soll die Grundfrage nach den Bedingungen für die Möglichkeit des Erkennens der Gegenstände beantwortet werden (weil man hofft, daß es einfache "Grundgegenstände" gibt, auf die sich die komplexeren Gegenstände zurückführen lassen und deren Erkennen mit *common sense* — sei dies nun eine eingeborene oder auf andere Art ausgezeichnete allgemeinmenschliche Erkenntnisfähigkeit — möglich ist). Hier geht also Erkenntnistheorie in Ontologie auf, beruht auf dieser; es ist erforderlich, Ontologie zu treiben, wenn man Erkenntnistheorie treiben können will.

Peirce stellte die Grundannahme der pragmatischen Philosophie heraus: Das Objekt hängt vom Subjekt ab, ist semiotisch vermittelt; es ist sinnlos, sich mit der Existenz von Objekten unabhängig von den verwendeten Methoden (Erkenntnismitteln) befassen zu wollen. Das Objekt an sich (ohne semiotische Vermittlung) mag es ja geben, aber das ist Metaphysik, keine sinnvolle philosophische Frage. Begründungshandlung ist von Herstellungshandlung nicht trennbar. Hier geht also Ontologie in Erkenntnistheorie auf — im Unterschied zur vorherigen Situation.

Daß das Objekt vom Subjekt abhängt, semiotisch vermittelt ist, führte zu einem Problem bezüglich des Gegenstands der Erkenntnistheorie. Man konnte nicht weiterhin wie gewohnt verfahren und Erkenntnisse *als* Objekte ansehen: Eine intuitive Erkenntnis einer intuitiven Erkenntnis gibt es nicht! Peirce's Ausweg für die Erkenntnistheorie ist gerade darin enthalten, daß Ontologie in Erkenntnistheorie aufgeht: da Begründungshandlung von Herstellungshandlung nicht trennbar ist, kann Intuition hier nur mehr eine *Relation* sein, bezüglich etwas. Diese neue Sicht von Intuition hat die Auswirkung, daß Intuition die Erkenntnistheorie nicht mehr begründen kann; es handelt sich also um eine Abkehr vom Reduktionismus. Ein zentrales Argument von Peirce gegen das klassische Konzept von Intuition[62] ist das folgende: Bei der Reduktion kommt es schließlich vor, daß das zu Reduzierende klarer ist als das, worauf es zu reduzieren wäre.

> The reply to the argument that there must be a first is as follows: In retracing our way from our conclusions to premisses, or from determined cognitions to those which determine them, we finally reach, in all cases, a point beyond which the consciousness

[62] Auch Popper bezieht — allerdings von anderer Warte — Position wider die Lehre von der Existenz letzter Erklärungsgründe; [Costazza 1993, 217].

> in the determined cognition is more lively than in the cognition which determines it. [Peirce 1935, 5.263][63]

In dieser Situation verliert der Prozeß der Reduktion seine Berechtigung, da er seiner erkenntnisbegründenden Funktion nicht mehr nachkommt. An einer solchen Stelle ereignet sich dann etwas, was ich einen “Ebenentausch” nennen möchte: Man bricht den Vorgang des Zurückführens ab und erklärt lieber das ursprünglich als erklärend gedachte mit dem ursprünglich als zu erklärend gedachten.

Eine solche Erkenntnistheorie hat einen historischen Aspekt: Ebenentausche in einem Begriffssystem können im Laufe der historischen Weiterentwicklung des Begriffssystems *auftreten.* Ich gehe sogar so weit zu sagen, daß man Erkenntnisfortschritt als ein solches Auftreten definieren kann: die wissenschaftliche Erkenntnis schreitet weiter, wenn eine solche Vertauschung auftritt. Es etabliert sich ein neuer *common sense* auf technischer Stufe. In dieser historischen Sicht treffen sich Peirce und Kuhn.

Vordergründig scheint diese Erkenntnistheorie mit pragmatischem Charakter darauf hinauszulaufen, die Erlernbarkeit (Nichtangeborenheit) von Intuition zu akzentuieren: Man muß nicht bis auf eine Grundebene zurückgehen, um eine Gültigkeit einzusehen, *da man die Gültigkeit der Ebenenübergänge lernend verinnerlicht hat.* Doch Vorsicht! Dies würde ja heißen, “eigentlich” gibt es *doch* eine Basisebene, auf die man bloß dank des Trainings, das man absolviert hat, nicht mehr zurückzugreifen braucht; die Basisebene behielte aber ihre *philosophische* Bedeutung — die Objekte der höheren Ebenen gingen als Abstraktionen aus den Objekten der Basisebene hervor. Was tatsächlich gesagt werden soll, ist aber, daß die Postulation der Basisebene artifiziell, nachträglich aufgestülpt erscheint (ähnlich wie die des Äthers in der prä-Einsteinschen Physik), weil der neue *common sense* sich gar nicht durch schrittweises Abstrahieren ausgehend von der Basisebene ergibt, sondern sich auf neue, unabhängig gerechtfertigte Objekte bezieht.

1.3.2 Intuitive Verwendung

Verschiedene Erkenntnistheorien unterscheiden sich insbesondere anhand der jeweiligen Definition und Rolle von “Intuition”. Im Falle des pragmatischen Ansatzes herrscht die Auffassung von Intuition als einer Relation. Dies ist so zu verstehen: Man *verwendet* etwas intuitiv (oder auch nicht); intuitive Verwendung ist situationsabhängig, erlern- und transformierbar.

Der Grund für die relationale Sicht ist hierbei wieder, daß jede Erkenntnis eines Gegenstands dem Pragmatismus als abhängig von den jeweils eingesetzten Erkenntnismitteln gilt — eine intuitive (i.S. von “unmittelbare”) Erkenntnis gibt es also für den Pragmatismus gar nicht; “intuitiv” ist neu zu definieren. Die pragmatische Formel “Begründungshandlung ist von Herstellungshandlung nicht trennbar” sagt über die Bedingungen der Möglichkeit des Erkennens von Gegenständen aus: Ich kann einen Gegenstand gar nicht erkennen, ohne ihn (seine Aktualisierung in der Welt)

[63] Wie allgemein üblich, bedeutet 5.263 Bd.5 §263.

herzustellen! Jede Erkenntnis des Gegenstands geht also einher mit seiner Verwendung (Aktualisierung). Die Elemente der Gegenstandsebene (was Denotation sein kann) sind stets als Artikulation gegeben ("semiotisch vermittelt"). In dieser Sichtweise werden die Verwendungsregeln von Begriffen zu Regeln der Herstellung von Artikulationen von Denotationen.

Es wäre nun also genauer zu erklären, was es heißen soll, etwas intuitiv zu verwenden. Heinzmann schlägt folgendes vor: Man verwendet Sprache intuitiv, wenn es überhaupt nicht in den Sinn kommt, nach den Geltungskriterien zu fragen. Daß sich die Frage nach den Geltungskriterien situativ stellen könnte, wurde bisher wohl übersehen, weil es immer um eine Erkenntnistheorie mit Modellcharakter ging und demgemäß Intuition immer nur auf der letzten Stufe des Regresses gebraucht wurde; in einer Erkenntnistheorie mit pragmatischem Charakter hingegen kommt Intuition auf allen Stufen vor in Gestalt der nicht thematisierten Werkzeuge — denn die Verwendung von etwas als Werkzeug ist eine intuitive, die von etwas als Objekt nicht (dies *definiert* Werkzeug und Objekt).

Der Begriff der Intuition hat also im Pragmatismus eine andere Bedeutung als die ursprüngliche eines unmittelbaren Zugriffs (*saisie*) auf Rationales. Ich illustriere dies am Beispiel der Geltungsintuition: Spricht man aus klassischer Sicht von einem intuitiv wahren Sachverhalt, so denkt man an einen Sachverhalt, dessen Wahrheit intuitiv ist; intuitiv ist hier also, *daß* ein Sachverhalt wahr ist. Im Pragmatismus hingegen bedeutet intuitive Verwendung, daß Wahrheit überhaupt nicht *thematisiert* wird.

Diese pragmatische Charakterisierung von Intuition auf der einen Seite, der häufig anzutreffende Gebrauch des Wortes "intuitiv" im Sinne von "unexpliziert" (vgl. 1.2.4) auf der anderen Seite geben Anlaß zu folgender terminologischer Konvention, die in der vorliegenden Arbeit nach Kräften durchgehalten wird[64]:

naiv	geht auf den Status eines Begriffs	synonym zu "unexpliziert, im Stadium der Konzeption"
intuitiv	geht auf die aktuelle Verwendung eines Gegenstands	synonym zu "die Gültigkeit der vorliegenden Verwendung wird nicht thematisiert"

Es bliebe hier allerdings noch zu klären, was allgemein für Gegenstände (und nicht nur für Aussagen mit ihrer vergleichsweise primitiven Denotationsstruktur[65]) eine "Thematisierung der Geltungskriterien" überhaupt ist. Man verwendet einen Gegenstand intuitiv, wenn man sich nicht dafür interessiert, wie die Herstellungsregeln des Gegenstands *zustandegekommen* sind; es geht also nicht um das *Eingehaltensein* der Regeln. Denn was heißt allgemein, daß ein Gegenstand gerechtfertigt ist? Es heißt, sich über die Artikulation des Gegenstands in der Welt klar zu sein, diese nicht mehr herzustellen. Die Behauptung ist nicht, der Gegenstand sei dadurch

[64]Eine abweichende, aber ebenfalls für die Arbeit sehr wichtige Verwendung von "naiv" findet in der Kombination "naive Mengenlehre" statt; vgl. 7.3.3.

[65]Vgl. hier Anm.71.

gerechtfertigt, daß er konform zu seinen Herstellungsregeln hergestellt ist. Man kann ihn gar nicht anders herstellen: Geht man nicht konform zu seinen Herstellungsregeln vor, so stellt man etwas anderes her[66]. Die Prüfung des Eingehaltenseins der Herstellungsregeln ist offenbar kein Weg zur Rechtfertigung des Gegenstands. (Im Falle der Mathematik ist man mit dieser Prüfung noch auf der Ebene des Mathematikers und nicht auf der des Philosophen). Man muß vielmehr die *Herstellungsregeln selbst* rechtfertigen: "Wodurch ist es gerechtfertigt, solchermaßen einen Gegenstand herzustellen?" — entsprechend hat man sich mit dem Zustandekommen der Herstellungsregeln zu beschäftigen.

In den klassischen Systemen war Intuition uneingeschränkt intersubjektiv. Auch in der pragmatischen Situation ist Intuition kollektiv determiniert: In welchen Sprachhandlungssituationen es nicht in den Sinn kommt, Geltungskriterien zu thematisieren, hängt vom jeweiligen Sprachgebrauch der Sprechergemeinschaft ab. Allerdings wird anerkannt, daß sich beispielsweise in wissenschaftlichen *communities* offensichtlich Sprachgebräuche etablieren, die diese Einheiten als eigenständige Sprechergemeinschaften abgrenzen. Als *common sense* einer speziellen *community* bezeichne ich nun die in dieser *community* in Kraft befindliche Einteilung der Sprachhandlungssituationen in solche, in denen es in den Sinn kommt, Geltungskriterien zu thematisieren, und solche, in denen dies nicht der Fall ist. Nun könnte ein Philosoph im Sinne der Poincaréschen Definition dieses Terminus, also jemand, der die Entscheidung für in Kraft befindliche Konventionen verstehen will, daherkommen und fragen, wie denn diese spezielle Partitionierung der Sprachhandlungssituationen zustandekommt. Man könnte ihm entgegenhalten, daß dies von den speziellen Erkenntnismitteln der *community* abhängt.

Unser Philosoph könnte nun natürlich weiter nach der Rechtfertigung dieser Erkenntnismittel fragen. *Klassisch* wäre das die Frage, woher man denn überhaupt weiß, daß diese Mittel "tatsächlich" *Erkenntnis*mittel sind (im Sinne eines klassischen, uneingeschränkt intersubjektiven Begriffs von Erkenntnis). Eine solche Frage erscheint der pragmatischen Position als metaphysisch. Manch einer mag von dieser Verweigerung, auf die Frage einzugehen, enttäuscht sein; ich sehe aber nicht, wie man innerhalb des pragmatischen Systems auf sie eingehen sollte. So sehen denn manche Autoren einen Nachteil des Pragmatismus darin, daß dem Experten ein hoher Stellenwert zukommt, während der Beruf des Philosophen gewissermaßen "überflüssig" wird. Mir scheint allerdings, daß dieser Zug des Pragmatismus zumindest im Blick auf die (gemäß Abschnitt 1.2.2.3 im Falle der Mathematik nötige) Vermittlung zwischen Philosophie und Fachwissenschaft eigentlich gar kein Nachteil ist. Und: Der Pragmatismus begibt sich mitnichten der Erklärungskompetenz, denn es *gibt* eine spezifisch pragmatische Rechtfertigung der Erkenntnismittel. Für den Pragmatismus sind nämlich Gegenstände letztlich Objekt und Erkenntnismittel (Werkzeug) zugleich; die zwei Aspekte sind nicht prinzipiell verschieden (vgl. eingehender Ab-

[66]Zwar können verschiedene Handlungen dasselbe Ergebnis haben; man müßte genauer definieren, was man darunter verstehen will, daß die Herstellungsregeln "eingehalten" sind bzw. worin die Nichtkonformität zu den Herstellungsregeln eigentlich zum Ausdruck kommt, wenn nicht im unterschiedlichen Ergebnis.

schnitt 1.3.3) — Erkenntnismittel werden also auf dem selben Weg gerechtfertigt wie Objekte[67].

Die Existenz von verschiedenen *common senses*, die jeweils einer *community* eigen sind, kann zu folgender Situation führen: etwas wird von einer Gruppe intuitiv, von einer anderen nichtintuitiv verwendet. Dann finden innerhalb der Disziplin Diskussionen statt; man hat es mit konkurrierenden *common senses* zu tun (die also nicht wirklich *common* sind). Hier stellt sich eine Aufgabe für den Historiker.

1.3.3 Erkenntnisbegründung und Erkenntnisleitung lassen sich nicht trennen

Wie wir gesehen haben (1.2.1), setzen herkömmliche Positionen in der Erkenntnistheorie einen isolierenden Akzent auf Erkenntnisbegründung und geben i.a. keine Auskunft über erkenntnisleitende Prinzipien (dieser Zustand wurde kritisiert von Wittgenstein und Wang).

Im Pragmatismus nun ergibt sich mit der Untrennbarkeit von Begründungshandlung und Herstellungshandlung die Untrennbarkeit der erkenntnisbegründenden und der erkenntnisleitenden Funktion eines Erkenntnismittels. Der Gegenstand wird hergestellt und auf anderer Ebene als Werkzeug verwendet, ist also Objekt und Erkenntnismittel "zugleich"; die zwei Aspekte sind nicht prinzipiell verschieden. Was sich *ändert*, je nachdem, ob man eine Konstruktion als Objekt oder als Werkzeug behandelt, ist die Thematisierung; daher gibt es im pragmatischen Ansatz prinzipiell keine Trennung von Entdeckungs- und Rechtfertigungskontext (i.S. Reichenbachs; 1.2.1), nur Aspekte.

Vor diesem Hintergrund wird die Rolle der Explikation klarer — und damit die Position des Pragmatismus in der Oxford-Cambridge-Debatte (s.u. 1.3.4). Der historischen Forschung geht es um den Übergang naiv → expliziert; dieser interessiert den Philosophen nicht! Einen solchen konzeptuellen Zuwachs bezeichnet er nicht als "Erkenntnis"; ihn interessiert das Wissen unter dem Gesichtspunkt seiner jederzeitigen Reproduzierbarkeit. Eine Erkenntnis kommt nicht schon dadurch zustande, daß man informelle Regeln in formale überführt[68] (d.h. daß man expliziert); *beide* Arten von Regeln werden (gleichzeitig) benötigt! Denn man hat sonst das Kriterienproblem, da man durch reine Entfaltung der formalen Regeln meist keine Entscheidungen treffen kann.

Zugegeben: Ein Konzept wird expliziert, weil man bemerkt, daß man es benötigt, um weiterzukommen (und zwar benötigt in einer Form, in der die korrekte Verwendung formal überprüfbar wird). Das explizierte Konzept ist allerdings deshalb "klar", weil man auf die Verwendungsebene zurückgehen kann, wo man weiß,

[67] Hier ist noch einmal daran zu erinnern, daß jedenfalls aus pragmatischer Sicht der Philosoph nicht etwa die Aufgabe hat, die Gegenstände erst zu rechtfertigen, so als hätten die sonstigen Verwender der Gegenstände dies bislang nicht getan. Der Philosoph fragt danach, *wie* die Gegenstände gerechtfertigt werden.

[68] bzw. daß man *vorgibt*, dies zu tun; die Debatte geht ja insbesondere darüber, ob eine Kontrolle der Übereinstimmung von Explikandum und Explikatum überhaupt möglich ist.

welche intendierte Verwendung einen dazu veranlaßt hat, das Konzept zu explizieren. Erkenntnisfortschritte sind da, wo sich Klarheit mit einem neuen Konzept verbindet (auf das man künftig die Strategien bezieht). Jedes Konzept kann beide Rollen spielen; bei zwei Konzepten kann vor einem Erkenntnisfortschritt das eine, nach einem das andere intuitiver sein (d.i. in den Verwendungsgewohnheiten der *community* mit seiner Klarheit für das jeweils andere einstehen); es kann also zu einem Ebenentausch) kommen.

Es ist fraglich, ob eine Thematisierung des Zustandekommens der Herstellungsregeln im Falle der informellen Regeln überhaupt möglich ist: man lernt sie ja durch Abrichten, kann sie nicht "angeben" (formalisieren), hat also insbesondere keine Kenntnis über ihr Zustandekommen. Die Sprachhandlungen, die informellen Regeln folgen (Sprachspiele), gehören in der jeweiligen *community* zu denjenigen Situationen, in denen die Frage nach den Gültigkeitskriterien nicht in den Sinn kommt — außer man begegnet einer gemäß der formalen Regeln korrekten, jedoch als pathologisch empfundenen Verwendung eines Konzepts.

1.3.4 Der pragmatische Ansatz im Kontext der Formalismusdebatte

Die Diskussion darüber, ob formale Begriffsdefinitionen *grundsätzlich* überhaupt dafür geeignet sind, intendierte Modelle zu erfassen, ist ein zentrales Problem der Philosophie der 30er Jahre; die diesbezügliche Kontroverse kann auf die Formel Oxford *vs.* Cambrigde gebracht werden. In Oxford favorisierte man eher die natürliche Sprache und Pragmatik, während in Cambridge der Formalismus hochgehalten wurde (von Wittgenstein kritisiert; vgl. z.B. das Zitat am Ende des Abschnitts 1.1.2.1). [Quine 1948] stellte fest, daß die Vorstellung von einem Begriff als einer Entität sinnlos ist. Quines Schlußfolgerung war die folgende: die Wissenschaft kann nur über Begriffsumfänge reden; hieraus ergibt sich der Primat der Mengenlehre. Es gibt aber eine andere denkbare Lösung (im Geiste der Oxford-Philosophie): auf das Erlernen der Verwendungsregeln kommt es an; Mathematik ist in diesem Sinne ebenso Sprache wie die übrigen Sprachen. Wir können uns ja auch verständigen, ohne zu wissen, was ein Begriff ist.

Im Anschluß an diese Debatte kritisiert Kreisel die „*These des naiven Formalismus*" [1974], wonach ein mathematisches Konzept genau dann präzisiert sei, wenn es formalisiert sei. Kreisel stellt hierbei "formal" und "inhaltlich" gegenüber und geht entsprechend davon aus, daß bei formaler Behandlung eines Konzepts die inhaltliche Seite desselben unberücksichtigt bleibt.

Was heißt aber: ein Konzept ist präzisiert? Als Beispiel für die Rede der Mathematiker von Präzision möge uns eine Passage aus einer der wichtigsten Quellen der vorliegenden Arbeit dienen. Eilenberg-Steenrod stellen im Vorwort von [1952] die Ausgangssituation ihrer Unternehmung dar: das Vorhandensein zahlreicher verschiedener Typen von Homologie- und Cohomologiegruppen. Sie fahren fort:

> In spite of this confusion, a picture has gradually evolved of what is and should be a homology theory. Heretofore this has been an imprecise picture which the expert

> could use in his thinking but not in his exposition. A precise picture is needed. It is at just this stage in the development of other fields of mathematics that an axiomatic treatment appeared and cleared the air. [Eilenberg und Steenrod 1952, viii]

(Wie das *axiomatic treatment* aussieht, das sie für den Fall der Homologietheorie vorschlagen, werde ich in 2.5 näher besprechen.) Es wird hier offenbar dafürgehalten, Präzision habe die Aufgabe, Kommunizierbarkeit sicherzustellen, insbesondere da, wo der Experte (dem für seine eigenen Zwecke ein *picture* — ich würde sagen, ein *common sense* auf technischer Stufe — zur Verfügung steht) dem Nichtexperten etwas mitteilen will. Der Nichtexperte, das ist z.B. der Lernende: Aus dem Kontext des Vorwortes wird klar, daß Eilenberg-Steenrod bei *exposition* vor allem an eine Darstellung der Theorie für Studenten denken[69]. Ferner halten sie dafür, daß man Präzision insbesondere durch axiomatische Behandlung erreiche; sie sagen nicht direkt, daß dies die einzige Möglichkeit sei, sondern nur, daß dies bisher immer das Mittel der Wahl gewesen sei.

Halten wir fest: Präzision ist demnach für Eilenberg-Steenrod keine Aussage über die Adäquatheit einer Explikation! (Sondern über die Adäquatheit eines Kommunikationsmittels.) Und *diese* Präzision, dies scheint unstreitig, bringt eine formale Darstellung mit sich: es ist für den Adressaten möglich, die Mitteilung nach einem vorher vereinbarten Schema zu decodieren. Das Formale stellt Intersubjektivität her: alle Teilnehmer haben sozusagen einen standardisierten Schlüssel.

Im Zusammenhang der Frage der Kommunizierbarkeit erinnere ich an Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung[70]. Im Anschluß an diese Unterscheidung kann man die Kommunikationsfunktion und die Bedeutung eines Ausdrucks gegenüberstellen; man kann Kommunikationsfunktion und Bedeutung ansehen oder nur Bedeutung[71]. Eilenberg-Steenrod erblicken nun gerade in der formalen Behandlung die Möglichkeit einer Kommunikation, während dem Initiierten (dem ein unexplizierter *common sense* zu Gebote steht) das Konzept auch auf anderem Wege zugänglich ist. Dies hängt damit zusammen, daß ein *common sense* eine Kompetenz ist, den *Sinn* eines Konzepts zu erfassen (nicht die *Bedeutung*, die zu erfassen ja Ziel der Wissenschaft ist) — und diese Kompetenz kann einer bestimmten *community* spezifisch sein. Will man Außenstehende diese Kompetenz lehren, muß man solche Formen finden, den Sinn zu kommunizieren, die eben gerade nicht voraussetzen, daß der Empfänger bereits in der Lage ist, den Sinn zu erfassen.

[69] Inwieweit diese Ausrichtung im Text selbst noch zu spüren ist, untersuche ich kurz in 2.5.3.

[70] Literaturangaben zu Frege und eine faßliche Darstellung seiner Theorie findet man bei [Church 1956, 4ff].

[71] Dieser Perspektivewechsel hat besonders drastische Auswirkungen, wenn man sich nicht auf Begriffe, sondern auf Aussagen bezieht: die Bedeutung oder Denotation von Aussagen ist in Freges Theorie ihr Wahrheitswert. Sätze sehr verschiedenen Inhalts haben also alle dieselbe Bedeutung: "wahr". Dies hängt damit zusammen, daß Frege Sätze als Namen ansieht; vgl. [Church 1956, 23f].

1.4 Wider die reduktionistische Erkenntnistheorie

Eine im 20. Jahrhundert stark propagierte Erkenntnistheorie für die Mathematik sieht so aus: Als Bedingung für die Möglichkeit des Erkennens von Gegenständen wird angesehen, daß sich die fraglichen Gegenstände auf die Mengentheorie zurückführen lassen. Die Bedingungen für die Möglichkeit des Erkennens der Gegenstände der Mengentheorie (also der Mengen) können hierbei verschieden angegeben werden[72]; jedenfalls wird für die auf die Mengen zurückgeführten Gegenstände selbst die Frage nicht noch einmal neu gestellt; diese "sind" Mengen. Eine solche Erkenntnistheorie ist also *in der Reduktion* eine Ontologie; sie hat Modellcharakter.

Es besteht Bedarf, eine Alternative zu einer solchen Erkenntnistheorie zu entwickeln, da sich diese mehr und mehr aus der geschichtlichen Entwicklung der Disziplin abkoppelt: ihr einstiger technischer Apparat dient heute, wie wir in 1.2.2.2 gesehen haben, anderen Zwecken, und die Aussagen, die sie über die Wissenschaft Mathematik machen kann, werden von den Betreibern dieser Wissenschaft längst als irrelevant empfunden (1.2.2.3).

Mir scheint, in den Versuchen, die Ontologie mathematischer Gegenstände zu klären[73], kommt folgende Tendenz in der bisherigen Erkenntnistheorie der Mathematik zum Ausdruck: Die Mathematik wird offenbar gesehen als mit einem ontologischen Defizit behaftet, nämlich dem Defizit, daß sich diese Wissenschaft (anders als viele andere) nicht auf material Gegebenes bezieht, wodurch auch der materiale Wahrheitsbegriff in Fortfall kommt. Diese Tendenz ist irritierend, gilt doch mathematische Erkenntnis seit langem als eine Erkenntnis von "größtmöglicher Gewißheit" (vielleicht gerade weil sie nicht auf materiale Belege oder experimentelle Überprüfung angewiesen zu sein scheint).

1.4.1 Thiels Vorschlag zur Abkehr vom Reduktionismus

> Das eigentliche Problem [mit der Frage "Ist alle Mathematik letzlich Mengenlehre?"] ist ein philosophisches und betrifft die Berechtigung des hinter Arithmetisierung und Logisierung stehenden *reduktionistischen Programms*. [. . .]
>
> [. . .] [es] scheint [die] strenge Parallelität der arithmetischen und der mengentheoretischen Operationen der Auffassung beträchtliches Gewicht zu verleihen, daß wir durch die mengentheoretischen Definitionen [. . .] das eigentliche "Wesen" der Grundzahlen erfaßt hätten, Zahlen also nichts anderes als ganz bestimmte Mengen *seien*.

[72] Frege hielt die Axiome für intuitiv zugänglich; bei Hilbert kam Intuition in der Metamathematik zum Tragen, in der der Konsistenzbeweis geführt werden sollte (durch den die Eignung der Axiome zu erweisen gewesen wäre); bei Bourbaki sind die Axiome nur Hypothesen (vgl. 6.2.3). Bourbakis Rechtfertigungsbegriff ist also der schwächste: "es geht, denn es ist bisher noch kein Widerspruch aufgetreten"; trotzdem handelt es sich noch um Erkenntnistheorie. Denn bei diesem hypothetisch-deduktiven Standpunkt legt man Wert darauf, daß für die getroffenen Annahmen zumindest ein Beweis der relativen Widerspruchsfreiheit möglich ist, also ein Beweis, daß die Annahmen mit dem wohlerprobten Rahmen der Mengenlehre konsistent sind.

[73] Die Mengenlehre ist natürlich nicht der erste Versuch, die Ontologie mathematischer Gegenstände zu klären; es ist hier nicht Raum, auf ältere Versuche einzugehen.

> Träfe dies zu, so wäre nicht nur die *Disziplin* Arithmetik auf die *Disziplin* Mengenlehre zurückgeführt, "reduziert" worden, sondern auch die Zahlen als mathematische *Entitäten* hätten sich als Mengen erwiesen, die lediglich durch ihren recht komplexen Aufbau nicht gleich als solche zu erkennen sind [Thiel 1995, 311f].

Thiel läßt offen[74], ob diese Auffassung zutrifft[75]; er thematisiert im folgenden das Problem der Identifizierung abstrakter Operationen und kehrt hervor, daß die immer wieder auftretenden Typen von Operationen womöglich eher der Gegenstand einer Fundamentaldisziplin sein könnten, vgl. 1.2.3.2.

Unser Programm ist von dem Thiels abzugrenzen:

- Thiel ging es um "immer gleiche" Grundoperationen; es wird also im Grunde lediglich eine *neue* "erste Ebene" eingeführt (Reduktionismus, aber auf Handlungen gehend).
- Wir machen hingegen die Intuitivität von Sprache an der *Verwendung* fest (abhängig vom Kontext der Aktualisierung des Schemas).

1.4.2 Eine pragmatische Reduktionismuskritik

Der reduktionistische Grundlagenbegriff gehört zu einer Erkenntnistheorie mit Modellcharakter; bei einer mit pragmatischem Charakter (Intuition auf allen Stufen) ist eine Reduktion auf Erstes nicht erforderlich. (Wohl kommt Intuition im Vollzug der Reduktion, im Herstellen der Bezüge zwischen den verschiedenen Ebenen, zum Tragen!) Denn man muß die Warum-Frage einmal stornieren, um weitergehen zu können.

Der pragmatische Ansatz geht nicht davon aus, daß die Gegenstände, die man auf Mengen reduzieren kann, Mengen "sind", sondern stellt die Frage nach den Bedingungen für die Möglichkeit des Erkennens der Gegenstände auf jeder Ebene neu. Die Herstellungsregeln der jeweiligen Gegenstände kommen nämlich nicht einfach so zustande, daß von Mengen (oder sonst einer Art von Grundobjekten) abstrahiert wird, sondern die bei der Untersuchung dieser Grundobjekte aufgetretenen "Strukturen" (also im Grunde die bei der Untersuchung festgestellten Sachverhalte) werden zu neuen Gegenständen gemacht (untersucht). Fragt man nicht mehr nach dem Zustandekommen der Herstellungsregeln für die neuen Objekte (also danach, mit Sachverhalten im Zusammenhang welcher Untersuchung man es zu tun hat), verwendet man diese intuitiv (es etabliert sich ein neuer *common sense* auf technischer Stufe, durch den allein es bereits hinreichend legitimiert ist, sich für diese Objekte zu interessieren).

In der gerade vorgetragenen Argumentation scheint ein Bruch zu sein, denn zunächst trage ich eine Behauptung über das Zustandekommen der Herstellungsregeln

[74]Nicht so Wang, vgl. ⟨#8 S.36⟩.

[75]Es wird allerdings spätestens hier klar, wieso Thiel die Entscheidung getroffen hat, von "Fundamental*disziplin*" zu sprechen (vgl. 1.2.3.1): wie das Zitat unterstreicht, hilft ihm diese Entscheidung dabei, nicht zu einer ontologischen Akzentsetzung gezwungen zu sein.

vor (nämlich: es wird gar nicht abstrahiert), während die Stoßrichtung gleich im Anschluß die ist, daß dieses Zustandekommen überhaupt nicht thematisiert wird. Es geht offenbar um ein Doppelargument:

1) die Herstellungsregeln kommen gar nicht so zustande, wie vielfach behauptet, und

2) ihr Zustandekommen wird nicht thematisiert.

Auf den ersten Blick scheint es überflüssig, sich über 1) zu unterhalten, wenn man sich auf 2) einigen kann. Aber erstens darf man natürlich nicht die Aufgabe des Philosophen mit der des Mathematikers verwechseln: der Philosoph geht hinter die intuitive Verwendung zurück, analysiert sie, hat also insbesondere die Behauptung 1) zu prüfen. Zweitens — und damit beginnt die Analyse — lassen sich 1) und 2) durchaus in Einklang bringen. Ginge es nämlich tatsächlich um Abstraktionen, könnte ihre Artikulation in der Welt nur die Gestalt der Konkretisierung (also der Realisierung auf der Basisebene) haben. Wenn man behauptet "das und das ist eine Abstraktion", sagt man genau dies: Es kann in der Welt nur durch Konkretisierung artikuliert werden (beide Sprechweisen sind synonym). Der Fall 2) könnte dann gar nicht eintreten! Man muß also 1) akzeptieren, um 2) akzeptieren zu können. Und: Konstatiert man in einem historischen Befund 2), so ist dies ein Indiz für 1). Aus diesen Gründen gehe ich auf die Behauptung 1) unten näher ein.

Zunächst sei aber noch einmal der Grundgedanke dieses Entwurfs hervorgehoben: Es sind Sätze bzw. Theorien über die Objekte der ersten Ebene, die als Objekte der neuen Ebene übernommen werden. Hier kann natürlich ein extensionaler Standpunkt nur triviales hervorbringen, da die Extension eines Satzes seine Denotation ist, und die ist in einer zweiwertigen Logik entweder "wahr" oder "falsch" (vgl. Anm.71). Der Standpunkt der KT ist eher, daß das Bestehen bestimmter Aussagen ausgedrückt werden kann durch die Kommutativität bestimmter Diagramme, und diese Eigenschaft eignet sich dazu, Objekt auf neuer Ebene zu werden. Bezugspunkt der Rechtfertigung der neuen Objekte ist ein *common sense* auf technischer Stufe, der zustandekommt durch das Eintreten einer *community* in ein *normal science*-Stadium. Die vage Rede von der "Struktur" und der "Reflexivität der Mathematik" (Corry) bedeutet: Man studiert die Manipulationen der unteren Ebene. Man verwendet die neuen Gegenstände intuitiv, weil man sich nicht mehr dafür interessiert, wie die Herstellungsregeln des Gegenstands *zustandegekommen* sind. Der Gegenstand ist gerechtfertigt, d.h. man ist sich über die Artikulation des Gegenstands in der Welt klar, stellt diese nicht mehr her. Dieses Sichdarüberklarsein ist *common sense* einer trainierten *community* (ohne dieses Training allerdings nicht kommunizierbar).

Nun zur Frage der Abstraktion. Wäre es so, daß Objekte höherer Stufe stets aus Abstraktionen hervorgingen, so wäre das vertikale Fortschreiten monoton — und ein Reduktionismus in Verkehrung dieser Richtung möglich. Tatsächlich gibt es aber Ebenentausche, Unterbrechungen der Monotonie.

Wenn es heißt: Die neuen Gegenstände gehen eigentlich gar nicht aus Abstraktionen hervor, so ist gemeint: es mag zwar in der jeweiligen Situation Dinge geben, die aus Abstraktionen hervorgehen; diese Dinge sind aber nur scheinbar die neuen Gegenstände; in Wahrheit sind die neuen Gegenstände, die für die Forschergemeinschaft als admissible Untersuchungsgegenstände gerechtfertigt sind, eben andere Dinge, nämlich die Sachverhalte, die über jene aus Abstraktionen hervorgegangenen Dinge bestehen.

Volkert kennzeichnet die Operation der Abstraktion als eine von mehreren "typischen Entwicklungsmöglichkeiten der Mathematik":

> [An] typische[n] Entwicklungsmöglichkeiten der Mathematik [...] können [wir] unterscheiden:
>
> 1. Die *Formalisierung von informalen Konzepten.* [...] In der Wissenschaftstheorie wird dieser Vorgang nach Carnap als *Begriffsexplikation* bezeichnet.
> 2. Es können neue Begriffe (höherer Stufe) *innerhalb* der formalen Ebene durch *Abstraktion* gewonnen werden [...].
> 3. Es können Erweiterungen der formalen Ebene durch Hinzunahme neuer Elemente vorgenommen werden. Diese gelten — bis zu einer besseren inhaltlichen Charakterisierung — als "*bloß formal*". [...] Wir charakterisieren diese Reaktion durch "*Formalismus als Ausweg*" [Volkert 1986, xxiiif].

Volkert trägt diese drei Entwicklungsmöglichkeiten in ein Schaubild ein, in dem es neben der formalen Ebene (Zeichenebene; Syntax) noch eine informale Ebene (Handlungen, Konzepte; Pragmatik) und eine Gegenstandsebene (Schemata, die durch Artikulieren auf der Zeichenebene referiert werden; Semantik) gibt[76]. Die Formalisierung ist entsprechend als ein Übergang von der informalen zur formalen Ebene eingetragen[77], die beiden anderen "Entwicklungsmöglichkeiten" als zueinander orthogonale Erweiterungen der formalen Ebene — und nur die formale Ebene mit ihren Erweiterungen gilt Volkert als Mathematik[78].

Was nun die Frage betrifft, ob die Gegenstände der Mathematik tatsächlich allesamt aus Abstraktionen, ausgehend von bestimmten Grundobjekten, hervorgehen, so vermittelt Volkerts Darstellung den Eindruck, die Bezüge der Mathematik zum Nichtformalen (zum *common sense*) setzten ausschließlich auf der syntaktischen Grundebene an (da die verschiedenen Abstraktionsschritte nach einmal erfolgter

[76]Der Rekurs auf das semiotische Dreieck Syntax-Semantik-Pragmatik liegt auf der Hand. Volkert weist gleich im Anschluß (S.xxv) darauf hin, daß es natürlich eine Frage der philosophischen Position ist, ob man die Existenz einer separaten Gegenstandsebene überhaupt akzeptiert, und wenn ja, welcher Natur die in ihr enthaltenen Entitäten sind.

[77]Zu Carnaps Diskussion von "Explikation" vgl. [Mittelstraß 1980].

[78]Den Unterschied zwischen der Abstraktion als dem Wechsel auf eine höhere Abstraktionsebene einerseits und der formalen Erweiterung einer festen Abstraktionsebene andererseits kann man sich z.B. an der Ringtheorie klarmachen: der Übergang vom Arbeiten mit konkreten Ringen zur Rede über den abstrakten Ringbegriff ist ein Abstraktionsschritt — ein Stufenwechsel; der Übergang von der Theorie kommutativer Ringe zur allgemeinen Ringtheorie ist eine formale Erweiterung — ein Übergang auf gleicher Stufe.

Explikation innerhalb der formalen Mathematik erfolgen; Volkert sagt sogar explizit, die syntaktische Grundebene und die Abstraktionsebenen würden “meist nicht unterschieden”, seien also gewissermaßen nur Spitzfindigkeit des analysierenden Philosophen). Vor dem Hintergrund der oben entwickelten pragmatischen Position wäre diese Auffassung dahingehend zu verfeinern, daß von vorneherein gar nicht klar ist, welches in einem speziellen Feld der Mathematik gerade die syntaktische Grundebene ist: wir behaupten gewissermaßen, daß es für manche vermeintliche Abstraktionsebene ein eigenes semiotisches Dreieck gibt (also Bezüge auf Handlungen und Konzepte, kurz einen ebenenspezifischen technischen *common sense*)[79].

Auch Cavaillès hat eine Unterscheidung zueinander orthogonaler Entwicklungsmöglichkeiten der Mathematik angegeben: die Unterscheidung von *longitudinal* und *vertical*.

> Le processus de séparation est double : longitudinal, ou coextensiv à l’enchaînement démonstratif, vertical ou instaurant un nouveau système de liaison qui utilise l’ancien comme base de départ, et non plus stade traversé par un mouvement, mais objet de réflexion dans son allure actuelle. [Cavaillès 1976, 26ff]

Cavaillès’ *longitudinal* entspricht Volkerts formaler Erweiterung; Cavaillès’ *vertical* allerdings scheint mir der oben entwickelten pragmatischen Sicht näher zu stehen als der Gedanke einer schlichten Abstraktion: es etabliert sich ein neues *système de liaison*, dem das alte (also die alten Theorien) als Objekt dient.

1.4.3 Wittgensteins Reduktionismuskritik

Ich möchte dieses Kapitel beschließen mit einer kurzen Darstellung von Wittgensteins Stellungnahmen zum Reduktionismus (“Dem Klassiker das letzte Wort”). Mir scheint, man kann Wittgensteins in [1984a] zu Russells Strich-Kalkül vorgebrachte Kritik[80] (wonach dann nicht etwa die formale Fassung mathematischen Schließens für die Gültigkeit der intuitiven einsteht, sondern umgekehrt) leicht auf den Fall der Mengenlehre übertragen.

> Was will Einer zeigen, der zeigen will, daß Mathematik nicht Logik ist? Er will doch etwas sagen wie: — Wenn man Tische, Stühle, Schränke etc. in genug Papier wickelt, werden sie gewiß endlich kugelförmig ausschauen.

[79] Volkert bezieht in seiner Arbeit ausdrücklich eine pragmatische Position, “die letztlich die abstrakten Gegenstände aus Handlungen entspringen sieht” (S.xxvi); von daher stellt sich die Frage nach dem Verhältnis seiner Position zu der unseren. Ich gehe darauf hier nicht näher ein, nehme aber an, daß er nicht an eine “globale”, einzig mögliche syntaktische Grundebene dachte, sondern ein Schema aufstellen wollte, das in gegebenen Einzelsituationen mathematischer Entwicklung mit Gewinn zur Beschreibung dieser Entwicklung herangezogen werden kann.

[80] Diese Kritik wird im Vorwort der Herausgeber von [Wittgenstein 1984a] insofern relativiert, als zu dem zugrundeliegenden Manuskript gesagt wird: “Stilistisch und wohl auch sachlich ist es wenig vollendet. Immer von neuem wiederholt der Verfasser den Versuch, seine Gedanken über die Natur des mathematischen Beweises zu erläutern [. . .]”. Aber dies ist doch wohl allgemeines Kennzeichen Wittgensteinscher Philosophie! — vgl. hierzu [Frank 1992].

> Er will nicht zeigen, daß es unmöglich ist, zu jedem mathematischen Beweis einen Russellschen zu konstruieren, der ihm (irgendwie) ›entspricht‹, sondern, daß das Anerkennen so einer Entsprechung sich nicht auf Logik stützt [Wittgenstein 1984a] III 53. (S.185).

Diese Kritik Wittgensteins aufgreifend, diskutiert Hao Wang die Auffassung, Mathematik "sei" axiomatische Mengenlehre, als eine mögliche Antwort auf die Frage *"What is mathematics?"*. Wang führt aus, daß diese Auffassung erkenntnistheoretisch wertlos ist, jedenfalls was die Aufgabe des Verstehens der Erkenntnisleitung betrifft:

#5 Mathematics is axiomatic set theory. In a definite sense, all mathematics can be
derived from axiomatic set theory. [. . .] There are several objections to this identi-
fication. [. . .] This view leaves unexplained why, of all the possible consequences of
#6 set theory, we select only those which happen to be our mathematics today, and why
certain mathematical concepts are more interesting than others. It does not help
#7 to give us an intuitive grasp of mathematics such as that possessed by a powerful
mathematician. By burying, e.g., the individuality of natural numbers, it seeks to
#8 explain the more basic and the clearer by the more obscure. It is a little analogous
to asserting that all physical objects, such as tables, chairs, etc., are spherical if we
#9 swathe them with enough stuff. [. . .] [Wang 1971, 49]

Reduktionismus ist ein uraltes Projekt; ein naher Vorläufer seiner Inkarnation in der Mengenlehre war das Arithmetisierungsprogramm des 19.Jahrhunderts. Es ist im Zusammenhang unserer Kritik interessant, daß einer der prominenten Vertreter dieses Programms, Richard Dedekind, eine durchaus distanzierte Einstellung zu einer Durchführung des Programms in letzter Konsequenz hatte:

> [Es] erscheint [. . .] als etwas Selbstverständliches und durchaus nichts Neues, daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt [. . .]. Aber ich erblicke keineswegs etwas Verdienstliches darin [. . .], diese mühselige Umschreibung wirklich vornehmen und keine anderen als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen [Dedekind 1887, vi].

Dieses wirkliche Umschreiben ist also nicht das, worum es bei dem Programm eigentlich zu gehen scheint — und zwar, so nehme ich an, weil es nichts erklären würde, analog zur späteren Zurückführung der natürlichen Zahlen auf Mengen (*explain the more basic and the clearer by the more obscure*, ⟨#8 S.36⟩). Wir werden uns noch damit auseinanderzusetzen haben, wozu jene letztgenannte Zurückführung denn dann dient (5.3.1.1); hier will ich noch ein wenig genauer wissen, inwiefern sie nichts "erklärt".

Georges Perec hat einen Kriminalroman vorgelegt, in dem der Buchstabe 'e' nicht vorkommt. Er hat damit bewiesen, daß es möglich ist, solch einen Roman zu schreiben, und hat wohl auch wieder einmal unter Beweis gestellt, daß die Widerständigkeit einer Aufgabe den ästhetischen Reiz ihrer Lösung mit ausmacht. Mir scheint, die Übersetzung mathematischer Aussagen in einen einfacheren Sprachrahmen läßt sich gut mit solchen lipogrammatischen[81] Fleißübungen vergleichen.

Man kann prinzipiell alle logischen Junktoren durch den Shefferstrich simulieren, oder man kann in einem Logikkalkül prinzipiell alle Schnitte (i.S. Gentzens) eliminieren; man kann in der Mathematik überhaupt auf Umgangssprache verzichten und alles formal aufschreiben etc.: Man könnte prinzipiell alles mögliche weglassen, würde sich damit aber von der *wahren* Denkweise des Mathematikers entfernen (der "und" und "nicht" und Schnitte tatsächlich *benutzt*, und der nichts tatsächlich auf ein formales System zurückführt). Das Interesse solcher Unternehmungen wie der Reduktion auf den Shefferstrich ist natürlich ein Interesse des Beweistheoretikers *als arbeitender Mathematiker*, dem solche Zusammenfassungen übersichtlichere Induktionsbeweise über seinen Logikkalkül erlauben. Er hat also letztlich das selbe Motiv wie ein an einem anderen Problem arbeitender Mathematiker, der auf formale Behandlung seines Problems verzichtet, weil ihn dessen beweistheoretische Seite nicht interessiert[82].

Ganz ähnliche Gründe mag es geben für das Interesse mancher Mengentheoretiker daran, übliche mathematische Konstruktionen allein mit den Ausdrucksmitteln von ZF (also mit $\in$) zu simulieren. Gibt es darüberhinaus eine philosophische Interpretation dieser Reduktion? Im Grunde hängt es damit zusammen, daß Mathematik ihren Gegenstand immer auch in gewisser Weise *verändert*, um ihn mathematischer Behandlung zugänglich zu machen[83]. Sehe ich einen mathematischen Begriff als Werkzeug, so *verwende* ich ihn nicht nur anders, als ich es täte, wenn ich ihn als Gegenstand sähe; ich gebe ihm auch eine je andere *Form*, je nachdem, ob ich ihn einsetzen oder ihn selbst untersuchen will. In diesem Sinne muß der Beweistheoretiker den mathematischen Beweis (der *sein* der mathematischen Behandlung zugänglich zu machender Gegenstand ist) "verändern". Die "richtige" Frage ist also immer: Für *wen* ist etwas Problem, für wen Werkzeug.

Zugleich gilt: die Umformulierung propositionaler Formeln unter ausschließlicher Verwendung des Shefferstrichs macht die Formeln in aller Regel komplizierter. Die "Einfachheit" besteht hier in der geringen Zahl an Symbolen, die benötigt werden; aber weder die Semantik wird dadurch klarer (die Semantik einer Formel $p|q$ ist ja "Nicht sowohl p als auch q"; dies scheint kognitiv eine komplexere Situation als "p und q" oder ähnliches), noch sind die Formeln "kurz". In diesem Fall geht es also vor allem um eine Reduktion von numerischer Komplexität, während die durch die Reduktion erreichte primitive Basis kognitiv als weniger "natürlich" empfunden wird als die Ausgangssituation; ähnlich im Fall der Elimination der Schnittregel. Das kann man in dieser Form von der Reduktion auf die Mengenlehre nicht sagen: Viele Philosophen sind der Überzeugung, daß mit der primitiven Basis von Mengen-

---

[81] Wie aus dem Nachwort hervorgeht, das der deutschen Übersetzung von [Perec 1969] beigegeben ist, spricht die Literaturwissenschaft im Fall des Verzichts auf einen Buchstaben von "Lipogramm".

[82] Den Unterschied der beiden Ziele hebt auch [Thiel 1995, 212ff] hervor; insbesondere akzentuiert er die Forderungen, die das Ziel der Kontrollierbarmachung der Beweisschritte an den Prozeß des Formalisierens stellt.

[83] So etwas kann man auch bei Grothendieck beobachten; 4.3.

operationen tatsächlich eine “natürliche” Basis mathematischen Denkens gefunden ist — d.h. die Grundbausteine, die diesem Denken kognitiv tatsächlich zugrundeliegen; hingegen behauptet niemand, der Aussagenlogik lägen kognitiv eigentlich nur Aussagen zugrunde, die ausschließlich die Verknüpfung “Nicht sowohl p als auch q” verwenden.

Und doch: Reduktion auf die Mengenlehre hat nicht wirklich die Aufgabe des “Erklärens”. Dieser Reduktionismus führt zwar Aussagen über “komplexe” Objekte auf Aussagen über “einfache” Objekte zurück; die *Aussagen* werden hierdurch zumeist komplexer: man kann eventuell “leichter” ihre *Wahrheit* einsehen (also ihre Denotation ermitteln), nicht aber leichter ihren *Sinn* i.S.Freges verstehen. Eine Weiterentwicklung des begrifflichen Rahmens hingegen führt zu einfacheren Aussagen (und hat auch genau den Sinn, dies zu tun). Ein paralleles Argument betrifft Deduktionen: diese werden durch das Zerlegen in elementare Beweisschritte im ganzen komplexer; man kann ihre Korrektheit leichter prüfen, ihre Strategie aber nur noch schwer durchschauen.

Die Diskussion hat im Falle der Mengenlehre nun darum zu gehen, ob der Rekurs auf Kognition überhaupt zulässig ist (dies ist bei der Aussagenlogik zweifellos der Fall) oder ob der *common sense*, der die Akzeptanz bestimmter Operationen als natürliche Basis steuert, auf etwas anderem beruht (etwas, was nicht den Charakter unveränderlicher Denkgesetze hat). Ich behaupte: er beruht auf Training.

> Ist es möglich, zu beobachten, daß eine Fläche rot und blau gefärbt ist, und nicht zu beobachten, daß sie rot ist? Denk Dir, man verwende eine Art Farbadjektiv für Dinge, die halb rot, halb blau sind: Man sagt sie seien ›bu‹. Könnte nun jemand nicht darauf trainiert sein, zu beobachten, ob etwas bu ist; und nicht darauf, ob es auch rot ist? Dieser würde dann nur zu melden wissen: »bu«, oder »nicht bu«. Und wir könnten aus der ersten Meldung den Schluß ziehen, das Ding sei zum Teil rot [Wittgenstein 1984a] VII §63 (S.425f).

Teil I

Entwicklung der Kategorientheorie in Anwendungskontexten

Kapitel 2

Algebraische Topologie

Die Begriffe Kategorie, Funktor, natürliche Transformation wurden in den frühen 40er Jahren von Samuel Eilenberg und Saunders Mac Lane entwickelt im Blick auf bestimmte konzeptuelle Unklarheiten in Problemstellungen der algebraischen Topologie. Zur Geschichte dieser Entwicklung liegen zahlreiche veröffentlichte Zeugnisse der Protagonisten vor; im vorliegenden Kapitel soll eine solche Geschichte daher nur grob nachgezeichnet werden. Statt dessen liegt der Schwerpunkt der Darstellung auf der Vorgeschichte bestimmter zentraler Konzepte und Problemstellungen der algebraischen Topologie, in deren Behandlung implizit kategorientheoretische Begriffe und Methoden vorweggenommen wurden — eine Epoche methodischer Suchen, von denen viele von Eilenberg-Mac Lane abgeschlossen werden konnten.

Die Auswahl der besprochenen Fragekomplexe ist eingeschränkt: die Einführung des Begriffs der Homologiegruppe, die Dualitätstheorie topologischer Gruppen, die Begriffe induktiver und projektiver Limes, Transformationen des Begriffs der Koeffizienten von (Co)homologie. Fragen der Homotopietheorie, *obstruction theory* etc. bleiben außen vor. Diese Auswahl ist nicht zwingend als Relevanzurteil zu verstehen; allerdings scheint in den hervorgehobenen Fragekomplexen die KT besonders fruchtbar zu sein.

Ich will nun genauer die "Aufgaben"[84] benennen, durch die die algebraische Topologie der zwanziger und dreißiger Jahre gekennzeichnet[85] war und mit denen das Aufkommen der KT in Verbindung zu stehen scheint:

- die Suche nach einer Homologietheorie für allgemeine Räume; vgl. 2.2.
- die Suche nach einem allgemeinen Ansatz für die Behandlung von stetigen Abbildungen mit algebraischen Mitteln, manifestiert in Einzelproblemen (Lefschetz' Fixpunktproblem — vgl. 2.1.2.1 —, Hopfs Suche nach den Homotopieklassen bestimmter Abbildungen — vgl. 2.1.2.2).

[84]Ich spreche bewußt von "Aufgaben" und nicht von "Problemen", da es sich z.T. um Aufgaben allgemeinerer Art handelt.

[85]Hier wird nur behauptet, daß diese Aufgaben damals zu den als wichtig angesehenen gehörten (und zugleich diejenigen sind, deren Behandlung letztlich zur KT geführt hat); es wird keine Aussage darüber gemacht, ob in jener Zeit noch andere Aufgaben als wichtig angesehen wurden oder nicht.

Beim zweitgenannten Punkt besteht ein offensichtlicher Zusammenhang zu kategorientheoretischen Fragestellungen, aber auch der erstgenannte hat mit solchen zu tun (Stichwort Limes). Die KT dient hierbei, wie ich aufzeigen werde, zunächst nicht als Mittel zur "Lösung" der Aufgaben, sondern als Mittel zur begrifflichen Aufarbeitung der vorhandenen "Lösungen" (sieht man allerdings die Aufgaben nicht als zu lösende Probleme, sondern als Forschungsprojekte begrifflicher Klärung, so kann man den Beitrag der KT schon als wesentlich bezeichnen). Beispielsweise stelle ich in 2.2.3.3 die Rolle der KT in der Begriffsklärung im Zusammenhang der Existenzbedingung für Homomorphismen bei der Homologietheorie für allgemeine Räume dar. Insgesamt dient die KT hier als Sprache. Ihre Rolle ändert sich später, vgl. 2.6.2 wegen der Beiträge Kans und Kapitel 3 wegen der Beiträge Grothendiecks.

Bereits der Begriff der Homologiegruppe[86] wird, wie ich kurz besprechen werde, eingeführt um der begrifflichen Aufarbeitung von Teillösungen der genannten Aufgaben willen, nämlich im Zusammenhang mit Lefschetz' Fixpunktformel (2.1) und Vietoris' Entwurf einer Homologietheorie für allgemeine Räume (2.2)[87]. Ein weiterer möglicher Grund für die Einführung des Begriffs Homologiegruppe ist ein operationaler Grund: Während man die Fundamentalgruppe nur ausnahmsweise kennt, kann man Homologiegruppen "oft" berechnen (dank des *excision axiom*; [Eilenberg und Steenrod 1952, 48]).

Mit der methodischen Umstellung der Verwendung von Homologiegruppen anstelle von numerischen Invarianten ging eine Erweiterung der Disziplin einher. In der Epoche der numerischen Invarianten sprach man von kombinatorischer Topologie; die Disziplin in ihrer späteren Ausprägung wurde als algebraische Topologie bezeichnet[88]. Vgl. hierzu [Volkert 2002, 291] sowie ausführlich [James 1999a] (hier findet sich auch eine interessante Bibliographie der Sekundärliteratur zur Entwicklung der algebraischen Topologie).

Das vorliegende Kapitel bringt nach der Behandlung dieser Umstellungen im Umgang mit Homologie eine Darstellung der Arbeiten Eilenbergs und Mac Lanes (2.3, 2.4), wo — im Zusammenhang der begrifflichen Aufarbeitung von Homologie — die Grundbegriffe der KT eingeführt wurden. Anschließend diskutiere ich noch zwei ausgewählte spätere Arbeiten zur algebraischen Topologie, in denen die KT jeweils eine wichtige (übrigens sehr verschiedene) Rolle spielt, nämlich [Eilenberg und Steenrod 1952] und [Kan 1958a].

---

[86] Homologie wurde zunächst in Form von numerischen Invarianten verwendet.

[87] Über einige der in diesen Abschnitten untersuchten Fragestellungen gibt das kürzlich erschienene Werk [Volkert 2002] detailliert Auskunft. Es empfiehlt sich aber, diese Ausführungen zumindest teilweise hier zu referieren, um die zu machenden Bemerkungen über die Frühgeschichte der Kategorientheorie in die bereits vorliegenden historischen Untersuchungen einbetten zu können.

[88] Auf den Übergang von der mehr kombinatorisch geprägten *Methodik* zur algebraischen gehe ich in 5.1.4 ein. Es mag insofern erstaunen, daß die Einführung der Bezeichnung algebraische Topologie mit der Einführung des Begriffes Homologiegruppe in Verbindung steht, als schon Poincaré den Begriff der Fundamentalgruppe hatte (in [Poincaré 1895]; siehe [Volkert 2002, 86f]). Volkert erklärt dies so (ebd. 87 im Anschluß an [Scholz 1979, 313ff]): Poincaré habe zu diesem Zeitpunkt keinen abstrakten Gruppenbegriff gehabt, sondern nur im Zusammenhang mit Substitutionen von Gruppen gesprochen.

2.1 Homologie in der Untersuchung stetiger Abbildungen

Lawvere hat mir im Gespräch seine Ansicht mitgeteilt, der Übergang zur Gruppenstruktur beim Begriff der Homologie sei geradezu *veranlaßt* gewesen von dem Wunsch, auch die stetigen Abbildungen algebraisch untersuchen zu können — zwischen den numerischen Invarianten hat man keine entsprechenden Abbildungen. Dies ist natürlich eine sehr starke historische Hypothese, für die es den Historiker nach Belegen verlangt. Als ein starker Beleg erscheint mir, daß, wie in 2.1.2.1 dargestellt, zumindest *ein* Ursprung des Begriffs Homologiegruppe im Lefschetz'schen Fixpunktsatz lag, wo es in der Tat um das Studium stetiger Abbildungen geht; die in 2.1.2.1 wiedergegebene Vorrede zu [Hopf 1930] weist indirekt auf die Bedeutung des Studiums stetiger Abbildungen für die Entwicklung des methodischen Apparats rund um Homologiegruppen hin. Demnach könnte die Skepsis, mit der ein Historiker der Hypothese von vorneherein begegnen wird — weil sie offensichtlich vom historischen Ergebnis (der Kategorientheorie mit ihrer Betonung der "Pfeile") her entwickelt ist — unangebracht sein.

In den folgenden Abschnitten geht es zunächst nur darum zu belegen, daß es in den zwanziger und dreißiger Jahren allgemein die Tendenz gab, Abbildungen zu studieren; ich versuche nicht, eine umfassende Darstellung dieser Tendenz zu geben — die laut [Hopf 1926, 130] auf Brouwer [1912] zurückgeht.

2.1.1 Homologiegruppen vor Emmy Noether

[Mac Lane 1981, 12ff] gibt Belege an für die These, der Übergang zur Rede von Homologiegruppen sei Emmy Noethers Idee gewesen[89]. Diese Belege sind einmal ein Zitat aus dem Vorwort von [Alexandroff und Hopf 1935] und zum andern die Passage aus [Hopf 1928], auf die ich unter 2.1.2.1 noch eingehe. [Mac Lane 1978, 11f] bespricht das Thema nochmals besonders ausführlich unter dem Gesichtspunkt eines *"change of style"*. Interessant besonders der Hinweis auf [Veblen 1931]: Auch dort steht schon eine Notiz am Ende des Buches, daß die Homologieklassen *modulo* p eine Gruppe bilden, was aber für die Systematik des Buches keine Rolle spielt. Wenn das schon in der ersten Auflage von 1921 stand, dann war das *vor* Noether und Hopf[90]; die Frage wäre dann, wieso Veblen dies nicht zum Anlaß einer Umgestaltung der Systematik nahm — und wieso Hopf dies sehr wohl tat. Es geht nicht mehr einfach nur darum, ob das Faktum bekannt ist oder nicht, sondern darum, ob es für relevant gehalten wird. Klaus Volkert äußerte mir gegenüber einmal die Vermutung, schon Poincaré sei sich dieser Eigenschaft der Komposition der Homologieklassen bewußt gewesen; Vietoris spricht in einem Brief (wiedergegeben in [Volkert 2002, 284 Anm.5]) von den "stillschweigend bekannten [. . .] Homologiegruppen". Wieso also wurde das Faktum zunächst nicht, schließlich aber doch weiterverfolgt? Wieso ändert sich das Kriterium

[89] Etwas früher, unter [Mac Lane 1976a, 5], scheint Mac Lane diese Belege noch nicht im Blick gehabt zu haben, sagt er dort doch noch "it was reputedly Emmy Noether [. . .]".

[90] Eine noch frühere folgenlose Nennung führt [Volkert 2002, 285] an.

der Auswahl "interessanter" Fakten? Dazu können die folgenden Abschnitte Anhalte geben.

2.1.2 Hopfs Arbeiten zur "Topologie von Abbildungen"

2.1.2.1 Eine gruppentheoretische Fassung von Lefschetz' Fixpunktformel und die "Algebra der Abbildungen"

In heutiger Sprache (vgl. z.B. [Brown 1971]) geht es bei Lefschetz' Satz um folgende Aussage: Sei $f : X \to X$ eine stetige Funktion von einem geeigneten topologischen Raum auf sich selbst. Man kann dann eine Abbildung $L : C(X) \to \mathbb{Z}$ definieren, so daß gilt: wenn $L(f) \neq 0$, so haben alle g homotop zu f einen Fixpunkt. Diese "Lefschetz-Zahl" L wird zunächst für freie Moduln definiert als die Spur eines bestimmten Endomorphismus eines graduierten Moduls. Die Lefschetz-Zahl von f wird dann definiert als die von f_* (also via der Funktorialität von Homologie)[91]. In diese heute übliche Form kam der Satz offenbar durch Heinz Hopf, während er bei Lefschetz selbst noch in einer anderen Form (ohne Verwendung von Homologie*gruppen*) ausgesprochen worden war[92]. Hierzu sei zunächst ein Zitat von Hopf im selben[93] Zusammenhang angeführt:

> Meinen ursprünglichen Beweis [der] Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel konnte ich im Verlauf einer im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer Begriffe unter dem Einfluß von Fräulein E.Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten [Hopf 1928, 5].

Dies ist offenbar so zu verstehen, daß Hopf vor dem Hinweis durch Emmy Noether noch nicht Homologiegruppen verwendete. Mac Lane geht etwas mehr ins Detail[94]:

> [Hopf and Alexandroff] were studying with some difficulty Lefschetz' proof of his fixed point theorem. They discussed it with Emmy Noether, who pointed out that the proof could be better understood by replacing the Betti numbers with the corresponding homology groups and using the trace of a suitable endomorphism of these groups. [Mac Lane 1978, 12]

Die heutige Form des Lefschetzschen Satzes (s.o.) enthält also die Formel in der ihr auf Noethers Hinweis hin gegebenen Form. Auf die Rolle von Hopf bei dieser Umformung weist die bei [Spanier 1966, 195] angegebene Bezeichnung *"Hopf trace formula"* hin.

Insgesamt sind die gerade dargestellten Entwicklungen der Ansatzpunkt für die "offizielle" Geschichte der Einführung des Begriffs Homologiegruppe. Die Herausgeber von [Hopf 1964] kommentieren die oben wiedergegebene Passage aus [Hopf 1928,

[91] Die Formel für L ist sinngemäß $L(f_*) = \sum(-1)^q Tr(f_{*q})$; [Spanier 1966, 194f].

[92] Lefschetz' Originalarbeiten sind [1926, 1927]. [Zariski 1935, 239] verweist des weiteren auf [Lefschetz 1930] Kapitel VI.

[93] Aus der Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel folgt Lefschetz' Satz.

[94] An Belegen für seine Darstellung nennt Mac Lane[Alexandroff 1932] und das Vorwort von [Alexandroff und Hopf 1935].

5] wie folgt: *"Die obige Note ist wohl die erste Publikation gewesen, in der die heute geläufige, von* Emmy Noether *stammende gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung kommt"*. Ähnlich äußern sich [Pontrjagin 1931, 168 Anm.13] und [James 1999a, 564f]. Wir werden in 2.2.1 noch sehen, inwieweit dies relativiert werden muß.

[Hopf 1928] steht insofern nicht allein unter Hopfs Arbeiten der Zeit, als es ihm damals vorwiegend um Abbildungen ging (vgl. 2.1.2.2); hierbei macht [Hopf 1930] den Eindruck einer "Begriffsklärungsarbeit" unter vielen "Problemlösungsarbeiten".

> [...] Man [verschmilzt] die Homologiegruppen der verschiedenen Dimensionszahlen zu einem *Ring* [...]
>
> Eine eindeutige und stetige (nicht notwendigerweise eindeutig umkehrbare) Abbildung f einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ bewirkt eine eindeutige Abbildung des Ringes und der Fundamentalgruppe der ersteren auf Ring und Fundamentalgruppe der letzteren. Die Gesamtheit der Eigenschaften dieser Gruppen- und Ringbeziehungen möge als *Algebra* der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden; von *Topologie* der Abbildungen wird man sprechen, wenn man nicht die Gruppen- und Ringelemente, sondern die Punkte der beiden Mannigfaltigkeiten und die durch f zwischen ihnen vermittelten Beziehungen betrachtet. Es ist von besonderem Interesse, den Zusammenhängen zwischen Algebra und Topologie einer Abbildung nachzugehen; ein Beispiel eines solchen Zusammenhangs ist der Lefschetzsche Fixpunktsatz [[Lefschetz 1926], [Lefschetz 1927]], der die Fixpunktzahl einer Abbildung von M auf sich — also eine topologische Eigenschaft — mit den Spuren der Substitutionen, denen die Homologiegruppen unterworfen werden — also mit algebraischen Eigenschaften — in Verbindung bringt; [...] [Hopf 1930, 71].

Hier wird also der Lefschetzsche Satz bereits in der Hopf-Noetherschen Form angegeben. Bemerkenswert sind ferner der Gedanke der Funktorialität und die Unterscheidung von Algebra und Topologie der Abbildungen.

2.1.2.2 Das $K^n \to S^n$-Problem

Unter dem $K^n \to S^n$-Problem verstehe ich das Problem der Bestimmung der Homotopieklassen von Abbildungen von einem n-dimensionalen Polyeder K^n in eine n-Sphäre. Dieses Problem behandelt [Hopf 1933]. (Überhaupt stehen die ersten Arbeiten Hopfs stark im Zeichen des Studiums von Abbildungen in Kugeln S^n; z.B. [Hopf 1935], [Hopf 1931].) Hopf löst das Problem durch Untersuchung der Auswirkung der Abbildungen auf $H_n(K^n, \mathbb{Z})$ und verschiedene $H_n(K^n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, also über das Manipulieren der Koeffizienten[95]. Etwas näher besprochen wird diese Arbeit bei

[95]Hopf war nicht der einzige, der einen Wechsel der Koeffizienten in der Behandlung solcher Probleme einsetzte; in einem ähnlichen Kontext betrachtet auch [Hurewicz 1936a] beliebige abelsche Gruppen als Koeffizientengruppen. Hurewicz wollte Homotopieklassen und "Homologieklassen" (d.h. induzierte Homomorphismen stimmen überein) von Abbildungen vergleichen. Allgemein gilt: Homologie ist homotopieinvariant (d.h. in Hurewicz' Termini: stimmt die Homotopieklasse zweier Abbildungen überein, so auch die Homologieklasse); Hurewicz studiert Fälle, in denen der umgekehrte Schluß möglich ist.

[Mac Lane 1976a, 6]; Mac Lanes Sicht, der ich mich anschließe, ist die, daß Hopf hier eine Lösung des Problems angegeben hat, die zwar das Problem löst, in sich aber sehr umständlich ist; daraus ergab sich Begriffsklärungsbedarf über den Begriff der Homologiegruppe hinaus. So vereinfachte [Whitney 1937] Hopfs Lösung durch die Verwendung von Cohomologie (vgl. dazu 2.1.2.3); auf einer weiteren Stufe begrifflicher Klärung führte Whitney sein Tensorprodukt ein, um den Übergang zu anderen Koeffizienten allgemeiner zu untersuchen [1938]. Whitneys Arbeiten ihrerseits suggerierten Steenrod und anderen die Untersuchung von *universal coefficient theorems*, die schließlich zur KT führte (2.2.4).

Die KT erhielt noch einen weiteren Impuls durch Hopf bzw. die allgemeine Tendenz der algebraischen Topologie jener Zeit, Abbildungen (insbesondere Abbildungen in eine Sphäre) zu untersuchen: In offensichtlicher Anlehnung an die von Hopf in den Vorjahren vorgelegten Arbeiten befaßten sich [Borsuk und Eilenberg 1936] mit dem Problem, zu einem Solenoid Σ (vgl. 2.3.1.1) die Homotopieklassen von Abbildungen $S^3 \setminus \Sigma \to S^2$ zu bestimmen — mit konkreten Auswirkungen für die Entwicklung der KT.

2.1.2.3 Exkurs: Der Begriff der Cohomologiegruppe

Im vorangegangenen Abschnitt wurde *en passant* der Begriff der Cohomologie erwähnt. Die Einführung dieses Begriffs durch Alexander und Kolmogoroff auf dem Topologiekongreß in Moskau 1935 (vgl. [Mac Lane 1978, 12]) ist ein interessanter historischer Gegenstand und überdies nicht ohne Berührungspunkte zu Fragen im Vorfeld der Kategorientheorie (vgl. 2.2.4). Da allerdings zur Geschichte dieses Begriffs mit [Massey 1999] bereits eine recht ausführliche Untersuchung vorliegt[96], kann eine solche in der vorliegenden Arbeit entfallen. Ich gehe hier nicht näher darauf ein, im Blick auf welche begriffliche Klärung der Begriff der Cohomologiegruppe *eingeführt* wurde; zumindest kann man festhalten, daß er in solcherlei Klärungen sehr bald eine Rolle gespielt hat, etwa was Dualitätssätze betrifft oder eben die Aufarbeitung von Hopfs Resultat zum $K^n \to S^n$-Problem.

Massey zählt einige Unternehmungen auf, die vor der erstmaligen Einführung des Begriffs stattfanden, deren Resultate heute aber üblicherweise unter Verwendung des Begriffes dargestellt werden. Massey behauptet *nicht*, daß es sich bei diesen Dingen tatsächlich um Motive für die schließliche Einführung des Begriffs gehandelt habe, aber seine Liste läßt zumindest die Annahme einer rein formalen Extrapolation (Stichwort Dualisierung von Homologie) als unbefriedigend erscheinen.

Massey spricht u.a. über die Suche nach einer anderen Formulierung topologischer Dualitätssätze *(the struggle to find more general and natural statements*, S.581f). Zugleich ermöglicht die Dualitätstheorie im Zusammenspiel mit dem Begriff der Cohomologiegruppe den Verzicht auf die Betrachtung kompakter Koeffizienten bei Homologie, da $H^k(X, Char(G)) \cong Char(H_k(X,G))$[97]. [Pontrjagin 1934a, 906]

[96] Interessante Informationen zur Geschichte des Begriffs findet man auch bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 48].

[97] Dieser Verzicht wurde noch bei [Eilenberg und Steenrod 1952] Kapitel IX nicht vorgenommen,

betrachtet kompakte Koeffizienten — und tut dies wohl als erster (dies suggerieren Bemerkungen aus der *Introduction* von [Steenrod 1940][98].) Da Pontrjagin zu diesem Zeitpunkt noch nicht über den Begriff der Cohomologie verfügte, verwundert es nicht, daß er nicht bemerkte, daß dieser Begriff die kompakten Koeffizienten verzichtbar macht. Zugleich gilt: Um die gleiche Zeit hat Pontrjagin die Dualitätstheorie topologischer Gruppen eingeführt [1934c]; es wäre im einzelnen zu untersuchen, in welchem Maße er dies im Blick auf eine Anwendung in der algebraischen Topologie (z.B. auf eine Umformulierung von Dualitätssätzen) getan hat. S.361 heißt es nur: *"The first chapter of this paper is devoted to the study of the connection between [a discrete commutative group and its character group]. It is also written so as to be applicable to combinatorial topology"*[99].

Zu den Dualitätssätzen, die dank dieses Begriffs umformuliert werden konnten, gehört der Dualitätssatz von Poincaré; dieser beinhaltet in der neuen Form, daß jedenfalls für Mannigfaltigkeiten (wo es also keine Singularitäten gibt), die zusätzlich kompakt sind, die Cohomologie mit Koeffizienten in einem Körper dual zur Homologie ist[100]. Vor diesem Hintergrund wird der Begriff Cohomologie für die algebraischen Anwendungen von Homologietheorien entscheidend: In algebraischen Situationen läßt sich nun ebenfalls die Frage stellen, ob und wann man eine solche Poincaré-Dualität hat. Dies ist von Bedeutung für das Rechnen mit Homologie: Im allgemeinen hat die Cohomologie eine Ringstruktur (ist also multiplikativ), die Homologie nicht; in den Fällen, wo man eine Poincaré-Dualität hat, kann man die Ringstruktur der Cohomologie allerdings via der Dualität in die Homologie transportieren; vgl. z.B. [Houzel 1998, 36].

Nach [Mac Lane 1976a, 6f] macht Whitneys Aufarbeitung von Hopfs Resultat die unterschiedlichen Akzente von Homologie und Cohomologie deutlich: Bei Homologie geht es um Kombinatorik (Zusammenkleben der Zellen bzw. Simplices des Komplexes); bei Cohomologie um eine Übersetzung von Geometrie in die Algebra (Whitney führt das Problem der Bestimmung von Homotopieklassen auf die Frage nach den Erzeugern einer zyklischen Gruppe zurück).

---

was von Cartan im *Review* angemerkt wurde. Vgl. hier aber auch die Diskussion bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 237], daß es (wegen des Problems mit dem direkten Limes topologischer Gruppen, siehe 2.5.3) keine Čech-Cohomologie mit Koeffizienten in kompakten Gruppen gibt.

[98] Steenrod schildert auf S.833 Probleme mit Vietoris-Zykeln und gibt zwei mögliche Gründe für die Probleme an, nämlich 1) die Konvergenzkriterien sind zu stark (es gibt zu wenig Zykeln), und 2) die Bedingungen dafür, daß konvergente Zykeln beranden, sind zu schwach (zu viele Zykeln beranden). Steenrod stellt dar, daß Pontrjagin in [1934a] eine Lösung für Problem 1) geliefert hat, indem er zu kompakten Koeffizienten überging und so die Konvergenz erzwang; Steenrod selbst schlägt dann einen neuen Typ von Zykeln *(regular cycles)* als Lösung von Problem 2) vor.

[99] Eine Besprechung der Pontrjagin-Dualität für die Zwecke der algebraischen Topologie bringt [Lefschetz 1942, 63ff]; Anwendungen in anderen Feldern kommen in Abschnitt 2.2.4 zur Sprache.

[100] Für den "alten" Begriff von Poincaré-Dualität vgl. 2.2.2.1; [Massey 1999, 579] verweist hier auf [Seifert und Threlfall 1934] Kapitel X.

2.1.3 Ein Impuls für die Algebra: Homomorphismen sind nicht immer surjektiv

In der modernen Algebra Noethers und van der Waerdens wurde die Bezeichnung Homomorphismus nur für solche Abbildungen zwischen Gruppen (oder ähnlichen Objekten) verwendet, die, in heutiger Bezeichnungsweise ausgedrückt, surjektiv sind [van der Waerden 1931, 31]. Darin kam zum Ausdruck, daß man sich im wesentlichen für die Unter- und Faktorgruppen einer gegebenen Gruppe interessierte (wobei die Einbettungen der Untergruppen nicht als eigenständige Abbildungen aufgefaßt wurden). Hingegen ist in der KT die Sichtweise manifestiert, daß zu einem tieferen Verständnis des Gruppenbegriffs erforderlich ist, "alle" Gruppen und die Übergangsfunktionen zwischen ihnen zu betrachten, sich also nicht nur auf das Studium der aus einer vorgelegten Gruppe abgeleiteten Unter- und Faktorgruppen (sozusagen ihre "nähere Verwandtschaft") zu beschränken. Um diesen Standpunkt einnehmen zu können, muß man offenbar auch über Homomorphismen zwischen Gruppen sprechen können, die nicht zueinander in einem solchen "Verwandtschaftsverhältnis" stehen. Dies läuft darauf hinaus, daß man auch von Homomorphismus spricht, wo man es nicht mit surjektiven (oder injektiven) Abbildungen zu tun hat. Daher ist historisch zu erarbeiten, wann diese Verschiebung der Sprech- (und Sicht-)weise aufkam.

Dies scheint mit den frühen Funktoren der algebraischen Topologie (wie etwa dem Übergang von Räumen zu Homologiegruppen) der Fall gewesen zu sein, da sie die Surjektivität der Pfeile nicht erhielten; vgl. [Mac Lane 1988a, 332]: $x \mapsto e^{2\pi ix}$ ist eine surjektive Abbildung der reellen Geraden auf den Kreis (aufgefaßt als topologische Räume), aber der zugehörige Homomorphismus zwischen den Homologiegruppen ist nicht surjektiv. Ähnlich stellt [Mac Lane 1970, 229] die Problematik dar. Solange die Homomorphismen zwischen Gruppen nur aus der Algebra selbst kamen, drängten sich offenbar keine Beispiele von nichtsurjektiven Homomorphismen auf. Erst der Aspekt von Funktoren, verschiedene mathematische Gebiete zu verbinden, führt also zu einer weiteren Ausschöpfung des Begriffs Homomorphismus.

Einer der ersten mir bekannten Texte, der das Problem thematisiert, ist [Pontrjagin 1931]. Pontrjagin definiert auf S.194 den Begriff der direkten Homomorphismenfolge (für genaueres vgl. 2.2.2.2), wobei die Homomorphismen eine Gruppe "in" eine andere abbilden sollen. Zu dieser Sprechweise macht Pontrjagin folgende Anmerkung:

> Wenn jedem Element a einer Menge A ein Element b einer Menge B zugeordnet ist, und dabei jedes b mindestens einem a entspricht, spricht man von einer Abbildung von A *auf* B. Eine Abbildung von A auf eine echte oder unechte Teilmenge von B heißt (nach Herrn van der Waerden) eine Abbildung von A *in* B.

In heutiger Terminologie ist demnach ein "Homomorphismus auf" ein surjektiver Homomorphismus. Leider sagt Pontrjagin nichts näheres dazu, an welchen Text van der Waerdens er denkt. In [van der Waerden 1931] kommt die Bezeichnung "Abbildung auf" anscheinend nicht vor (allerdings inhaltlich die Unterscheidung "auf" und "in"; S.5); Homomorphismen sind dort stets surjektiv (s.o.). Es ist leicht einzusehen, daß Pontrjagin für seine Zwecke Homomorphismenfolgen benötigte, deren Glieder

Abbildungen “in” sein dürfen (also nicht durchweg Abbildungen “auf” sein müssen), da er sich für Homomorphismenfolgen von Bettigruppen interessierte (S.198f). Sein expliziter Hinweis auf den Unterschied läßt allerdings vermuten, daß diese Verwendung des Wortes Homomorphismus nicht den allgemeinen Gepflogenheiten der Zeit entsprach. Es scheint also in der Tat so zu sein, daß damals mit “Homomorphismus” “üblicherweise” (d.h. in der Algebra) “surjektiver Homomorphismus” gemeint war[101].

Dies bedeutet, daß von einer Konstruktion, die funktoriell ist, nicht auch schon garantiert werden kann, daß sie in der Zielkategorie ausschließlich diejenigen Spezialfälle von Konstruktionen trifft, die üblicherweise betrachtet werden, wenn man sich nur mit der Zielkategorie befaßt. Das Kriterienproblem stellt sich also verschieden, je nachdem, woran man arbeitet.

Das Problem wird in [Eilenberg und Mac Lane 1942b] erwähnt.

2.1.4 Exkurs: Zur Geschichte der Pfeilschreibweise

Die hier zu behandelnde Fragestellung ist die folgende: wann wurde die Schreibweise $\ulcorner X \to Y \urcorner$ für eine Abbildung oder allgemeiner einen Morphismus zwischen geeigneten Objekten X, Y eingeführt? Solche Fragestellungen aus der Notationsgeschichte werden vielleicht nicht für extrem relevant gehalten, da mathematische Notationen gerne als durch Konvention zustandegekommen aufgefaßt werden. Ich halte die vorliegende Frage aber durchaus für relevant für die vorliegende Untersuchung, und zwar aus zwei Gründen:

- zum einen werden wir im Abschnitt 5.3.2.1 sehen, daß die gewählte Schreibweise für die Entwicklung der Kategorientheorie nicht bedeutungslos war; dadurch wird auch die Frage nach der Herkunft dieser Schreibweise relevant;

- zum anderen gibt es zur Frage der Herkunft der Pfeilschreibweise eine offizielle Geschichte, die, wie sich herausstellt, zu korrigieren oder zumindest zu ergänzen ist.

Diese offizielle Geschichte sieht folgendermaßen aus: [Mac Lane 1988a, 333] interessiert sich zunächst für den Fall, daß X und Y topologische Räume bezeichnen und f eine stetige Abbildung zwischen ihnen; hierfür nennt er als früheste publizierte Quelle [Hurewicz und Steenrod 1941]. Etwas anders stellt er die Sache in [Mac Lane 1971b, 29] dar:

> The fundamental idea of representing a function by an arrow first appeared in topology about 1940, probably in papers or lectures by W. Hurewicz on relative homotopy groups; c.f. [[Hurewicz 1941]]

[101] [McLarty 1990, 355] gibt an, [Seifert und Threlfall 1934] sei die erste Quelle für den allgemeinen Homomorphismusbegriff, während Gruppentheoretiker bis in die 50er Jahre weitermachten wie zuvor. Tatsächlich steht bei [Seifert und Threlfall 1934, 297] die heutige Definition; es wird ähnlich wie bei Pontrjagin “in” und “auf” unterschieden.

Ähnliches findet man bei [Mac Lane 1976a, 33] (s.u.). Eilenberg sieht in [Hurewicz 1936b, 220] die erste publizierte Quelle[102]. Dort steht die Schreibweise wohlgemerkt für Homomorphismen, während für Abbildungen eine andere benutzt wird: $\ulcorner f \,\varepsilon\, Y^X \urcorner$.

Diese offizielle Geschichte übersieht folgende Stelle, die sich bereits 1931 bei Pontrjagin findet:

> [...] die Gruppen $\beta_i, B_q, \beta_j, B_s$ [werden] wie folgt ineinander abgebildet [...]:
>
> $$\beta_i \leftarrow B_q \leftarrow \beta_j \leftarrow B_s$$
>
> [Pontrjagin 1931, 200]

Die Gruppen, von denen hier die Rede ist, sind durchweg Betti-Gruppen: die mit B bezeichneten Gruppen gehören zum Projektionsspektrum (vgl. 2.2.2.1), die mit β bezeichneten zu den offenen Komplementen von Polyederumgebungen der abgeschlossenen Menge F, deren Homologiegruppe berechnet werden soll. Die Dimensionen ergeben sich jeweils daraus, was gezeigt werden soll, nämlich daß zwei Homomorphismenfolgen äquivalent sind (zu dieser Terminologie und ihrer Rolle in Pontrjagins Arbeit vgl. eingehend 2.2.2.2).

Es wäre hier noch zu untersuchen, in welchem Zusammenhang diese Verwendung der Schreibweise bei Pontrjagin steht mit einer anderen Verwendung einer ähnlichen Schreibweise auf S.182ff unter "Geometrische Hilfsbetrachtungen". Der Pfeil ist dort ein Relationszeichen zwischen zwei Simplices (insbesondere S.184), und zwar symbolisiert er die Relation "x ist Rand von y".

Pontrjagin beginnt seine "Geometrischen Hilfsbetrachtungen" auf S.181 mit einer Anmerkung 25, die auf die vorhandene Literatur zu den verwendeten Methoden verweist. Unter den Arbeiten, die Pontrjagin nennt[103], ist [Alexander 1926] von Belang:

> [...] we use the notation
>
> $$K \rightarrow K'$$
>
> to indicate that [the complex] K is bounded by K' [*originale Anmerkung:* Poincaré used the congruence symbol $\equiv$ in place of the arrow $\rightarrow$. The notation here adopted is perhaps less liable to confusion, and has the advantage of emphasizing the unsymmetrical character of the relation of bounding.] [Alexander 1926, 312]

Alexander macht keine Angabe darüber, an welcher Stelle Poincaré die Notation $\ulcorner\equiv\urcorner$ eingeführt hat. Leider verwendet Poincaré dieses Zeichen nicht einheitlich; in [Poincaré 1895, 232] liest man *"[...] j'ai mis le signe* $\equiv$ *entre deux arête[s] (ou deux*

[102] Eine noch frühere, unveröffentlichte Verwendung (für Gruppenhomomorphismen) liegt womöglich in Hurewicz' Brief an Eilenberg vom 23.12.1935 vor (allerdings ist die Lesart der Datierung ausgerechnet in der letzten Ziffer der Jahreszahl unsicher). Eine genaue Lektüre des (in polnisch geschriebenen) Briefes gäbe sicher Aufschluß über sein Verhältnis zu [Hurewicz 1936b]. Siehe auch [Hurewicz 1995].

[103] Dies sind die Dissertation von v.Kampen (Leiden 1929), [Alexander 1926], [Alexander 1930], [Lefschetz 1926] und [van der Waerden 1930].

sommets) pour exprimer qu'elles font partie d'un même cycle"; auf der vorhergehenden Seite scheint das Zeichen eine andere Bedeutung zu haben. Auf S.244 gibt es wieder eine andere Verwendung des Zeichens. Insgesamt scheint Alexander dies sehr synthetisch zu lesen, denn Poincaré spricht eigentlich nie von *bord*; das Zeichen steht zumeist für *congruence* und impliziert dann oft, daß eine Seite homolog zu Null ist (das heißt, jeder Zykel wäre dann Rand).

Der Zusammenhang zwischen den beiden Verwendungen der Schreibweise bei Pontrjagin bleibt unklar, da es sich bei den Pfeilen in $\beta_i \leftarrow B_q \leftarrow \beta_j \leftarrow B_s$ nicht um von Randoperatoren induzierte Homomorphismen handelt (die Dimensionen passen nicht). Trotzdem scheint es naheliegend, anzunehmen, Pontrjagin habe die Schreibweise von den Komplexen auf ihre Homologiegruppen übertragen. Vor diesem Hintergrund ist es dann auch verständlich, daß Pontrjagin die Schreibweise keineswegs in völliger Allgemeinheit verwendet; insbesondere schreibt Pontrjagin *nicht* $\phi_m : U_m \to U_{m+1}$ bei seiner Definition der Homomorphismenfolgen für abstrakte Gruppen U_m!

Auch [Cech 1932, 156] verwendet die Schreibweise ⌜$\rightarrow$⌝ für die Berandungsrelation; [Steenrod 1936] verwendet die Schreibweise S.664 für stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen und S.683f für Homomorphismen. Selbst in [Hecke 1923, 18] findet sich der Pfeil; er wird dort allerdings so verwendet, wie heute üblicherweise ⌜$\mapsto$⌝ verwendet wird, also zwischen Elementen.

Pfeile und Diagramme hielten in die französische Tradition lt. [Gray 1979, 6] bei [Leray 1950] Einzug; dort S.96ff. Die Diagramme dienen Leray dazu, übersichtlich hinzuschreiben, in welcher Weise verschiedene Homomorphismen verknüpft werden.

2.2 Homologietheorie für allgemeine Räume

Die Suche nach einer Homologietheorie für allgemeine Räume führt, ähnlich wie der Wunsch, stetige Abbildungen mit homologietheoretischen Methoden behandeln zu können (2.1), auf Fragen, die die Einführung der Kategorientheorie motiviert haben. Zum einen tritt auch hier wieder die Frage auf: Entsprechen stetigen Abbildungen zwischen Räumen irgendwelche Korrespondenzen zwischen ihren Homologiegruppen? Es stellt sich aber noch eine weitere Frage, nämlich die nach der Modellierung eines "Grenzübergangs" für die in Betracht gezogenen Objekte. Die allgemeine Situation zeichnet sich ja dadurch aus, daß die dort betrachteten Räume den herkömmlichen Methoden zur Berechnung von Homologie nicht unmittelbar zugänglich sind. Der Zugang, den man sich verschafft hat, bestand darin, zu versuchen, den mit den vorhandenen Methoden unzugänglichen Raum irgendwie als Grenzfall von Räumen darzustellen, für die man eine Methode hat. Auf der Ebene der Gruppen führt dies zu einem Begriff von "Limesgruppe". Die Frage der induzierten Korrespondenzen zwischen den Homologiegruppen stellt sich nun als eine Frage nach den Umständen, unter denen man auf das Vorhandensein von Korrespondenzen zwischen solchen Limesgruppen zählen kann.

Die Einführung und Weiterentwicklung eines solchen Limesbegriffs soll in der Folge näher dargestellt werden; am Ende der Entwicklung stehen die heute üblichen Begriffe direkter (bzw. induktiver) und inverser (bzw. projektiver) Limes, die zum Begriffsbestand der KT gezählt werden. Modern ausgedrückt geht es bei der Frage nach dem Vorhandensein von Korrespondenzen zwischen Limites um die Funktorialität dieser Konstruktionen; in der Gangbarkeit des Grenzübergangs kommt eine sogenannte "universelle Eigenschaft" der Konstruktionen zum Ausdruck. Diese Bezeichnungen wurden historisch allerdings erst nach dem Stadium gebräuchlich, von dem augenblicklich die Rede ist, und sollen daher einstweilen noch weitgehend vermieden werden.

In der *note* unter [Eilenberg und Steenrod 1952, 253f] wird die Geschichte der *Čech theory* dargestellt:

> The first definition of homology groups of the Čech type was made by [[Vietoris 1927]]. He restricted himself to compact metric spaces and used a specific metric to define his cycles. About the same time [[Alexandroff 1929]] introduced the concept of approximating a compact metric space by an inverse sequence of complexes (called: a projection spectrum), and successfully defined Betti numbers. [[Pontrjagin 1931]] added to this the notion of an inverse sequence of groups, and obtained homology groups. [[Cech 1932]] first defined the nerve of a finite covering by open sets, and used such complexes as *approximations* to a space. By using inverse systems instead of sequences, he defined homology groups of arbitrary spaces.

Bemerkenswert scheint mir zunächst, daß die erste Arbeit in dieser Richtung nicht von Čech, sondern von Vietoris stammt. Die letztliche Namensgebung mag mit der größeren Allgemeinheit von Čech' Fassung zusammenhängen, kann aber auch darauf hindeuten, daß Vietoris' Arbeit offenbar zunächst nicht wahrgenommen wurde; vgl. dazu 2.2.1.

Allgemeine Frage: Stellt sich die Aufgabe des Studiums der Abbildungen für die Protagonisten einer Homologietheorie für allgemeine Räume? Pontrjagin spricht beispielsweise die Frage der nicht notwendig surjektiven Homomorphismen an. Ich will das nicht historisch untersuchen; ich behaupte nur: um 1940 hatte sich diese Aufgabe herauskristallisiert und "wartete" auf Eilenberg-Mac Lane.

Es muß zuerst einmal *gezeigt* werden, daß man durch den beschriebenen Grenzprozeß eine topologische Invariante des Raumes mit den gewünschten Eigenschaften erhält. Solche Nachweise waren ein herausragendes Problem der frühen algebraischen Topologie; vgl. z.B. ⟨#11 S.55⟩.

Gibt es Anwendungen des Limesbegriffs, in denen es darum geht, ein neues Objekt so zu konstruieren, daß es eine Eigenschaft hat, die man sich für die Ausgangsobjekte "gewünscht" hätte? In der Čech-Theorie scheint das gerade umgekehrt zu sein — und doch kommt Vietoris von der Vervollständigung metrischer Räume her.

2.2.1 Vietoris

Unabhängig von Hopf (und von Noether) hat auch Vietoris[104] in mehreren Veröffentlichungen den Begriff der Homologiegruppe eingeführt und untersucht [Volkert 2002, 283f].

> Leitmotiv der Bestrebungen von Vietoris war es, eine Homologietheorie für allgemeinere topologische Räume aufzubauen: Beschränkt man sich nicht mehr auf Mannigfaltigkeiten, so müssen die Homologiegruppen nicht mehr endlich erzeugt sein, weshalb die traditionellen numerischen Invarianten ihre Bedeutung verlieren [Volkert 2002, 284].

Volkert zitiert in einer Anmerkung aus einem Brief von Vietoris, in dem diese Gedanken näher erörtert werden; Vietoris suchte eine Homologietheorie für allgemeine Räume via Cauchyfolgen. Volkert kommt zu dem Schluß:

> [...] die Motive der Vietorisschen Algebraisierung [sind] nicht in der Theorie der Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner in der traditionellen kombinatorischen Topologie zu suchen, was auch nicht erstaunt, da sich in diesem Rahmen die herkömmliche Auffassung durchaus bewährt hatte.

So mag es denn auch zu erklären sein, daß die Urheberschaft Vietoris' zunächst übersehen wurde (und noch weitgehend übersehen wird). Wie bekannt sind Vietoris' Arbeiten? Alexandroff kommt bei seiner Besprechung von Vietoris' Text für das Jahrbuch nicht auf die Verwendung von Gruppen zu sprechen (vgl. hier auch [Mac Lane 1978, 11f]; Mac Lane nimmt übrigens an, daß Alexandroff und Hopf schon vor 1927 (nämlich 1926) Lefschetz' Beweis untersuchten).

[Vietoris 1927, 458] betrachtet Fundamentalfolgen[105] von Zykeln; die Rolle der Metrik spielt die Relation "ϵ-homolog" zwischen zwei Zykeln. Die Analogie zur üblichen Vervollständigung metrischer Räume ist also sehr konkret[106].

Von Vietoris' Arbeiten könnte ein Impuls in Richtung KT ausgegangen sein, denn:

> [Vietoris'] Ansatz wurde vor allem durch seinen Schüler W. Mayer fortgeführt [[Mayer 1929a], [Mayer 1929b]] und fand seinen bis heute bekannt gebliebenen Ausdruck in der Mayer-Vietoris-Sequenz. Wichtig hierbei ist, daß Mayers Untersuchungen darauf hinauslaufen, Beziehungen zwischen mehreren Homologiegruppen in Gestalt von Homomorphismen zu betrachten, welche durch die entsprechenden Inklusionsbeziehungen induziert werden [Volkert 2002, 284].

Dies ist natürlich von großem Interesse, da hier also den Homomorphismen und der Funktorialität eine wichtige Rolle zukommt.

[104] Die in Eilenbergs Nachlaß enthaltenen Briefe von Vietoris an Eilenberg sind alle deutlich später entstanden, so daß dort nicht mit weiteren Aufschlüssen zu rechnen ist.

[105] Vietoris bezeichnet Cauchyfolgen als Fundamentalfolgen (was ja eine übliche Variante ist). Dies wird uns bei Pontrjagin noch beschäftigen.

[106] Diese Konstruktion stammt für $\mathbb{R}$ von Cantor; siehe [Belna 1996, 125ff].

2.2.2 Pontrjagin

2.2.2.1 Pontrjagins Vorhaben: Ausdehnung von Dualitätssätzen auf beliebige abgeschlossene Mengen

Pontrjagin will für sämtliche damals bekannten topologischen Dualitätssätze, die bis dahin unter Verwendung von Betti*zahlen* formuliert worden waren — das sind der Dualitätssatz von Poincaré, der Dualitätssatz von Alexander und alle Verallgemeinerungen dieser Sätze — einen *algebraischen* Beweis geben dadurch, daß er die Betti*gruppen* betrachtet. Die Stoßrichtung dieses Wechsels in der Beweismethode liegt darin, daß dadurch die Sätze, die bisher ausschließlich für Mannigfaltigkeiten bewiesen waren, für beliebige abgeschlossene Mengen in Mannigfaltigkeiten gezeigt werden können.

Pontrjagin beginnt mit einer (dem Historiker sehr nützlichen) Darstellung der bisher unternommenen Arbeiten. Hier nennt er auf der einen Seite Poincarés Satz für Bettizahlen n-dimensionaler orientierter Mannigfaltigkeiten [1895] und die Erweiterung dieses Satzes durch [Veblen 1923], auf der anderen Seite Alexanders Dualitätssatz [1922] und Pontrjagins eigene Erweiterungen dazu in [Pontrjagin 1927]. Die Sätze der ersten Gruppe beinhalten im wesentlichen, daß die r-te und die $(n-r)$-te Betti-Zahl für eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit[107] übereinstimmen[108]; bei den Sätzen der zweiten Gruppe geht es entsprechend um die Übereinstimmung der r-ten und der $(n-r-1)$-ten Betti-Zahl im Komplementärraum $\mathbb{R}^n - K$ eines Komplexes K. Pontrjagin kommt es auf die Analogie dieser Situationen an, die er durch "die Anwendung eines rein algebraischen Prinzips" aufzeigt. Dazu führt er den Begriff des "Gruppenpaars" ein, bei dem es um eine Festlegung eines Produktes von Elementen aus zwei *verschiedenen* Gruppen geht, das in einer dritten Gruppe (modern ausgedrückt der Koeffizientengruppe) liegt und naheliegenden Verträglichkeitsbedingungen unterworfen ist; die genaue Definition des Begriffs übergehe ich hier. Pontrjagin skizziert, wie nun der Begriff des Gruppenpaars bei der Verallgemeinerung der Dualitätssätze zum Einsatz kommen soll. Im Kontext der Sätze von Poincaré und Veblen findet er, daß die betrachteten Bettigruppen ein solches Gruppenpaar bilden, wenn man die Schnittzahl der in Frage kommenden Zykel als Produkt zweier Elemente auffaßt; im Kontext des Alexanderschen Satzes faßt man entsprechend die Verschlingungszahl als Produkt auf. Man gewinnt so die bekannten Sätze auf anderem Wege (nämlich vermittels allgemeiner Resultate darüber, wann zwei Gruppen, die ein Gruppenpaar bilden, isomorph sind).

Pontrjagins Verallgemeinerungen sind die folgenden:

[107] Dies ist für Pontrjagin ein zusammenhängender endlichdimensionaler Komplex, für den sämtliche Umgebungskomplexe (d.i. die Gesamtheiten der einem Simplex gegenüberliegenden Seiten) in ihm homöomorph zu Sphären entsprechender Dimension sind. Aus heutiger Sicht würde man noch die Kompaktheit der Mannigfaltigkeit unterstreichen.

[108] Dies ist in verschiedener Hinsicht eine "alte" Form des Satzes: Anstelle von Bettizahlen ist in späteren Ausformungen des Satzes — und zwar genau seit Pontrjagins Arbeit — von Homologiegruppen die Rede; noch etwas später wird er unter Hinzuziehung des Begriffs Cohomologiegruppe formuliert (vgl. 2.1.2.3), was die Beschränkung auf endlich viele Dimensionen hinfällig macht.

> Nachdem der sozusagen klassische Fall der in Mannigfaltigkeiten eingebetteten Komplexe erledigt ist, wende ich mich zu dem Fall einer beliebigen abgeschlossenen Menge. Man könnte auch hier sofort den Fall einer abgeschlossenen Menge in einer beliebigen Mannigfaltigkeit behandeln ("Fall F in M^n"). Da aber alle prinzipiellen Schwierigkeiten algebraischer Natur bereits im Falle „K in M^n" und alle mengentheoretischen Schwierigkeiten im Falle „F in $\mathbb{R}^n$" auftreten, habe ich mich, um technische Komplikationen zu vermeiden, auf den letzteren Fall beschränkt. [S.170] #10

Was hierbei in seinem historischen Kontext unter "beliebige Mannigfaltigkeit" zu verstehen ist und inwieweit er selbst an dieser Definition beteiligt war, sagt er auf S.170 und ausführlicher in Kapitel II §1 seiner Arbeit. Hier festzuhalten: anstatt die "größtmögliche" Verallgemeinerung durchzuführen, verallgemeinert Pontrjagin separat in zwei Richtungen. Anhand der Methoden, die er zur Lösung der beiden Spezialfälle jeweils verwendet, kann man erkennen, was ihm als "algebraische" und was als "mengentheoretische Schwierigkeit" gilt. Im ersten Fall ist entsprechend seiner Rede vom "rein algebraischen Prinzip" die Methode der Gruppenpaare gemeint, denn die Erledigung des oben genannten "sozusagen klassischen Falls" skizziert er auf den vorangehenden Seiten unter Verwendung dieser Methode.

Im zweiten Fall greift Pontrjagin auf die Methode der Projektionsspektren nach [Alexandroff 1929, 107] zurück. Diese Methode besteht darin, auf einer beliebigen abgeschlossenen Menge die Struktur eines Komplexes durch eine Folge von immer besser mit der Menge übereinstimmenden, über simpliziale Abbildungen verbundenen Komplexen — das Projektionsspektrum — iterativ zu approximieren. Man hat daher für jede Dimension r statt einer Gruppe eine Folge solcher Gruppen (die Bettigruppen der im Projektionsspektrum vorkommenden Komplexe) und eine zugehörige Homomorphismenfolge (wobei die Homomorphismen zwischen den Gruppen aus den simplizialen Abbildungen zwischen den Komplexen hervorgehen). Pontrjagin wird diese Art Folgen aus Gruppen und Homomorphismen auf S.196 als "inverse Homomorphismenfolgen" bezeichnen; dazu näheres im folgenden Abschnitt. Pontrjagins Augenmerk liegt nun darauf, daß sich trotz der Willkürlichkeit des verwendeten Projektionsspektrums eine topologische Invariante der abgeschlossenen Menge ergibt, insofern zu zwei verschiedenen Spektra der selben Menge "äquivalente" Folgen gehören (der hierbei verwendete Äquivalenzbegriff wird bei ⟨#12 S.56⟩ erklärt); Pontrjagin zeigt nämlich, nachdem er den Begriff der Limesgruppe einer Homomorphismenfolge eingeführt hat, daß sich aus äquivalenten Folgen isomorphe Limesgruppen ergeben. Pontrjagin selbst dazu:

> Die wichtigste Folge aus dieser Theorie ist zweifellos der in ihr enthaltene Beweis der Tatsache, daß *die reduzierte Bettische Gruppe des Komplementär-Raumes zu einer abgeschlossenen Menge eine topologische Invariante dieser Menge ist.* [S.171] #11

Die Einführung des Begriffs der Limesgruppe und die Untersuchung der Eigenschaften dieses Begriffs sind es also, was Pontrjagin als Lösung der "mengentheoretischen Schwierigkeiten" seines Problems ansieht.

Pontrjagin überlegt sich nun, ob der Beweis dieses Resultats auch nach der alten Methode über die Ränge der Gruppen hätte bewiesen werden können. Eine

Zusammenstellung der diesbezüglichen negativen Resultate beschließt er mit der Bemerkung:

> Die Invarianz dieser Gruppen könnte mit Methoden, die nur die Bettischen Zahlen, also die Ränge berücksichtigt, prinzipiell nicht bewiesen werden, so daß unser Satz durchaus keine selbstverständliche Erweiterung der bekannten Invarianzsätze für Bettische Zahlen ist, sondern grundsätzlich tiefer liegt. [S.172]

2.2.2.2 Die "direkte Limesgruppe"

Das Kapitel III von [Pontrjagin 1931] (S.194ff) führt direkte und inverse Homomorphismenfolgen sowie die Limesgruppen direkter Homomorphismenfolgen ein.

> Es sei
> $$U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots$$
> eine unendliche Folge von Gruppen, von denen jede Gruppe U_m in [...] ihren Nachfolger U_{m+1} mittels des Homomorphismus ϕ_m abgebildet wird; die Folge
> $$\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_m, \ldots$$
> heißt sodann eine *direkte Homomorphismenfolge.*

Zur Sprechweise "eine Gruppe wird *in* eine andere abgebildet" macht Pontrjagin eine interessante Anmerkung; vgl. dazu eingehend 2.1.3. Pontrjagin definiert sodann den Begriff der "Limesgruppe" einer solchen direkten Homomorphismenfolge. Zunächst spricht Pontrjagin von einer "Fundamentalfolge" $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, \ldots)$, wenn für jedes $m \geq k$ gilt, daß $x_m \in U_m$ ist und $x_{m+1} = \phi_m(x_m)$. Zwei solche Fundamentalfolgen können in der Relation der sogenannten Konfinalität stehen, wenn sie nämlich ab einem Index übereinstimmen. Die Limesgruppe besteht dann aus den Klassen konfinaler Fundamentalfolgen, wobei die Gruppenverknüpfung wie folgt erklärt ist: Sind $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, \ldots)$ und $(y_h, y_{h+1}, \ldots, y_m, \ldots)$ Vertreter je einer Klasse mit o.B.d.A. $h \geq k$, so bestimmt $(x_h \cdot y_h, x_{h+1} \cdot y_{h+1}, \ldots, x_m \cdot y_m, \ldots)$ die Klasse, die als das Produkt der beiden Ausgangsklassen angesprochen wird.

Außerdem führt Pontrjagin eine Äquivalenzrelation auf Homomorphismenfolgen ein:

> Zwei direkte Homomorphismenfolgen heißen [...] äquivalent, wenn man in ihnen
> #12 zwei solche Teilfolgen finden kann, welche von einer dritten Folge umfaßt werden [S.195].

(Was bezüglich der Homomorphismen mit einer Teilfolge gemeint sein soll, ist die *Hintereinanderausführung* der Homomorphismen zwischen den in der Gruppenteilfolge übersprungenen Gruppen; es ist dann auch naheliegend, was mit "umfassen" gemeint sein soll). Das Interesse dieses Äquivalenzbegriffs besteht darin, daß die sich ergebenden Limesgruppen isomorph sind (Satz I).

Auf S.196 erklärt Pontrjagin den Begriff der inversen Homomorphismenfolge: Diesmal sind Homomorphismen von U_{m+1} in U_m gegeben. Wichtig ist dabei folgende Äußerung:

> Genau wie vorher lassen sich auch für inverse Homomorphismenfolgen die Begriffe der umfassenden bzw. äquivalenten Folgen einführen. Es gibt dabei kein Analogon zum Satze I, da ja eine inverse Homomorphismenfolge keine Limesgruppe besitzt.

Diese Äußerung ist auffallend, da nicht nur andere Autoren, sondern auch Pontrjagin selbst wenig später ohne Bedenken die inverse Limesgruppe einführen werden (2.2.4); es wäre daher interessant herauszufinden, welches Problem Pontrjagin damit zu haben glaubte. Auch wenn er es nicht ausdrücklich sagt, so war ihm vermutlich gleichwohl klar, daß zur Bestimmung der Elemente seiner direkten Limesgruppe strenggenommen gar nicht die vollen Fundamentalfolgen, sondern jeweils nur ihre ersten Elemente erforderlich sind (da die übrigen Elemente durch die Gleichung $x_{m+1} = \phi_m(x_m)$ festliegen); man kann die Definition der Äquivalenzrelation ("konfinal") und der Gruppenverknüpfung leicht an diese Sichtweise anpassen[109]. Man kann also ein Element der direkten Limesgruppe durch ein einziges Element einer der Gruppen der Folge völlig bestimmen. Dies ist für die Elemente der inversen Limesgruppe nicht der Fall (wie wir noch sehen werden), sondern man benötigt dafür je ein Element aus *jeder* der Gruppen der Folge, also im allgemeinen unendlich viele. Insbesondere sind die Elemente der inversen Limesgruppe nicht Klassen von (inversen) Fundamentalfolgen nach irgendeiner nichttrivialen Äquivalenzrelation, sondern die Fundamentalfolgen selbst.

Nun wird Pontrjagin im Beweis seines allgemeinen Dualitätssatzes (S.198f) aber gerade mit einer inversen Folge zu tun haben. Ist nämlich $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ *"eine abnehmende Folge von Polyederumgebungen der [abgeschlossenen] Menge F, welche sich auf diese Menge zusammenziehen[, und] β_i die r-te Bettische Gruppe von Q_i, [so folgt] aus $Q_i \supset Q_{i+1}$ [. . .] eine homomorphe Abbildung $\tilde{\omega}_i$ von β_{i+1} in β_i"*. Daher benötigt er eine Hilfskonstruktion: Er bestimmt Bedingungen (die wieder mit dem "Gruppenpaar"-begriff zusammenhängen), die eine inverse Folge erfüllen muß, so daß es zu ihr in eindeutiger Weise eine direkte Folge gibt, deren Limesgruppe völlig durch die inverse Folge bestimmt ist. Diese Limesgruppe bezeichnet Pontrjagin als die "duale" Gruppe. Eine solche duale Gruppe tritt dann auch im Beweis des Dualitätssatzes auf, nämlich die Bettigruppe zum Komplement des Raums, um den es Pontrjagin eigentlich geht (die Rede von "dual" ist hier also noch sehr nahe an der ursprünglich in der projektiven Geometrie ausgeprägten Rede: Komplemente). Aus späterer Sicht könnte man hier mit Hilfe des Begriffs der Cohomologiegruppe die Resultate als Resultate über den Raum selbst formulieren; die Rede von Dualität ist auf das Verhältnis zwischen Homologie und Cohomologie übergegangen. Kategoriell ausgedrückt ist es die Kovarianz der Homologie, deretwegen ein Begriff des direkten Limes hier nicht ausreichend ist, denn die Folge der Räume ist ja eine inverse.

Die Beobachtung, daß Pontrjagin die Fundamentalfolgen *modulo* Konfinalität als die Elemente der Gruppe auffaßt, läßt an die analoge Konstruktion der reellen aus den rationalen Zahlen oder allgemeiner an die Komplettierung eines metrischen Raumes denken. Pontrjagin schließt hier an Vietoris an, bei dem "Fundamentalfolgen" tatsächlich noch Cauchy-Folgen von Zykeln waren (2.2.1); Zykeln sind natürlich

[109] und man *muß* dies auch im allgemeineren Kontext der gerichteten Indexmengen, vgl. 2.2.3.1.

auch die Elemente der bei Pontrjagin *intendierten* Gruppen (Bettigruppen) — daher zweifellos seine Übernahme der Terminologie "Fundamentalfolge" (Vietoris' Zykeln bilden dann auch Fundamentalfolgen im Sinne Pontrjagins). Pontrjagin überträgt (im Einklang mit seiner Maxime, mit "rein algebraischen Prinzipien" auszukommen) den Vietoris-Alexandroff-Ansatz auf abstrakte Gruppen; die Analogie zur Vervollständigung metrischer Räume ist nur mehr formal. Dennoch mag auch diese Analogie ihn davon abgehalten haben, inverse Limites zu betrachten, weil sie dann natürlich nicht fortbesteht.

2.2.3 Die Čech-Theorie und Erweiterungen des Limesbegriffs

Čech will in [1932] eine Homologietheorie[110] für allgemeine (nicht mehr notwendig kompakte) Räume erreichen. Homologie wurde zunächst via Überdeckungen definiert. Wenn die nichtleeren Durchschnitte endlicher Teilüberdeckungen zusammenziehbar sind, ist diese Homologie die des Raumes. Die Čech-Theorie behandelt nun den Fall, wo man keine derartigen Überdeckungen hat [Barr und Wells 1985, 62].

Čech spricht nicht über direkte oder inverse Limites im allgemeinen, sondern klärt auf der Ebene der Zykeln, was bei Verfeinerung von Überdeckungen passiert. Für [Steenrod 1936, 662], der sich stark auf Čech bezieht, ist der Limesbegriff bereits ein Standardwerkzeug:

> In part I we formalize a well-known tool of the topologist: mapping systems and homomorphism systems. These notions are found first in the projection spectrum of [[Alexandroff 1929]], and they have since been used by [[Pontrjagin 1931]], [[Lefschetz 1930]], and others. In keeping with the ideas of [[Cech 1932]], we do not restrict ourselves to sequences but admit partially ordered systems.

2.2.3.1 Übergang zu beliebigen gerichteten Indexmengen und eine allgemeinere Definition der direkten Limesgruppe

Die Čech-Theorie gab Veranlassung dazu, von Folgen von Gruppen zu Systemen von Gruppen (also zu beliebigen gerichteten Indexmengen) überzugehen: Eine Überdeckung kann feiner sein als eine andere; mit dieser partiellen Ordnungsrelation bilden die Überdeckungen eine gerichtete Menge. Jede Überdeckung führt auf einen bestimmten Komplex; die Čech-Homologiegruppe ist der Limes der entsprechenden Homologiegruppen.

Als Beispiel einer[111] Definition der direkten Limesgruppe für ein direktes System zitiere ich [Eilenberg und Mac Lane 1942a, 789]:

---

[110] Heutzutage ist eher Čech-Cohomologie in Gebrauch; in der Originalarbeit von Čech gibt es nur Homologie, da der Begriff der Cohomologiegruppe erst später eingeführt wurde (für Literaturangaben zu dieser Einführung vgl. 2.1.2.3). Ich mache in 2.4.2 einige Bemerkungen dazu, woran es liegen könnte, daß mittlerweile der Akzent vornehmlich auf Cohomologie gesetzt wird.

[111] nicht die historisch früheste, vgl. [Steenrod 1936].

> [...] for each index α in a directed set J let H_α be a (discrete) group, and for each pair $\alpha < \beta$, let $\phi_{\beta\alpha}$ be a homomorphism of H_α into H_β. If $\phi_{\gamma\alpha} = \phi_{\gamma\beta}\phi_{\beta\alpha}$ whenever $\alpha < \beta < \gamma$, the groups H_α are said to form a *direct system* with the *projections* $\phi_{\beta\alpha}$.
>
> Any direct system determines a unique (discrete) limit group $H = \varinjlim H_\alpha$ as follows. #13
> Every element h_α of one of the groups H_α is regarded as an element h^*_α of the limit H, and two elements h^*_α, h^*_β are equal if and only if there is an index $\gamma, \alpha < \gamma, \beta < \gamma$, with $\phi_{\gamma\alpha}h_\alpha = \phi_{\gamma\beta}h_\beta$. Two elements h^*_α and h^*_β in H are added by finding some γ with $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$; the sum is then the element $h^*_\gamma = (\phi_{\gamma\alpha}h_\alpha + \phi_{\gamma\beta}h_\beta)^*$. Under this action and equality, the elements h^*_α form a group $H = \varinjlim H_\alpha$. [...]
>
> In case each given projection $\phi_{\beta\alpha}$ is an isomorphism [...], the limit group can be regarded as a "union" of the given groups: each group H_α has an isomorphic replica #14
> [...] within H, and H is simply the union of these subgroups. [...]

Wie schon in 2.2.2.2 angedeutet, ist diese Definition (von der Verwendung einer beliebigen gerichteten Indexmenge abgesehen) gleichwertig zu der von [Pontrjagin 1931]. Um dies einzusehen, muß man sich zunächst klarmachen, daß eine Fundamentalfolge im Sinne Pontrjagins durch ihr erstes Glied völlig bestimmt ist und daß in der speziellen gerichteten Menge $\mathbb{N}$ (auf die sich Pontrjagin beschränkt) γ (in den Bezeichnungen von Eilenberg-Mac Lane) immer gleich α oder β gewählt werden kann. Aus der Konstruktion der Fundamentalfolgen bei Pontrjagin ergibt sich dann, daß sein Gleichheitsbegriff (zwei "konfinale" Fundamentalfolgen werden identifiziert) dem von Eilenberg-Mac Lane entspricht; auch die beiden Additionen sind dann gleichwertig. Gleichwohl stellt die Neufassung der Definition begrifflich einen Fortschritt dar, weil nur hier die Definition auf eine beliebige gerichtete Indexmenge ausgedehnt werden kann.

[Lefschetz 1942, 57] bringt eine andere Definition: Er betrachtet zunächst die direkte Summe G eines gerichteten Systems von Gruppen G_λ (er spricht von *weak product*; S.47) Lefschetz definiert in der üblichen Weise, was ein *direct system of (discrete) groups* sein soll; den Homomorphismus von G_μ nach G_λ bezeichnet er mit $\pi^{*\mu}_\lambda$. Die Elemente $g_\mu - \pi^{*\mu}_\lambda g_\mu$ für $\lambda \succ \mu$ erzeugen eine Untergruppe H von G; unter der angegebenen Differenz ist dabei gemäß einer Konvention von S.48 die Differenz derjenigen Elemente des direkten Produkts der G_λ zu verstehen, deren einzige von Null verschiedene Koordinate die mit dem Index μ (diese hat den Wert g_μ) bzw. λ (diese hat den Wert $\pi^{*\mu}_\lambda g_\mu$) ist. Die *limit-group* des *direct system* ist dann definiert als die Faktorgruppe $G^* = G/H$. Wohlgemerkt: diese Konstruktion erklärt Lefschetz nicht für topologische, sondern für diskrete (abstrakte) Gruppen.

Auf der folgenden Seite zeigt Lefschetz die Äquivalenz[112] dieser "indirekten" Definition zu der "direkten" (die ich oben nach Eilenberg-Mac Lane zitiert habe); er kommentiert auch das Interesse daran, zwei Definitionen zu haben:

> The indirect definition [...] in terms of the weak product is most suitable from the point of view of group theory. In the applications (VI, VII) we shall find convenient to have the direct [definition].

[112] Eine ähnliche Diskussion findet sich später bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 222].

Die erwähnten Kapitel befassen sich mit *Nets of complexes* und *Homology theory of topological spaces*; Lefschetz erläutert dazu auf S.213:

> The passage from finite complexes to infinite complexes or topological spaces necessitates some limiting process, and the theory of nets will provide the necessary mechanism. In its general form it may be viewed as abstracted from the Čech homology theory for topological spaces [[Cech 1932]] which will be adopted as the basic theory in (VII).

Mit anderen Worten: Die Fassung des Begriffs, die sich vom Standpunkt einer internen Entwicklung der Gruppentheorie empfiehlt, ist ungünstig für die beabsichtigten Anwendungen in der Čech-Theorie und umgekehrt. Interne und externe Kriterien weichen hier voneinander ab.

2.2.3.2 Der Begriff des inversen Limes

Wir hatten schon in 2.2.2.2 gesehen, daß Pontrjagin zunächst versuchte, ohne einen Begriff des inversen Limes auszukommen. Dies wurde mit der Einführung der Čech-Theorie in aller Allgemeinheit aufgegeben, da man es dort eben mit inversen Folgen von Räumen zu tun hat. Unter den an Čech anschließenden Arbeiten, die eine Definition bringen, greife ich [Eilenberg und Mac Lane 1942a] heraus:

> For each index α in a directed set let A_α be a (generalized [i.e. not necessarily Hausdorff] topological) group, and for each $\alpha < \beta$ let $\psi_{\alpha\beta}$ be a (continuous) homomorphism of A_β in A_α. [...] Each inverse system determines a limit group $A = \varprojlim A_\alpha$. An element of this group is a set $\{a_\alpha\}$ of elements $a_\alpha \in A_\alpha$ which "match" in the sense that $\psi_{\alpha\beta} a_\beta = a_\alpha$ for each $\alpha < \beta$. The sum of two such sets is $\{a_\alpha\} + \{b_\alpha\} = \{a_\alpha + b_\alpha\}$; since the ψ's are homomorphisms, this sum is again an element of the group. This limit group is a subgroup of the direct product of the groups A_α. The topology of the direct product $\prod A_\alpha$ thus induces [...] a topology in $A = \varprojlim A_\alpha$ [...] [Eilenberg und Mac Lane 1942a, 789]

Die Definition des inversen Limes von Gruppen als Untergruppe des direkten Produkts hat also den Sinn, eine Topologie zuweisen zu können (nämlich die Teilraumtopologie). Hier stellt sich die Frage, wozu dies notwendig ist, wenn die intendierte Anwendung des Begriffs im Bereich der Homologiegruppen liegt — dies sind in der Regel diskrete $\mathbb{Z}$-Moduln. Vgl. aber 2.1.2.3.

2.2.3.3 Die Existenzbedingung von Limeshomomorphismen

Wie wir sehen werden, ist die Kategorientheorie u.a. entstanden, um die genauere begriffliche Fassung von direkten und inversen Limites von Gruppen zu ermöglichen — und zwar, was ihre Anwendung in Fragestellungen der algebraischen Topologie betrifft. Die Bedeutung der Begriffe für die algebraische Topologie besteht vornehmlich in ihrer Bedeutung für die Čech-Theorie (2.2.3.1). An dieser Stelle ist auch die Rolle der KT als Instrument der begrifflichen Klärung zu spüren: dank der KT kann man die genauen Bedingungen angeben, unter denen Homomorphismen zwischen zwei inversen bzw. direkten Folgen einen Homomorphismus zwischen den beiden Limesgruppen (hier: zwei Čech-(Co)Homologiegruppen) induzieren (ich bezeichne die gesuchten Homomorphismen zwischen den Limesgruppen kurz als "Limes-Homomorphismen"). Ähnlich stellen auch [Barr und Wells 1985, 62] die Problemlage dar, der sich Eilenberg-Mac Lane im Zusammenhang mit der Čech-Theorie gegenübersahen: solche Fragen stellen sich im Blick auf den *connecting homomorphism* (bzw. insgesamt im Blick auf die lange exakte Homologiesequenz; vgl. 2.4.2).

Nun war das Ergebnis aus 2.1 gerade, daß der Begriff Homologiegruppe u.a. im Blick auf das Studium stetiger Abbildungen mit algebraischen Mitteln eingeführt wurde. Die Einsetzbarkeit solcher algebraischer Mittel steht und fällt aber mit der Kenntnis der Bedingungen, unter denen Homomorphismen zwischen (Co)Homologiegruppen vorliegen. Man sollte also annehmen, dies sei auch der historische Anlaß zur Einführung der KT gewesen. Wir werden allerdings in 2.4.2 sehen, daß die ursprüngliche Fragestellung von Eilenberg-Mac Lane eine engere war: ihnen ging es zunächst um *Iso*morphismen zwischen Limesgruppen (im Blick auf *universal coefficient theorems*). Für die Isomorphismen stellt sich die Frage der Existenzbedingung natürlich in ähnlicher Weise.

Die "Natürlichkeitsgleichung" (d.i. diejenige Gleichung, die in der Definition einer natürlichen Transformation vorkommt) wird mit dem Ziel thematisiert, begrifflich genau herauszuarbeiten, unter welchen Umständen zwei Folgen isomorphe Limesgruppen ergeben; in [Eilenberg und Mac Lane 1942b] heißt es *"our condition* ($E2$) *below* [die *naturality condition*] *appears in the definition of the isomorphism of two direct or two inverse systems of groups"*.

Was hat die Natürlichkeitsgleichung mit dem Limes-Isomorphismus zu tun? [Lefschetz 1942, 54] beweist folgenden Satz:

> (13.5) *Let* $S = \{G_\lambda; \pi^\lambda_\mu\}, \Sigma = \{H_\lambda; \omega^\lambda_\mu\}$ *be inverse systems both indexed by* $\Lambda = \{\lambda; \succ\}$ *and with limit-groups* $'G, 'H$. *Suppose that for each* λ *there is a homomorphism* $\tau_\lambda : G_\lambda \to H_\lambda$ *such that:* $\omega^\lambda_\mu \tau_\lambda = \tau_\mu \pi^\lambda_\mu, \lambda \succ \mu$. *There exists a homomorphism* #15
> $\tau : 'G \to 'H$ *such that if* $g = \{g_\lambda\} \varepsilon 'G$ *then* $\tau g = \{\tau_\lambda g_\lambda\}$.

Den selben Satz für Isomorphismen anstelle von Homomorphismen formuliert er übrigens nicht; es liegt natürlich auf der Hand, daß mit den einzelnen τ_λ auch τ bijektiv wäre. Aus dem Beweis[113] des Satzes (13.5) geht hervor, daß die Natürlichkeitsgleichung ⟨#15 S.61⟩ zusammen mit der Definitionsgleichung der Elemente des *limit space (the points* $x = \{x_\lambda\}$ *such that* $\lambda \succ \mu \Rightarrow \pi^\lambda_\mu x_\lambda = x_\mu$*; S.31)* dazu dient, daß τg tatsächlich ein Element von $'H$ ist und nicht bloß Element der größeren Gruppe $\prod H_\lambda$. Denn es gilt $\omega^\lambda_\mu(\tau_\lambda g_\lambda) = \tau_\mu \pi^\lambda_\mu g_\lambda = \tau_\mu g_\mu$. Unter den Bedingungen des Satzes kann man also einen Homomorphismus $\tau : 'G \to 'H$ definieren, und das war ja (für Isomorphismen) das Ziel von Eilenberg-Mac Lane.

[113] Dieser Beweis steht in ähnlicher Form auch in [Eilenberg und Steenrod 1952, 218] (Bemerkung zu Definition 3.10).

2.2.4 Exkurs: Limesgruppenbegriffe in Kontexten, die für die Entwicklung der KT nicht einschlägig waren

Es hat bereits vor Einführung der KT andere Anwendungen von direkten und inversen Limites gegeben; diese scheinen aber für die Entstehung der KT nicht von Bedeutung gewesen zu sein[114]. Im Kontext der vorliegenden Arbeit wären offenbar die verschiedenen Einführungen dieser Begriffe daraufhin zu untersuchen, ob die Funktorialität der Konstruktion eine Rolle spielt. Es ist keineswegs ausgeschlossen, daß die Hervorkehrung dieses Aspekts für die algebraische Topologie erst von Eilenberg-Mac Lane unternommen, aber zugleich in anderen Zusammenhängen schon thematisiert wurde.

Herbrand: Galoistheorie Die Definition von [Herbrand 1933, 705] ist die übliche Definition des projektiven Limes einer Folge von Gruppen: Man hat eine Folge von endlichen Gruppen G_n und Homomorphismen I_n *“appliquant G_{n+1} sur G_n”* (ob mit *“sur”* hier Surjektivität gemeint ist, müßte eine genauere Lektüre der Arbeit ergeben.) Eine *suite convergente* ist eine Folge von Gruppenelementen σ_n (jedes σ_n aus G_n) mit $I_n\sigma_{n+1} = \sigma_n$; diese *suites convergentes* sind dann die Elemente der neuen Gruppe. Auf S.711 folgen Anwendungen auf die Galoistheorie.

Pontrjagin und Weil: Topologische Gruppen und Integration auf diesen [Pontrjagin 1934b] bringt den projektiven Limes einer Folge kompakter Gruppen *(“suite convergente du groupe”)*. Pontrjagin hat also seine Meinung über diese Konstruktion geändert; leider spricht er diese Frage nicht explizit an. Im vorliegenden Zusammenhang geht es um die Struktur kompakter Gruppen, während es bei [1931] um die Homologiegruppen (“Bettigruppen”) bestimmter topologischer Räume geht. Gleichwohl bleibt indirekt eine Berührung zur Homologietheorie bestehen: Pontrjagin stellt zwar keinen Bezug zu [1931] her, verweist aber auf [Alexandroff 1929] mit den Worten *“[La] notion fondamentale [d’une “suite convergente du groupe”] n’est qu’une application à la théorie des groupes de la notion de spectre projectif due à M.Alexandroff [. . .]; les [groupes de la suite] forment en effet un spectre projectif [de la limite]”*. Nun kann man zwar zweifellos den Begriff des Projektionsspektrums allgemein beim Studium (oder der Konstruktion) topologischer Räume (oder speziell Gruppen) verwenden, aber Alexandroff tat dies im Blick auf Homologie (Bettizahlen).

Diese Strukturuntersuchung kompakter Gruppen greift Weil auf im Blick auf die Integrationstheorie für topologische Gruppen [1940, 88ff]. Aus diesem Grund stellt Weil auch die Begriffe des projektiven (inversen) und induktiven (direkten) Limes vor[115]. Weil bringt bereits einen geschichtlichen Abriß insbesondere zum Begriff des projektiven Limes; er erwähnt noch andere Arbeiten, auf die ich hier nicht eingehe, bespricht die homologietheoretische Richtung aber nur sehr knapp.

[114] Vgl. hier auch das zu Beginn von Abschnitt 2.6.2.3 wiedergegebene Zitat von Mac Lane.

[115] Den induktiven Limes benötigt er deshalb, weil er auch von der Dualitätstheorie topologischer Gruppen Gebrauch macht; vgl. 2.4.3.2.

2.3 *Group extensions and homology*

Vorbemerkung zur Notation. Dem mit der heute üblichen Notation vertrauten Leser zuliebe habe ich die Originalnotation von [Eilenberg und Mac Lane 1942a] auf die heute übliche umgestellt. Dies betrifft vor allem zwei Punkte:

- Eilenberg-Mac Lane schrieben noch Indizes für Cohomologie und Exponenten für Homologie; dies umzustellen, scheint keinen Verlust an relevanter historischer Information zu bewirken.

- Historisch bemerkenswert ist allerdings eine andere zwischenzeitliche Umstellung: Die Argumente des Funktors Ext erscheinen in [1942a] noch in — gegenüber der heute üblichen — umgekehrter Reihenfolge. Während diese Notation sich aus den damals üblichen Verwendungen von Ext ergab, legt eine spätere Sicht dieses Funktors (die letztlich durch die Ergebnisse von Eilenberg-Mac Lane möglich wurde) eine Umstellung der Reihenfolge nahe. Vgl. 2.3.1.3.

2.3.1 Die Vorarbeiten Eilenbergs und Mac Lanes

Samuel Eilenberg und Saunders Mac Lane arbeiteten zu Beginn der 40er Jahre in (auf den ersten Blick) sehr verschiedenen Bereichen: Eilenberg interessierte sich für Fragen der algebraischen Topologie, Mac Lane für algebraische Zahlentheorie. Den Anstoß zur Zusammenarbeit der beiden gab jedoch der Umstand, daß sie unerwartete Überschneidungen der jeweiligen Interessengebiete bemerkten; ein "Slogan" der späteren KT wirft bereits seine Schatten voraus. Im folgenden soll kurz dargestellt werden, worin ihre jeweiligen Vorarbeiten bestanden.

2.3.1.1 Eilenberg: Die Homologie des Solenoids

Ausgangspunkt für Eilenberg war ein Problem im Studium von Abbildungen von Sphären im Anschluß an Hopf; vgl. 2.1.2.2. Eilenberg schildert in [1993, 2], wie er mit dem topologischen Problem, um das es in [Eilenberg und Mac Lane 1942a] geht, in Berührung kam:

> The main problem [in [Borsuk und Eilenberg 1936]] was the following: given a solenoid Σ in S^3, how big is the set S of homotopy classes of maps $f : S^3 \backslash \Sigma \to S^2$? In 1938 [...] I established that the set S in question is equipotent to the appropriately defined homology group $H_1(S^3 \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$ [[Eilenberg 1940]].
>
> At this point the problem was taken up independently by Norman Steenrod [[1940]]. With the aid of "regular cycles" he computed the group $H_1(S^3 \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$ [...]

Solenoide sind ein bestimmter Typ topologischer Räume; zur Definition vgl. [Eilenberg und Steenrod 1952, 230] oder [Lefschetz 1942, 31]. Uns interessiert besonders das p-adische Solenoid — *a topological group that is the inverse limit of a sequence of circles [...] each one wrapped p times smoothly around the previous one* [Mac Lane 1988b, 30]. Zu Steenrods *"regular cycles"* vgl. Anm.98.

2.3.1.2 Mac Lane: Gruppenerweiterungen und Klassenkörpertheorie

In den dreißiger Jahren wurde in der abstrakten Algebra der Begriff einer Gruppenerweiterung E einer abelschen Gruppe G durch eine andere abelsche Gruppe H eingeführt; gemeint ist damit, daß $G \subset E$ und $H = E/G$ gelten (wie von Eilenberg-Mac Lane hervorgehoben, bezieht sich die von ihnen genannte Literatur[116] zumeist auf den allgemeineren Fall, daß H nicht als abelsch und G als nicht notwendig zum Zentrum von H gehörend angenommen wird). Man hat nun die Gruppe $\mathrm{Ext}(H, G)$ aller solchen Erweiterungen eingeführt.

[Mac Lane 1988b, 30] nennt als Autoren in diesem Bereich Otto Schreier und Reinhold Baer; Mac Lane gibt hierzu keine Belegstellen in der Literatur an, denkt aber vermutlich an [Baer 1934] und [Schreier 1926]. Im Anschluß an diese Arbeiten hatte Mac Lane $\mathrm{Ext}(H, G)$ für bestimmte G, H ausgerechnet; sein Interesse daran kam von der Klassenkörpertheorie her:

> [...] the class field theory for a normal extension N of a base field K had used group extensions of the multiplicative group of N by the Galois group G acting on N. In this connection, Mac Lane had studied group extensions more generally, and in particular the group $\mathrm{Ext}(G, A)$ of all abelian group extensions of the group A by the group G. He had calculated a particular case which seemed of interest: That in which G is the abelian group generated by the list of elements a_n, where $a_{n+1} = pa_n$ for a prime p. [Mac Lane 1989, 1].

In der Schreibweise von [1942a] geht es hier um die Gruppe $\mathrm{Ext}(\Sigma^*, I)$, wobei I die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ bezeichnet und Σ^* die Gruppe G des Beispiels.

Weitere Angaben zu seinen Arbeiten in dieser Richtung macht Mac Lane in [1976b, 135].

2.3.1.3 Exkurs: Historische Beobachtungen zur Reihenfolge der Argumente des Funktors Ext

Bei [Mac Lane 1989] heißt es also *"the group* $\mathrm{Ext}(G, A)$ *of all abelian group extensions of the group A by the group G"*; dahingegen ist bei [1942a, 759, 770] die Rede von *"the group of group extensions of G by H [...]* $\mathrm{Ext}(G, H)$*"*. Es gibt also eine Umstellung der Reihenfolge der Argumente (sozusagen der erweiterten und der erweiternden Gruppe). Die endgültige Fassung ist die spätere.

Man könnte nun einfach bemerken, daß solche Unterschiede in der Notation in Frühphasen von Begriffen eben vorkommen, bevor sich ein allgemeiner Gebrauch eingespielt hat. Es mag den Autoren der 30er und 40er Jahre auch natürlich vorgekommen zu sein, die Gruppe aller Erweiterungen einer Gruppe G durch eine Gruppe H als $\mathrm{Ext}(G, H)$ zu bezeichnen und nicht als $\mathrm{Ext}(H, G)$. In der weiteren Entwicklung der Theorie hat sich aber ein guter Grund ergeben, es anders herum zu schreiben: Ext ist als Ext^1 nur Teil einer Familie von Funktoren, die durch eine lange exakte

[116] [1942a] gestattet es, die Geschichte des Konzepts der Gruppenerweiterung etwas zurückzuverfolgen. Anmerkung 12 S.767 nennt als Quellen [Baer 1934], [Hall 1938], [Turing 1938], [Zassenhaus 1937] *"and elsewhere"*.

Sequenz verbunden sind, d.h. des rechtsderivierten[117] Funktors von Hom. Es ist einleuchtend, Hom(A, B) für die Morphismen von A nach B zu schreiben, und nicht Hom(B, A). Aber dadurch und durch die exakte Folge, die Hom $=$ Ext^0 mit den anderen Ext^n verbindet, ist die "Reihenfolge" festgelegt, und zwar im Sinn der heute üblichen Schreibweise.

Für den Historiker stellt sich gleichwohl die Frage, ob diese Rekonstruktion der Notationsgeschichte aus systematischer Sicht wirklich zutrifft, ob also die Notation wirklich aus diesem Grund geändert wurde. So verwendet bereits [Mac Lane 1950, 487] die moderne Schreibweise — aber konnte er zu diesem Zeitpunkt wissen, was einmal die Theorie der derivierten Funktoren sein würde? Zumindest war zu diesem Zeitpunkt wohl klar, daß speziell zwischen Hom und Ext ein wichtiger Zusammenhang bestehen muß, den in der Notation zum Ausdruck zu bringen naheliegt.

2.3.2 Das Zusammentreffen

> When Saunders MacLane lectured in 1940 at the University of Michigan on group extensions one of the groups appearing on the blackboard was exactly the group calculated by Steenrod [$H_1(S^3\backslash\Sigma, \mathbb{Z})$]. I recognized it and spoke about it to MacLane. The result was the joint paper [[1942a]]. [Eilenberg 1993, 2]

> [Mac Lane] had calculated a particular case [of Ext(G, A)] which seemed of interest: That in which G is the abelian group generated by the list of elements a_n, where $a_{n+1} = pa_n$ for a prime p. After a lecture by Mac Lane on this calculation, Eilenberg pointed out that the calculation closely resembled that for the regular cycles of the p-adic solenoid [. . .] [Mac Lane 1989, 1].

Ähnliche Darstellungen finden sich in [Mac Lane 1976b, 135f], [Mac Lane 1988a, 333] oder [Mac Lane 1988b, 30]. Die Beobachtung wird zum Ausgangspunkt von [1942a] gemacht:

> The thesis of this paper is that the theory of group extensions forms a natural and powerful tool in the study of homologies in infinite complexes and topological spaces. Even in the simple and familiar case of finite complexes the results obtained are finer than the existing ones. [1942a, 759]

Ich werde in der Folge noch verdeutlichen, daß die Resultate der Arbeit, aber auch die mannigfachen Weiterentwicklungen der dort erstmals ausgesprochenen Gedanken diese *thesis* in erstaunlichem Umfang bestätigt haben[118].

[117] Vgl. hierzu 3.1.4.

[118] Es ergibt sich die Frage, in welchem Umfang die Theorie der Gruppenerweiterungen in die gemeinsame Arbeit von Eilenberg-Mac Lane einging; insbesondere wäre interessant, ob Mac Lane mit seiner *more general study of group extensions* neue Resultate dieser Theorie erbracht hat, die dann für die Anwendbarkeit im topologischen Kontext entscheidend waren. Zur Beantwortung der Frage wäre es erforderlich, den Teil von [1942a], der sich mit dem Aufbau dieser Theorie befaßt, zu vergleichen mit früheren Arbeiten zu dieser Theorie. Ein solcher Vergleich muß zu einem späteren Zeitpunkt gesucht werden, da er zu weit vom Thema der vorliegenden Arbeit wegführen würde.

Eilenberg muß in Mac Lanes Vortrag im einzelnen folgendes bemerkt haben:

- Mac Lanes Σ^* ist die Charaktergruppe von Σ (letzteres ist topologische Gruppe als inverser Limes bestimmter topologischer Gruppen; via Pontrjagin-Dualität[119] erhält man die Charaktergruppe als direkten Limes der dualen Folge).
- $\text{Ext}(\Sigma^*, I) \cong H_1(S^3 - \Sigma, I)$

Eilenberg-Mac Lane konnten diese zunächst überraschende Beobachtung "erklären"; ihr Hauptergebnis ist aber von viel weiterreichender Art.

2.3.3 Die Ergebnisse von Eilenberg-Mac Lane und *universal coefficient theorems*

Der Gewinn für das Problem der Berechnung von $H_1(S^3 - \Sigma, I)$ gegenüber dem bei [Steenrod 1940] Erreichten liegt im wesentlichen darin, daß es Eilenberg-Mac Lane gelingt, Homologie *unendlicher* Zykeln durch Cohomologie *endlicher* Kozykeln[120] auszudrücken (S.759). Steenrod hatte ja noch unendliche Zykeln verwendet: *regular cycles* sind spezielle unendliche Zykeln (S.824f). Das erste Hauptresultat (Satz 33.1) sieht so aus:

> For a star finite complex K the homology group $H_q(K, G)$ of infinite cycles with coefficients in a generalized topological group G can be expressed in terms of the integral cohomology groups $\mathcal{H}^q$ of finite cocycles. [...]
>
> More explicitly [...]
>
> $$Q_q(K,G) \quad \textit{is a direct factor of} \quad H_q(K,G).$$
> $$Q_q(K,G) \cong \text{Ext}(\mathcal{H}^{q+1}, G).$$
> $$H_q(K,G)/Q_q(K,G) \cong \text{Hom}(\mathcal{H}^q, G).$$
>
> [1942a, 808]

(die genaue Definition von $Q^q(K, G)$ tut hier nichts zur Sache, da es nur auf die in der zweiten Isomorphie gegebene Charakterisierung ankommt)[121]. In [1945] wird

[119] Die Berührungspunkte der Argumentation von Eilenberg-Mac Lane mit der Pontrjaginschen Dualitätstheorie scheinen mir für das Verständnis der Veranlassung, die Eilenberg-Mac Lane zur Einführung kategorientheoretischer Begriffe hatten, nicht zentral. Daher übergehe ich diese Berührungspunkte in der anschließenden Darstellung.

[120] In der Situation von [1942a] ist ein Komplex ein abstrakter Zellenkomplex — vgl. 5.1.2 — mit ggf. abzählbar unendlich vielen Zellen σ_i^q (i Index, q Dimension; S.799); eine q-Kette ist eine formale unendliche Summe $\sum_i g_i\sigma_i^q$ mit g_i in der Koeffizientengruppe; bei einer endlichen Kette sind nur endlich viele g_i von Null verschieden (S.800).

[121] In [1942a] kommt die Sprache der exakten Sequenzen noch nicht vor (vgl. hierzu 3.1.1); man kann allerdings an Satz 33.1 in seiner gerade wiedergegebenen Form sofort erkennen, daß es sich dem Inhalt nach um die exakte Sequenz

$$0 \to \text{Ext}(H_{q+1}(K,I),G) \to H^q(K,G) \to \text{Hom}(H_q(K,I),G) \to 0.$$

handelt.

dieses Ergebnis aufgegriffen; allerdings verschwindet seltsamerweise der Akzent auf den Endlichkeitseigenschaften der verwendeten (Co-)Zykeln; statt dessen wird hervorgekehrt, daß es sich bei Satz 33.1 um ein *universal coefficient theorem* handelt (ich verwende im Folgenden die Abkürzung uct für Sätze diesen Typs):

> The theorems of this name express the cohomology groups of a complex, for an arbitrary coefficient group, in terms of the integral homology groups and the coefficient group itself [1945, 288].

In [1942a] wird nur am Rande erwähnt (§35), daß solche ucts sich als Korollare aus den vorgelegten Resultaten ergeben; keineswegs wird es so dargestellt, als seien sie das eigentliche Ziel der ganzen Arbeit. In der Einleitung werden sie gar nicht erwähnt. Vor diesem Hintergrund erstaunt, daß Mac Lane in seinen diversen historischen Darstellungen immer wieder die Suche nach ucts als Hauptmotivation von [1942a] beschreibt, z.B. in [1976a]; diese Version gebe ich hier etwas ausführlicher wieder, da Mac Lane hier letztlich einen begriffsgeschichtlichen Zusammenhang zu Whitneys Fassung von Hopfs Resultat (vgl. 2.1.2.2) herstellt:

> [Whitney's reformulation of Hopf's homotopy classification theorem] suggested [...] to Steenrod [...] that cohomology must somehow be expressible in terms of homology. Since cochains of a complex C are by definition homomorphisms of chains $f : C_n \to A$, each cocycle (f with $\delta f = 0$) is a homomorphism of cycles, and this assignment yields a "natural" homomorphism
>
> $$H^n(C, A) \to \mathrm{Hom}(H_n(C), A)$$
>
> For A (the additive group of) a field, this is an isomorphism, but not for more general A's. Hence arose the problems of expressing the whole cohomology group of the complex C in terms of this homomorphism and other constructions; it was called the problem of "universal coefficients" because it was intended that the solution be given by saying that the cohomology is determined by giving the homology $H_n(C, G)$ for a specified list of coefficient groups G, called the "universal" coefficients, perhaps $G = \mathbb{Z}$ and all the groups $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [Mac Lane 1976a, 7]

Mac Lane führt dann aus, daß der Lösungsweg von [Eilenberg und Mac Lane 1942a] der folgende gewesen sei: da der fragliche Homomorphismus jedenfalls surjektiv ist, sucht man seinen Kern; dieser ist $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), A)$. Diese Darstellung mag nachträglich ein kohärentes Bild geben; die behaupteten ideengeschichtlichen Linien sind aber nicht sichtbar in [1942a] eingeflossen. Auch wäre noch zu prüfen, ob die von Mac Lane angegebene Herkunft der Idee der ucts überhaupt stimmt. Mac Lane macht keine Angaben darüber, auf welche Arbeit Steenrods er anspielt oder ob überhaupt ein publizierter Text gemeint ist. Über [Steenrod 1936] stellt man fest, daß die Problemstellung der "universellen Koeffizienten" wohl auf [1935, 34] zurückgeht, wo es (in einer Liste von offenen Problemen am Ende der Arbeit) heißt

> Does there exist a field of coefficients $\mathfrak{J}_0$ having the following property: for any closed point set F and the Abelian Group $\mathfrak{J}$, the Betti group $B^r(F, \mathfrak{J})$ (of F with respect to $\mathfrak{J}$) can be expressed by means of $B^r(F, \mathfrak{J}_0)$ (and the group $\mathfrak{J}$ itself)?

Alexandroff vermutet, daß für einen kompakten metrischen Raum $\mathbb{R}$ mod 1 ein solches $\mathfrak{I}_0$ sei[122]. [Steenrod 1936] beweist Alexandroffs Vermutung und spricht (im Unterschied zu Alexandroff) auch über Cohomologie; er verwendet die Bezeichnung *dual homology groups*. Allerdings unternimmt Steenrod hier offenbar keinen Versuch, *Cohomologie* durch Homologie auszudrücken (wie ja auch Alexandroff nur über das Ausdrücken von Bettigruppen durch andere Bettigruppen spricht); er hält nur fest, daß man anstelle von Homologie bezüglich $\mathbb{R}$ mod 1 dank Pontrjagin-Dualität ebensogut Cohomologie bezüglich $\mathbb{Z}$ verwenden kann — und dieser Umstand, so Steenrod, *"constitutes a strong argument for the future exclusive use of [cohomology]"*. Er stellt auf S.691f noch dar, wie ein Versuch der Übertragung seiner Resultate auf den Fall unendlicher Komplexe aussehen könnte (so daß also in einer solchen Übertragung eine Neuerung von [Eilenberg und Mac Lane 1942a] gegenüber [Steenrod 1936] bestehen kann). Von dem Bedürfnis eines Ausdrückens von Cohomologie durch Homologie ist also zumindest in dieser Arbeit Steenrods nichts zu spüren, im Gegenteil. Mehr noch: Eilenberg-Mac Lane geben ja mit Satz 33.1 zuallererst ein uct für *Homologie* an, nicht für Cohomologie; das korrespondierende uct für Cohomologie folgt auf S.810, hat aber nicht die in [Mac Lane 1976a] angegebene Form mit dem Kern $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(C), A)$, sondern liefert einen Ausdruck mit Tensorprodukt und Torsionsgruppen ("dual"). In der späteren Theorie ist dies alles "gleichwertig", aber historisch war es zunächst nicht in der Form präsent, die Mac Lane behauptet.

2.3.4 Übergang zum Limes und "Natürlichkeit"

Da das Solenoid kein Komplex ist, ist es mit Satz 33.1 nicht getan; es wäre ein entsprechendes Resultat über die Čech-(Co)Homologie für allgemeine Räume erforderlich. Von Bedeutung für das weitere Vorgehen von [1942a] ist daher die Untersuchung, unter welchen Bedingungen sich die angegebenen Isomorphismen auf den Limes übertragen.

> For a general space, the Čech homology groups are obtained as (direct or inverse) limits, so that the decomposition of the homology group is obtained as a limit of the known decompositions for the homology groups of finite complexes [. . .]. The results obtained for a general space are not as complete as those for complexes, partly because the limit of a set of direct sums apparently need not be a direct sum, and partly because "Lim" and "Ext" do not permute, so that [a] group Ext* is requisite. [1942a, 814]

Die Čech-Gruppen zu einem allgemeinen topologischen Raum X (der also nicht notwendig ein Komplex zu sein braucht) sind folgendermaßen definiert: Man gewinnt aus einer offenen Überdeckung U_α von X einen Komplex, nämlich den *nerve* N_α dieser Überdeckung. Dem Übergang zu einer feineren Überdeckung U_β entspricht ein Homomorphismus $H_q(N_\beta, G) \to H_q(N_\alpha, G)$. Insgesamt bilden die Überdeckungen eine gerichtete Menge, und somit kann man den inversen Limes $\varprojlim H_q(N_\alpha, G)$

[122] Es macht nicht den Eindruck, daß *field* hier im technischen Sinn gemeint ist, da Alexandroff die ganzen Zahlen als Lösung in einem Spezialfall hervorhebt.

ermitteln. Eine Übertragung des bereits erhaltenen Satzes 33.1 auf Räume würde also mindestens erfordern, daß sich die im Satz festgestellten Isomorphismen auf den Limes übertragen.

Dazu wird zunächst ein Satz 12.1 bewiesen, der in der allgemeinen gruppentheoretischen Situation gilt: Seien F, F' freie abelsche Gruppen und $T : F' \to F$ ein Homomorphismus, und seien ferner R, R' Untergruppen von F bzw. F' mit $T(R') \subset R$. In Satz 10.1 wurde (unter Verwendung der Voraussetzung "frei") gezeigt, daß es surjektive Homomorphismen $\eta : \mathrm{Hom}(R, G) \to \mathrm{Ext}(F/R, G)$ und (entsprechend) η' gibt[123]. Die Aussage des neuen Satzes ist, daß diese Homomorphismen zusätzlich die Eigenschaft haben, "natürlich" zu sein, was zunächst so erklärt wird:

> The basic homomorphism η [...] mapping elements of $\mathrm{Hom}\{R, G\}$ into [elements of $\mathrm{Ext}(F/R, G)$] is a "natural" one. Specifically, this means that the application of η "commutes" with the application of any homomorphism T to the free group F and its subgroup R. To state this more precisely, we need to consider first the homomorphisms which T induces on the groups $\mathrm{Hom}\{R, G\}$ and $\mathrm{Ext}\{H, G\}$. [S.777]

Um über die Natürlichkeit von η sprechen zu können, muß also zunächst geklärt werden, welche Homomorphismen auf den Konstruktionen Hom und Ext induziert werden; es muß also (modern ausgedrückt) angegeben werden, wie die beiden Konstruktionen als Funktoren aussehen. Sobald dies geschehen ist, kann der Satz formuliert und gezeigt werden. Eilenberg-Mac Lane geben (mit einer abweichenden Schreibweise für die induzierten Homomorphismen) das folgende Diagramm *("figure")* an:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(R, G) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(T)"'] & \mathrm{Ext}(F/R, G) \arrow[d, "\mathrm{Ext}(T)"] \\
\mathrm{Hom}(R', G) \arrow[r, "\eta'"] & \mathrm{Ext}(F'/R', G)
\end{tikzcd}$$

und rechnen nach, daß dieses kommutativ ist.

Diesen Satz kann man nun auf die homologietheoretische Situation übertragen, wenn für F, F' *groups of chains* (oder *cochains*) von Komplexen K, K' genommen werden (diese sind frei nach Konstruktion) und für T Homomorphismen $C_q(K', G) \to C_q(K, G)$ (*"chain transformation"*). Satz 38.1 benutzt nun Satz 12.1, um zu zeigen, daß die Isomorphismen aus Satz 33.1 natürlich sind, d.h. mit einer *chain transformation* vertauschen. Dies ist ein erster Schritt zu einem entsprechenden Resultat für Limites, da einer Verfeinerung der Überdeckung ja eine *chain transformation* zwischen den *chain groups* der zugehörigen *nerves* entspricht. Damit lassen sich also die Čech-Gruppen zumindest als Limites von Ausdrücken der in Satz 33.1 angegebenen Form darstellen.

[123] Wohl an diesen Satz denkt [Mac Lane 1976a, 8], wenn er sagt, [1942a] sei für die Entwicklung des Kalküls der derivierten Funktoren ausschlaggebend gewesen, da Eilenberg-Mac Lane über Satz 33.1 hinaus erarbeitet haben, wie man $\mathrm{Ext}(H, G)$ aus einer Darstellung von H als Quotient einer freien Gruppe und einer Untergruppe berechnet — eine Vorform der projektiven Auflösung, vgl. 3.1.4.

Will man ferner auch die Čech-Gruppen selbst durch Hom und Ext ausdrücken (und nicht nur durch Limites von solchen Ausdrücken), muß man sich dafür interessieren, ob Hom und Ext mit Limites vertauschen. Genauer wird untersucht, unter welchen Bedingungen Formeln des Typs

$$\mathrm{Ext}(\varinjlim T_\alpha, G) \cong \varprojlim \mathrm{Ext}(T_\alpha, G).$$

richtig sind — für Hom anstelle von Ext ist das allgemein der Fall (§21). Für Ext ist das Bestehen einer solchen Isomorphie an spezielle Bedingungen an G und T_α gebunden — Bedingungen z.T. algebraischer, z.T. topologischer Art, die ich hier übergehe[124]. Darüber hinaus hängt der Nachweis wieder von gewissen "Natürlichkeitsforderungen" an die Isomorphismen ab. Das genaue Vorgehen sieht so aus: unter den besagten Bedingungen an G und T_α wird in Satz 17.2 die Isomorphie

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}(T_\alpha, G) \cong \mathrm{Hom}(T_\alpha, G')$$

gezeigt (wobei G' eine Konstruktion auf G ist, deren Durchführbarkeit von dem Erfülltsein der Bedingungen an G abhängt); außerdem gilt allgemein

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim T_\alpha, G') \cong \varprojlim \mathrm{Hom}(T_\alpha, G').$$

Hier finden sich nun folgende interessante Bemerkungen:

> But the group on the left is simply $\mathrm{Ext}(\varinjlim T_\alpha, G')$, by another application of Theorem 17.2. The desired result should then follow by taking (inverse) limits on both sides in [(∗)].
>
> To carry out this argument, it is necessary to have the naturality condition which gives the isomorphism theorem [...] for inverse systems. This naturality condition requires that the isomorphism [(∗)] permute with the projections of the inverse systems. [...] The proof of this naturality is straightforward [...] [1942a, 793].

Die Strategie ist also, auf (∗) einen Limes anzuwenden; dies führt aber gerade, wie Eilenberg-Mac Lane ausdrücklich hervorheben, nur dann zu isomorphen Ergebnissen, wenn der Ausgangsisomorphismus natürlich war (vgl. auch 2.2.3.3).

2.4 Die ersten Arbeiten zur KT

Eilenberg-Mac Lane widmen die gemeinsame Arbeit [1945] einer systematischen Entwicklung der implizit in [1942a] benutzten Begriffe "Funktor" und "Kategorie".

2.4.1 Der Mut zur begrifflichen Aufarbeitung

Zunächst erstaunt die Bereitschaft, diese begriffliche Aufarbeitung überhaupt zu machen. Es gehörte Mut dazu: Laut [Corry 1996, 366 Anm.27] hat Steenrod [1945]

[124] Wo diese Bedingungen nicht erfüllt sind, behilft man sich mit einer Konstruktion Ext^* (§24; ich übergehe die Details).

als denjenigen Artikel bezeichnet, der ihn am meisten beeinflußt, und P.A.Smith als das *most trivial paper*, das er je gelesen habe. Corry hat diese Information wohl indirekt von Eilenberg; dies geht aus einer Korrespondenz zwischen Eilenberg und Michael Barr hervor, die zu Eilenbergs Nachlaß gehört. [Mac Lane 1988a, 334] nennt keinen Namen: *"One of our good friends (an admirer of Eilenberg) read the paper and told us privately that he thought that the paper was without any content"*. Immerhin geht aus dem Nachlaß auch hervor, daß es P.A.Smith war, der Eilenbergs Berufung nach Columbia (wo er damals Dekan war) betrieben hat; somit mag er tatsächlich *an admirer of Eilenberg* gewesen sein. An anderer Stelle berichtet Mac Lane von den Schwierigkeiten, die Arbeit überhaupt zu veröffentlichen: [1996a, 130] *"Eilenberg had arranged that the manuscript of this first paper was refereed by a young person, even though the editor of the Journal [. . .] was quite sceptical of its content"*. In diesem Mut wird die Überzeugung deutlich, daß begriffliche Klärung für den mathematischen Fortschritt ebenso wichtig sein kann wie das Erreichen von Resultaten; eine ähnliche Überzeugung kommt später auch in Grothendiecks Arbeiten zum Vorschein.

Der immense Nutzen der dabei herausgestellten Konzepte wird zu der Zeit von niemandem gesehen — auch nicht von den Autoren:

> Initially, Eilenberg and Mac Lane had written what they thought would perhaps
> be the only necessary research paper on categories — for the rest, categories and #16
> functors would provide a useful language for mathematicians. [Mac Lane 1988a, #17
> 345]

Eilenberg-Mac Lane sehen eigentlich keine direkten Früchte ihrer Arbeit:

> In a metamathematical sense our theory provides general concepts applicable to all
> branches of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards
> uniform treatment of different mathematical disciplines. In particular, it provides #18
> opportunities for the comparison of constructions and of the isomorphisms occurring #19
> in different branches of mathematics; in this way it may occasionally suggest new
> results by analogy. [1945, 236]

2.4.2 Die "folkloristische" Geschichte dieser ersten Arbeiten — etwas zurechtgerückt

Wie gerade wiedergegeben, unterschätzten Eilenberg-Mac Lane selbst die von ihrer Theorie noch zu erwartenden Leistungen bei weitem. Wen dies erstaunt, der hat wohl seinerseits eine zu großzügige Vorstellung davon, was in [1945] tatsächlich erreicht wurde. Solch eine zu großzügige Vorstellung kann leicht zustandekommen, wenn man sich nicht auf die Originalarbeiten, sondern auf die Geschichtsschreibung der Protagonisten stützt, deren Unzuverlässigkeit hier an zwei weiteren Beispielen aufgezeigt werden soll (vgl. auch 2.2.4).

> [. . .] the notion of a functor as a morphism of categories is suggested by the decisive example of the homology functor [. . .] on the category of topological spaces to the category of abelian groups [. . .] [Mac Lane 1970, 229].

Diese Aussage Mac Lanes verdient eine genauere Prüfung. Ich verteidige in 2.1 selbst den Interpretationsansatz, der Begriff der Homologiegruppe sei gerade im Blick auf die induzierten Homomorphismen entwickelt worden, da es letztlich um eine Ausdehnung der algebraischen Topologie auf das Studium stetiger Abbildungen gegangen sei; insofern liegt es natürlich sehr nahe, in Homologie *das* motivierende Beispiel für den Begriff des Funktors zu wähnen. Allerdings: Wie wir gesehen haben, spielt in [1942a] hauptsächlich die Funktorialität gruppentheoretischer Konstruktionen (allen voran Hom und Ext) eine Rolle; die von stetigen bzw. simplizialen Abbildungen induzierten Gruppenhomomorphismen zwischen (Co)Homologiegruppen sind nicht von Bedeutung für die Untersuchung (sieht man vom auf S.815 besprochenen Übergang zu einer Verfeinerung im Rahmen der Approximation eines Raumes ab — aber es kommt ja nicht darauf an, ob *diese* Übergänge natürlich sind, sondern darauf, daß dies für die zu ihnen "orthogonalen" Übergänge der Fall ist). Wenn überhaupt, geht es meist um *Iso*morphismen von (Co)Homologiegruppen — und auch hier nicht um Isomorphismen zwischen zwei solchen Gruppen (zu verschiedenen Räumen), sondern um solche zwischen einer als (Co)Homologiegruppe gegebenen Gruppe (zu einem festen Raum) und Konstruktionen anderen Ursprungs (z.B. eben vom Typ Hom oder Ext; es geht um das Ausdrücken einer Gruppe durch andere Konstruktionen). Aus diesem Grund enthält dann auch die Liste der Beispiele für Funktoren in [1942b] den Homologiefunktor nicht; Homologie wird nur andeutungsweise erwähnt. Mehr noch: in dieser Vorankündigung von [1945] kommt der Begriff der Kategorie überhaupt nicht vor, sondern alle Funktoren gehen, modern ausgedrückt, von **Grp** nach **Grp** (der Homologiefunktor *kann* also hier noch gar nicht als Funktor angesprochen werden). Meines Erachtens spiegelt sich hier wieder, daß es Eilenberg-Mac Lane *im Blick auf* [1942a] durchaus genügt hätte, die Funktorialität gruppentheoretischer Konstruktionen zu diskutieren. In [1942a] geht es eben ("ausnahmsweise") nicht um das Studium von Abbildungen, sondern um ucts. Daß Homologie ein Funktor ist, steht dann allerdings in [1945, 284]. Man kann vielleicht Mac Lanes Aussage insofern modifizieren, daß gerade Homologie zur Einführung des allgemeinen Begriffes Kategorie angeregt hat (und man nicht bei der Betrachtung gruppentheoretischer Funktoren stehenblieb; vgl. hier den Abschnitt 7.2.1).

[Barr und Wells 1985, 62] geben folgende Version des Gegenstands von [1945]:

> Categories, functors and natural transformations were invented by S. Eilenberg and S. Mac Lane [in [1945]] in order to describe the connecting homomorphism and the long exact sequence in Čech homology and cohomology. [. . .] in Čech theory [one] form[s] the direct limit of the homology groups over the set of all covers directed by refinement. This works fine for defining the groups but gives no information on how to define [induced] maps [. . .], not to mention the connecting homomorphism. What is missing is the information that homology is natural with respect to refinements of covers as well as to maps of spaces. [Barr und Wells 1985, 62]

Wie wir gesehen haben, sind diese Fragen zur Čech-Theorie jedenfalls nicht Gegenstand von [1942a]; in [1945] wird die Funktorialität der Čech-Homologie zwar erwähnt (S.292), mehr aber auch nicht (insbesondere ist keine Diskussion des *connecting homomorphism* oder der langen exakten Sequenz vorhanden).

Nun will ich allerdings nicht bei einer Destruktion der Folklore stehen bleiben; schließlich kommt gerade in solchen von Fachmathematikern geschriebenen Darstellungen oft ein tiefes Verständnis einer Arbeitssituation zum Ausdruck. Im vorliegenden Fall kann man festhalten, daß die von Barr-Wells angesprochenen Probleme später tatsächlich untersucht wurden, und zwar von [Eilenberg und Steenrod 1952]. Die Konstruktion von Homomorphismen für die Čech-Theorie ist also nicht einfach nur ganz allgemein wünschenswert, weil es, wie ich mich bislang ausgedrückt habe, um das "Studium von Abbildungen" geht. Es geht um einen ganz bestimmten Homomorphismus (dessen Konstruktion auch nicht von der Funktorialität allein garantiert wird), den *connecting homomorphism*, der es erlaubt, die lange exakte (Co)Homologiesequenz aufzustellen. Dieser Sequenz kommen bestimmte Aufgaben zu, die so bedeutend sind, daß das Vorliegen einer solchen Sequenz von Eilenberg-Steenrod unter die Kennzeichen einer axiomatischen (Co)Homologietheorie aufgenommen wird (vgl. 2.5.1); für die verschiedenen "Leistungen" dieses Axioms vgl. das Zitat von Hurewicz bei 2.4.3.1 und schließlich in der homologischen Algebra 3.4.1. Das Ergebnis für die Čech-Theorie scheint zu sein, daß es hier nur bedingt eine exakte Homologiesequenz gibt, stets aber eine Cohomologiesequenz; [Eilenberg und Steenrod 1952, 233, 248, 252]. Dies mag mit den Ausschlag dafür gegeben haben, daß "Čech-Theorie" im heutigen Gebrauch fast synonym zu "Čech-Cohomologie" ist[125].

2.4.3 *informal parlance*

> The discovery of ideas as general as these is chiefly the willingness to make a brash or
> speculative abstraction, in this case supported by the pleasure of purloining words
> from the philosophers: "Category" from Aristotle and Kant, "Functor" from Car- #20
> nap *(Logische Syntax der Sprache)*, and "natural transformation" from then current #21
> informal parlance. [Mac Lane 1971b, 29f] #22

Ich werde hier nicht auf die philosophischen Inspirationsquellen eingehen, die Mac Lane für die Wahl der Terminologie angibt; vgl. 5.3.3, was "Kategorie" betrifft (der Anschluß an Carnap scheint mir nicht einschlägig zu sein[126]). Im Gegenzug setze ich mich etwas ausführlicher mit der Behauptung auseinander, die Rede von "natürlichen Transformationen" habe zum damaligen informellen Diskurs unter Mathematikern gehört, und zeige auch auf, inwieweit das für "Kategorie" in einschlägiger Weise der Fall war.

2.4.3.1 *natural transformations*

[Hilton 1981, 79], eine Buchbesprechung zu [Semadeni und Wiweger 1979], beginnt mit den Worten

[125] Ein weiterer Grund ist zweifellos, daß man in der Garbentheorie entsprechend der Varianz des Schnittfunktors eben eine Cohomologietheorie erhält, vgl. Kapitel 3.

[126] Es war Mac Lane, der den *Review* zur englischen Übersetzung von Carnaps "Logische Syntax der Sprache" im *Bulletin* der AMS von 1938 geschrieben hat; er erwähnt dort, daß (und wofür) Carnap die Terminologie *"functor"* benutzt. So mag ihm das Wort im Gedächtnis geblieben sein, und er hat es dann später entlehnt.

> All mythology contains a strong element of poetic truth. According to popular mathematical mythology, the notions of category, functor and natural transformation were developed (by their inventors, [[1945]]) in response to the challenge of a famous mathematician who declared "Everybody knows what it means to say that a transformation is natural, but nobody can define it in precise terms."

Es ist nicht klar, auf welchen *famous mathematician* Hilton hier anspielt. Die Behauptung ist die, daß es zu Zeiten von [1942a] ein vorfindliches diskursives Phänomen, ein gängiges Sprachspiel gab, gewisse Korrespondenzen als natürlich zu bezeichnen, angesichts dessen Mac Lane und Eilenberg einen Handlungsbedarf sahen, das diskursive Phänomen *mathematisch* zu fassen. Es bleibt zu belegen, daß der Begriff der *naturality* tatsächlich zur *then current informal parlance*, also zum vorfindlichen Diskurs, gehörte. Eilenberg-Mac Lane machen in den einschlägigen Arbeiten [1942a, 1942b, 1945] keine genauen Angaben zur Herkunft der Bezeichnung *"natural"*. Nun ist es gerade ein Zeichen für eine *community* , daß es zu einer *current informal parlance* keine schriftlichen Quellen gibt, weil häufig die Gelegenheit bestand, sich persönlich zu unterhalten, insbesondere über unpräzise, unterliegende Vorstellungen.

Ich habe folgende Beispiele einer Rede von "natürlichem Homomorphismus" ausmachen können:

- [Lefschetz 1942] benutzt das Wort *"natural"* mehrfach: zum einen wird auf S.45 der kanonische (wie man heute sagen würde) Homomorphismus einer Gruppe G auf eine Faktorgruppe G/G' als *natural projection* bezeichnet; Lefschetz verwendet diese Terminologie unter anderem bei der Untersuchung des Verhältnisses der Limes- zur Quotientenbildung (S.56). Eine zweite Verwendung ist die folgende:

  > (19.8) If H is the character-group of G then the multiplication gh giving the value of h at g [. . .] is known as the *natural* multiplication of the two groups. [S.66]

  In beiden Fällen geht es offenbar nicht um eine Natürlichkeit im Sinne von Eilenberg-Mac Lane. Da bei Lefschetz Hom und Ext keine Rolle spielen, ist es unwahrscheinlich, daß er diejenigen Isomorphismen behandelt, die jene als *natural* herausstellen.

- In einem anderen Zusammenhang spricht Hurewicz von *natural homomorphisms*:

  > Let A be a locally compact space, B a closed subset of A, and $H^n(A), H^n(B)$, $H^n(A-B)$ the n-dimensional cohomology groups of the sets A, B and $A-B$ (with integers as coefficients). Consider "natural homomorphisms" $H^n(A) \to H^n(B) \to H^{n+1}(A-B) \to H^{n+1}(A) \to H^{n+1}(A-B)$. It can be shown that the kernel of each of these homomorphisms is the image of the preceding homomorphism. This statement contains Kolmogoroff's generalization of Alexander's duality theorem and has many applications. [Hurewicz 1941, 562]

Es ist die Frage, ob diese Homomorphismen nun natürlich im Sinne von Eilenberg-Mac Lane sind oder ob es hier lediglich darum geht zu sagen, daß ihre Definition auf der Hand liegt. Dem Inhalt nach zeigt Hurewicz offenbar auf, daß die Sequenz exakt ist; vgl. hierzu ausführlicher 3.1.1. Zu *Kolmogoroff's generalization of Alexander's duality theorem* vgl. [Lefschetz 1942, 244].

- Bei [Fox 1943] geht es um eine ganz ähnliche Situation: Zu einem Komplex Y, seinem *n-dimensional skeleton* X und dem Raum $Y \bmod X$ betrachtet man Homotopiegruppen und die zugehörigen Homologiegruppen mit ganzzahligen Koeffizienten. Fox führt eine abkürzende Schreibweise ein:

$$P_k = \begin{cases} \pi_k(Y) \text{ für } k \equiv 1 \bmod 3\ ; \\ \pi_k(X) \text{ für } k \equiv 2 \bmod 3\ ; \\ \pi_k(Y \bmod X) \text{ für } k \equiv 0 \bmod 3\ ; \end{cases} \qquad Q_k = \begin{cases} H_k(Y) \text{ für } k \equiv 1 \bmod 3\ ; \\ H_k(X) \text{ für } k \equiv 2 \bmod 3\ ; \\ H_k(Y \bmod X) \text{ für } k \equiv 0 \bmod 3\ . \end{cases}$$

Zu den Systemen der Gruppen P_m, Q_m soll man nun die *"natural homomorphisms"* $r_m^{(P)} : P_m \to P_{m-1}, r_m^{(Q)} : Q_m \to Q_{m-1}, h_m : P_m \to Q_m$ betrachten. Fox hält fest: *"the nucleus of r_m is the image of r_{m+1}, and $hr = rh$"* — also mit anderen Worten: die Homotopie- und Homologiesequenzen sind exakt, und die Transformation $\pi \to H$ ist natürlich im technischen Sinn (sie vertauscht). Es scheint bemerkenswert, daß seine Notation keinen Unterschied macht zwischen Homomorphismen zwischen Homotopie- oder Homologiegruppen gleicher Dimension einerseits und "Dimensionsshifts" *(connecting homomorphisms)* andererseits. Zugleich erlaubt sie eine sehr dichte Formulierung für die Exaktheits- und Natürlichkeitsaussage. Fox gibt noch einige Schlußfolgerungen an, die man aus diesen Aussagen ziehen kann.

Zusammengefaßt: Fox bezeichnet also unterschiedslos die von π bzw. H induzierten Homomorphismen, die *connecting homomorphisms* und die Homomorphismen, die π in H transformieren, als "natürlich" — m.E. um darauf hinzudeuten, daß für diese Konstruktionen die "auf der Hand liegenden" Definitionen zu nehmen sind. Er scheint nicht durchweg an Natürlichkeit im technischen Sinn zu denken: zwar hält er diese mit der Gleichung $hr = rh$ für die Transformation $\pi \to H$ fest[127]; die Verträglichkeitsannahmen, die üblicherweise auch für den *connecting homomorphism* gemacht werden, bleiben aber bei Fox unerwähnt, und bei den Homomorphismen, die von den Inklusionsbeziehungen der Räume induziert werden, von Natürlichkeit im technischen Sinn zu sprechen, erschiene pedantisch.

Fox' Text trägt den Vermerk *Received March 25, 1943*; diese Arbeit gehört also nicht mehr zur für Eilenberg-Mac Lane vorfindlichen *informal parlance.*

[127] Implizit scheint diese Feststellung bei [Hurewicz 1936b, 220] enthalten zu sein, wo es (für bestimmte Typen von Räumen X, Y) heißt:

> Eine Abbildung $f \varepsilon Y^X$ bewirkt neben dem Homomorphismus $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ einen Homomorphismus $\beta_1(X) \to \beta_1(Y)$; es ist leicht zu sehen, dass im jetzt betrachteten Fall der erste dieser Homomorphismen durch den zweiten bestimmt ist [...].

> Im Gegenteil ist es eine zumindest überprüfenswerte Hypothese, daß Fox hier im Bezug auf [1942a] oder [1942b] von *"natural homomorphisms"* spricht. Aber wenn dies so wäre, müßte er ja die Gleichung $hr = rh$ strenggenommen nicht mehr hinschreiben, und in den anderen beiden Fällen würde er die von Eilenberg-Mac Lane vorgeschlagene Bedeutung des Ausdrucks stark strapazieren. Es scheint also doch überzeugender, Fox' Text noch als Beleg einer (nachklappenden) *informal parlance* zu nehmen.

Die Texte von Fox und Hurewicz sind (auf eingeschränktem Raum aufgeschriebene) *preliminary reports*. Es ist dort kein Platz, die Definition der in Rede stehenden Abbildungen mitzuteilen (daher entwickelt Fox auch seine äußerst verdichtete Notation). Den Experten (den Mitgliedern der *community*) soll in knapper, platzsparender Form mitgeteilt werden, wovon die Rede ist — so, daß *sie* es verstehen. Alle zuständigen Leser wissen dann, was gemeint ist. Hier kommt also, bedingt durch äußere Notwendigkeiten, einmal informeller Diskurs einer *community* an die "Oberfläche" (in die publizierten Texte).

Nehmen wir einmal an, es habe (trotz bislang fehlender Quellenzeugnisse) eine informale Verwendung von *natural* gegeben, auf die sich Eilenberg-Mac Lane bezogen. Interessant ist, worauf sie sich bei der Explikation konzentrierten. Ihre eigene informale Diskussion legt nahe, daß das ursprüngliche Charakteristikum von *natural* wohl die Unabhängigkeit von einer Basis, *defined "in the same way"* oder dergleichen war. Sie griffen nun die Kommutativität (das Vertauschen mit anderen Homomorphismen) heraus[128]; sie heben dies in [1942a] mehrfach hervor (wie wir z.T. schon in 2.3.4 gesehen haben), so in §12,

> the application of η [$\mathrm{Hom}(R, G) \to \mathrm{Ext}(F/R, G)$] "commutes" with the application of any homomorphism T to the free group F and its subgroup R.

in § 22,

> the naturality condition which gives the isomorphism theorem [...] for inverse systems [...] requires that the isomorphism [(*); vgl. 2.3.4] permute with the projections of the inverse systems.

und am ausdrücklichsten in § 38:

[128] Vgl. hierzu folgendes Zitat von Mac Lane:

> the vague observation that the group homomorphisms t_M are defined "in the same way" for every M can be expressed by the exact statement that for every $\mu : M \to M'$ the diagram
>
> $$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(C, M) & \xrightarrow{t_M} & L \otimes_R M \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_*} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\mu} \\ \mathrm{Ext}^1(C, M') & \xrightarrow{t_{M'}} & L \otimes_R M' \end{array}$$
>
> is commutative [Mac Lane 1961, 33].

> We are now in a position to give a precise meaning to the fact that the isomorphisms established in Chapter V are all “natural”.
>
> THEOREM 38.1. *If T is a chain transformation of a complex K into K', then T permutes with the isomorphisms established in [the* uct *for complexes] provided the application of T to any group is taken to mean the application of the appropriate transformation induced by T on that group.* [S.815]

Später hat sich, insbesondere im französischen Kontext, die Rede von “funktoriellem Morphismus” anstelle von “natürliche Transformation” eingebürgert; “natürlich” wird wieder informal verwendet. z.B. im Séminaire Cartan 50/51 19-07 oder bei [Grothendieck 1957, 124f] (vgl. hierzu 3.3.4.3).

2.4.3.2 *category*

[Lefschetz 1942, 37] spricht von einer *category of compacta.*

Van der Waerden macht ganz zu Beginn seines Buchs eine Bemerkung zu mengentheoretischen Vorsichtsmaßnahmen, deren Wortlaut hier interessiert:

> Wir hüten uns [. . .] vor Begriffsbildungen wie “die Menge aller Mengen” u. dgl., weil diese zu Widersprüchen Anlaß geben können (und gegeben haben); vielmehr bilden wir neue Mengen nur aus einer jeweils vorher abgegrenzten Kategorie von Objekten (zu denen die neuen Mengen noch nicht gehören). [van der Waerden 1931, 1]

Hier werden also die einzelnen Etagen der kumulativen Hierarchie (7.3.3) als Kategorien bezeichnet; dies ist keine einschlägige Verwendung des Terminus.

[Weil 1940] bringt eine Darstellung von Pontrjagins Dualitätstheorie aus [Pontrjagin 1934c] und setzt implizit einen kategorientheoretischen Akzent. Weil interessiert sich besonders für die *Abbildungen* zwischen den Gruppen und unterscheidet dabei zwischen *représentations* (in heutiger Sprache: Gruppenhomomorphismen) und *homomorphismes* (in heutiger Sprache: stetige Gruppenhomomorphismen; S.11). Weil stellt fest, daß diese Unterscheidung von großer Bedeutung für die Dualitätstheorie im allgemeinen Fall ist; besonders einfach ist die Situation, die sich darbietet, wenn man über die Topologie der Gruppen bestimmte Annahmen macht. In heutiger Sprache ausgedrückt, macht Weil folgende Feststellungen: Bezeichne $\mathcal{D}$ die Kategorie der diskreten abelschen Gruppen und $\mathcal{C}$ die Kategorie der kompakten abelschen Gruppen[129]; in *beiden* (nicht nur in $\mathcal{D}$, wie man annehmen könnte) sind *alle* Gruppenhomomorphismen stetig (S.109). Die Konstruktion der Charaktergruppe zu Objekten aus $\mathcal{D}$ führt zu Objekten aus $\mathcal{C}$ und umgekehrt (S.101). Weil selbst nähert sich der heute üblichen Sprache schon sehr weit:

> [La] démonstration [des résultats de la théorie de la dualité] ne peut être considérée comme complête tant qu'on n'observe pas soigneusement [. . .] la distinction entre représentations et homomorphismes ; les deux notions devenant identiques lorsqu'il s'agit, soit de groupes compacts [. . .], soit de groupes discrets, il ne se présente pas

[129] Die Kategorien $\mathcal{D}$ und $\mathcal{C}$ waren auch noch in einem anderen Zusammenhang Lieferanten wichtiger motivierender Beispiele für kategorientheoretische Konzepte, vgl. 2.5.3.

> de difficulté de cette nature tant qu'on se borne à ces deux catégories de groupes, en dualité l'une avec l'autre [Weil 1940, 109].

Man mache sich klar, daß Weil hier von *"catégories de groupes"* spricht, deutlich bevor Eilenberg-Mac Lane diese Sprechweise eingeführt haben (und auch im großen und ganzen dasselbe meint). Dies ist ein Beleg dafür, daß "Kategorie" zur *"then current informal parlance"* gehörte, und ein sehr wichtiger dazu, denn:

- inhaltlich ist Weil schon sehr nahe an der späteren Verwendung[130];
- man kann belegen, daß Eilenberg-Mac Lane Weils Arbeit rezipiert haben: schon in [1942a] verweisen sie auf Weil; auf S.762 sogar auf genau den Abschnitt, um den es hier geht!

Mit Weil kann die Pontrjagin-Dualität als Anstoß zur Thematisierung des Morphismus-Begriffs (in der Unterscheidung zwischen *représentations* und *homomorphismes*) angesehen werden.

2.4.4 Limites bei Eilenberg-Mac Lane 1945

Eilenberg-Mac Lane machen folgende Quellenangaben zu Limites:

[1942a, 789]	[Lefschetz 1942], [Weil 1940] Chap.I und [Steenrod 1936]
[1942b, Anm.1]	[Pontrjagin 1931] und [Lefschetz 1942, 55]
[1945, 236 Anm.5]	[Freudenthal 1937]

Hervorzuheben ist, daß es im ersten Fall um Quellenangaben zum Limesbegriff geht, im zweiten um Quellenangaben dazu, daß die Natürlichkeitsgleichung *in the definition of the isomorphism of two direct or two inverse systems of groups* erscheint. Dies bedarf im Falle Pontrjagins der historischen Erklärung, da bei ihm die Natürlichkeitsgleichung gar nicht steht. Es fragt sich also, wieso sie diese Quellenangabe machen, welchen Bezug sie zu ihrem Problem sehen. Dies kann nur ein eingehender Vergleich der beiden Situationen ergeben, der hier nicht zu leisten ist (ich beabsichtige, dies an anderer Stelle nachzuholen).

Die Definition des direkten und inversen Limes von Gruppen in [1945, 273, 276] entspricht der von [1942a] (vgl. 2.2.3.1 und 2.2.3.2). Das Neue in [1945] ist dann allerdings folgendes: sie zeigen, daß die bekannten Konstruktionen von Limites als Funktoren aufgefaßt werden können; man kann nun das Funktorielle solcher Konstruktionen herausgreifen und auf andere Kategorien übertragen.

In den Paragraphen 21ff von [1945] geben sie eine allgemeine Entwicklung; *"the operations of forming direct and inverse limits of groups are described as functors*

[130] Gleichwohl hätte Weil zweifellos angegeben, es handele sich hier um eine "metamathematische Vokabel" und nicht um einen Begriff, der — und sei er formalisiert — zur Mathematik gerechnet werden könne; vgl. 6.4.2.

[on] suitable categories" [1945, 235f]. Auf S.272 wird untersucht, wie man auf den Begriff der partiell geordneten Menge kategorientheoretische Begriffe anwenden kann. Zunächst einmal wird festgestellt, daß alle quasigeordneten Mengen mit den ordnungserhaltenden Abbildungen als Pfeilen eine Kategorie $\mathfrak{Q}$ bilden. Dabei bezeichnet der Terminus "Quasiordnung" eine reflexive und transitive binäre Relation auf einer Menge; eine solche wird zur partiellen Ordnung, wenn sie zusätzlich antisymmetrisch ist (Anm.20; sie schreiben trotz der Reflexivität "$<$"). Dann folgt die Passage:

> The construction of [...] $\mathfrak{Q}$ [...] is not the only such interpretation of partial
> order. It is also possible to regard the elements of a *single* quasi-ordered set P as #23
> the objects of a category; with this device, one can represent an inverse or a direct system of groups (or of spaces) as a functor on P.

Sie führen nun vor, wie dazu die Pfeile zu definieren sind; es ergibt sich die Kategorie $\mathfrak{C}_P$. Auf S.273 halten sie fest:

> It [...] follows that any two mappings $\pi_1 : p_1 \to p_2$ and $\pi_2 : p_1 \to p_2$ of this category which have the same range and the same domain are necessarily equal. Conversely any given category $\mathfrak{C}$ which has the property that any two mappings π_1 and π_2 of $\mathfrak{C}$ with the same range and the same domain are equal is isomorphic to the category
> $\mathfrak{C}_P$ for a suitable quasi-ordered set P. In fact, P can be defined to be the set of all #24
> objects C of the category $\mathfrak{C}$ with $C_1 < C_2$ if and only if there is in $\mathfrak{C}$ a mapping $\gamma : C_1 \to C_2$.

Eilenberg-Mac Lane sehen die gerichtete Menge (die einem direkten oder inversen System unterliegt) als eine Kategorie P an. Dadurch wird nun das direkte bzw. inverse System zu einem Funktor von dieser Kategorie nach **Grp**; ein *natürlicher* Morphismus zwischen solchen Systemen ist gerade eine natürliche Transformation zwischen solchen Funktoren, also ein Morphismus in der so entstandenen Funktorkategorie[131]. Die Antwort auf die Ausgangsfrage, welche Eigenschaft ein Morphismus zwischen Systemen haben muß, damit er Anlaß zu einem Homomorphismus der Limesgruppen gibt, wird hier also implementiert in die Handlung des Auffassens als kategorielle Konstruktion. In dieser Kategorie sind die Existenzbedingungen für einen Limes-Homomorphismus "automatisch" erfüllt; diese Kategorie enthält *nur* noch "geeignete" Morphismen zwischen Systemen. In diesem automatischen Erfülltsein besteht die begriffliche Klärung; der "richtige" begriffliche Rahmen ist gefunden.

Durch diesen Schritt kann der Prozeß des Übergangs zum Limes als Funktor auf der Kategorie der inversen oder direkten Systeme aufgefaßt werden. Hierdurch können Eilenberg-Mac Lane in [1945, 280ff] erklären, was es bedeuten soll, einen Funktor zum Limes hochzuheben (*lift*). Dadurch kommen sie z.B. in die Lage auszudrücken, was es heißen soll, daß ein Funktor mit einem Limes kommutiert (hier ist implizit ein solches Hochheben enthalten). Dieses Phänomen hat in [1942a] eine große Rolle gespielt.

---

[131] Inwieweit man diese systematische Bemerkung als historische Bemerkung nehmen kann, inwiefern also Eilenberg-Mac Lane so vorgegangen sein können, als sie zur Kategorie P gelangten, bespreche ich in 5.3.3.2.

Dieser begriffliche Rahmen suggeriert schließlich die Übertragung des Konzepts des Limes auf andere Kategorien:

> [. . .] the limit group of a direct system of groups can be defined up to an isomorphism by means of [. . .] extensions of functors. This indicates that the concept (but not necessarily the existence) of direct "limits" could be set up not only for groups, but
> #25 also for objects of any category. [S.275]

In diesem Stadium "nimmt die KT das Heft noch nicht in die Hand", es geht noch ausschließlich um die Systematisierung dessen, was sich zuvor wildwüchsig ergeben hatte. Es bleibt Kan vorbehalten, die Kategorie P durch andere Kategorien zu ersetzen und damit das Limitkonzept von seiner angestammten Verwendung zu lösen. So werden Konstruktionen als Limites erkennbar, die zuvor ohne Bezug zu diesem Konzept durchgeführt wurden, und es werden auch neue Konstruktionen suggeriert (beispielsweise durch Dualisierung etc.); vgl. 2.6.2.3.

2.5 *Foundations of algebraic topology*

Es sollte aus dem bisher Gesagten klar geworden sein, daß der Begriff der Homologie (und letztlich der Homologiegruppe) ursprünglich eingeführt wurde als *Werkzeug* im Studium topologischer Räume (und stetiger Abbildungen zwischen ihnen) — daß sich aber zugleich die tatsächliche Berechnung der Invarianten bzw. Gruppen für einen vorgegebenen topologischen Raum als nichttriviales Problem entpuppte, für dessen Lösung selbst geeignete Werkzeuge erforderlich sind. Solche Werkzeuge können aus Resultaten eines Studiums der Eigenschaften der Begriffe Homologie bzw. Homologiegruppe (die demnach ihrerseits zum *Gegenstand* werden) gewonnen werden. Man kann die Nichttrivialität des Problems der Berechnung der Homologiegruppen bereits der folgenden knappen Beschreibung desselben entnehmen:

> [It is necessary to single] out a class of spaces (triangulable spaces) sufficiently simple that an algorithm can be given for computing their homology groups. [. . .] Knowing the groups of a point, the groups of a contractible space are determined. We choose a class of contractible spaces (i.e. simplexes) and form more complicated spaces (i.e. complexes) by assembling these in a smooth fashion. Then the groups of the latter spaces can be computed by the use of Mayer-Vietoris sequences or similar devices.

Diese Passage findet man auf S.54 des Buchs *Foundations of algebraic topology* von Eilenberg und Steenrod. Dieses Buch erschien zwar erst 1952; seine Grundgedanken hatte das Autorenpaar allerdings schon in einer Arbeit aus dem Jahre 1945 dargelegt. Das Buch ist ein Kulminationspunkt der Begriffsklärungsbemühungen[132] rund um den Begriff der Homologiegruppe.

Es geht Eilenberg-Steenrod in ihrem Buch darum, axiomatisch zu beschreiben, was man unter einer "Homologietheorie" versteht (d.h. anzugeben, welche Daten vorhanden und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit man von einer solchen

[132] im Sinne der Gegenüberstellung von Problemlösungstendenz und Begriffsklärungstendenz; vgl. 1.1.1.

Homologietheorie reden kann, und was allein aufgrund dieser abstrakten Charakterisierung bereits über Homologietheorien gesagt werden kann; genaueres in 2.5.1). Der Titel *Foundations of algebraic topology* verrät dieses Ziel eigentlich nicht, denn algebraische Topologie erschöpft sich ja nicht im Begriff der Homologie[133]; in der Tat ist die hier vorliegende Rede von *foundations* Gegenstand eingehender Beschäftigung (in 1.2.2.1 und 2.5.2). Die Besprechung dieses Buches drängt sich im Zusammenhang d.v.A. noch aus zwei anderen Gründen auf: Zum einen hat die Sichtweise der axiomatischen Behandlung von Homologietheorien die mathematischen Entwicklungen stark beeinflußt, um die es in den beiden folgenden Kapiteln geht; zum anderen spielen für die konkrete Ausgestaltung des Projekts kategorientheoretische Konzepte eine wichtige Rolle (vgl. 2.5.3).

2.5.1 Das Projekt: Axiomatisierung von *"homology theories"*

Unmittelbarer Zweck des Axiomatisierens ist es, die konkreten Berechnungsverfahren zu umgehen:

> The great gain of an axiomatic treatment lies in the simplification obtained in proofs of theorems. Proofs based directly on the axioms usually are simple and conceptual. It is no longer necessary for a proof to be burdened with the heavy machinery used to define the homology groups. Nor is one faced at the end of the proof by the question, Does the proof still hold if another homology theory replaces the one used? When a homology theory has been shown to satisfy the axioms, the machinery of its construction may be dropped. [Eilenberg und Steenrod 1952, xf]

Ähnlich argumentiert die Vorrede zum Kapitel über *Applications to Euclidean Spaces*:

> [...] we derive a number of theorems concerning Euclidean space among which are some of the most classical and widely used ones such as the Brouwer fixed-point theorem and the invariance of domain. [...] we show how such theorems can be derived using the axioms without appeal to any concretely defined homology or cohomology theory. [Eilenberg und Steenrod 1952, 298]

Das Leitprinzip für den Übergang zur axiomatischen Sichtweise ist also die Vereinfachung und Einsparung von Beweisen[134].

[133] In späteren Auflagen ist auf S.49 ein Hinweis angebracht, daß zwischenzeitlich [Milnor 1956] den anderen "großen" Begriff der algebraischen Topologie, Homo*topie*theorie, axiomatisiert hat. Vgl. hierzu auch 5.1.6.3.

[134] Dieser Gedanke war natürlich 1952 nichts neues; z.B. verdeutlicht Stefan Banach im Vorwort seiner Dissertation das Hauptinteresse der in dieser zur Anwendung gebrachten Methode:

> L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels [...] [A]fin de ne pas être obligé [de] les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien penible [...], je considére d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui [Banach 1922, 134]; [Banach 1979, II, S.305].

Gemeint sind hier die Axiome (bzw. Postulate) für einen Banachraum.

Ich möchte hier die Axiome nicht in aller Ausführlichkeit wiedergeben; vgl. [Eilenberg und Steenrod 1952, 10ff]. Die Axiome 1 und 2 besagen, daß Homologie ein Funktor ist, der gemäß Axiom 5 homotopieinvariant ist; Axiom 3 regelt, daß der Randoperator mit induzierten Homomorphismen verträglich ist; Axiom 4 verlangt, daß es eine lange exakte Homologiesequenz gibt (bezüglich der Räume X, $A \subset X$ und $X \setminus A$); Axiom 6 (das *excision axiom*) sorgt dafür, daß Homologie beim Herausschneiden bestimmter Unterräume unverändert bleibt; das Axiom 7 schließlich fordert, daß einpunktige Räume triviale Homologie haben. Es folgen analoge Axiome 1c-7c für Cohomologietheorien. Nach der Aufstellung der Axiome geben Eilenberg und Steenrod verschiedene Modelle für ihre Axiome (Beweise der Existenz von Homologietheorien) an. Hierzu heißt es schon 1945 (S.120):

> Both the Čech homology theory [. . .] and the singular homology theory [. . .] satisfy the axioms. This is fairly well known, although the proofs of some of the axioms are only implicitly contained in the literature[135].

Zugleich stellen die Autoren fest, daß ihre Axiome in gewissem Sinn kategorisch sind: zwei Homologietheorien, die die Axiome erfüllen, liefern für einen vorgelegten Raum aus einer geeigneten Kategorie topologischer Räume isomorphe Homologiegruppen. Dies kann man allein aus den Axiomen ableiten (S.vii, ix; auch 2.5.2). Dies bedeutet also, daß die verschiedenen Verfahren zur Ermittlung von Homologietheorien automatisch "dasselbe" Ergebnis haben — wenn die betreffenden Homologietheorien Modelle der Axiome sind. Eilenberg und Steenrod machen aber nicht bei der Überprüfung halt, ob das Ergebnis der Ermittlung von Homologietheorien gegenüber den jeweils verwendeten Methoden invariant ist. Vielmehr gehen sie auf das Verfahren selbst: Sie stellen dar, welche Schritte nötig sind, um eine Homologietheorie herzustellen.

> The discussion will be advanced by a rough outline of the construction of the homology groups of a space. There are four main steps as follows:
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | (1) | space | $\to$ | complex |
> | (2) | complex | $\to$ | oriented complex |
> | (3) | oriented complex | $\to$ | groups of chains |
> | (4) | groups of chains | $\to$ | homology groups |
>
> [. . .] [The] statement [of the axioms] requires only the concepts of point set topology and of algebra. The concepts of complex, orientation, and chain do not appear here. However, the axioms lead one to introduce complexes in order to calculate the homology groups of various spaces. Furthermore, each of the steps (2), (3), and (4) is derived from the axioms. These derivations are an essential part of the proof of the categorical nature of the axioms. [Eilenberg und Steenrod 1952, viii]

[135] Vgl. hier auch [Eilenberg und Steenrod 1952, 47] *"The axioms 1, 2, 3, and 7 are, perhaps, too basic and too well understood to warrant [an] explicit treatment. One must be interested in an axiomatic development before one thinks of writing them down"*. Was die Thematisierung der übrigen Axiome betrifft, verweise ich exemplarisch auf Hurewicz' erstmalige Behandlung der exakten Homologiesequenz, wie dargestellt in 2.4.3.1; auch Eilenberg-Steenrod verweisen hierzu auf Hurewicz (S.47).

Man kann also hier von einer Axiomatisierung eines Verfahrens sprechen. Solch ein Verfahrensschema mußte zunächst in verschiedenen Kontexten eingeübt werden, bevor es freigelegt werden konnte. Begriffsgeschichtlich interessant dabei ist, daß der konzeptuelle Fortschritt Poincarés und seiner unmittelbaren Nachfolger in der algebraischen Topologie gerade war, die *concepts of complex, orientation, and chain* einzuführen; hier ist es nun ein neuerlicher konzeptueller Fortschritt, sie in gewisser Weise wieder loszuwerden.

2.5.2 Die Rede von *foundations*

Im Abschnitt 1.2.2.1 gehe ich auf Kreisels Bemerkungen hinsichtlich der Verwendung von Bezeichnungen der Form *foundations of ring theory* u.ä. ein; Kreisel hebt hervor, daß es den Benutzern dieser Sprechweise nur um die reine Organisation einer Disziplin gehe und nicht um Grundlegung im erkenntnistheoretischen Sinn (es sei denn in positivistischer Manier, die Kreisel ablehnt). Auf den ersten Blick scheint auch bei Eilenberg und Steenrod an *foundations* in diesem organisatorischen Sinn gedacht zu sein. Allerdings gibt es Parallelen ihrer axiomatischen Methode zur Verwendung von Axiomatik in metamathematischen Fragestellungen, und diese Parallelen gehen weit darüber hinaus, die Axiome als Deduktionsbasis zu verstehen: Es werden Überlegungen zur Existenz von Modellen angestellt sowie zur Unabhängigkeit und Kategorizität der Axiome; z.B. *"The axioms are categorical in the sense that two such assignments give isomorphic algebraic systems"* [Eilenberg und Steenrod 1952, vii]. Halmos hat eine Unterscheidung zwischen naiver und axiomatischer Mengenlehre formuliert, auf die ich in 7.3.3 zurückgreife. Zwischen [Dold 1980] und [Eilenberg und Steenrod 1952] besteht ein ähnliches Verhältnis: Dold geht von *einer* festen Homologietheorie aus (naiv i.S. Halmos'), während Eilenberg und Steenrod zusammenstellen, was einem in der Auseinandersetzung mit *jeder* Homologietheorie zwangsläufig begegnet (axiomatisch)[136].

Es scheint also doch mehr gemeint zu sein als nur Grundlegung i.S. von Organisation. Ich behaupte, daß sich, in der Sprechweise der in Kapitel 1 skizzierten Erkenntnistheorie, mit dem Buch von Eilenberg-Steenrod ein neuer *common sense* auf technischer Stufe etabliert. Eine Disziplin wird auf ein *neues* (axiomatisches) Fundament gestellt; die bisherigen Objekte mit ihren kalkülbestimmten Herstellungsmethoden treten ins zweite Glied zurück. Neue Objekte sind jetzt die *Aussagen* über jene bisherigen Objekte (die Axiome und was sich aus ihnen deduktiv ergibt; es sind dies Aussagen über Homologietheorien als Daten, in Absehung von der Herstellung dieser Daten). Dies verrät einmal die Methodik der neu fundierten Disziplin: Man entwickelt die Theorie dieser neuen Objekte — man sucht nämlich Modelle der Axiome, beschäftigt sich mit ihrer Unabhängigkeit. Zum andern ist es klar, daß das *imprecise picture* (1.3.4) der Experten genau darin bestanden haben wird: eine Homologietheorie ist alles, worüber die und die Aussagen gelten. Der *common sense* auf technischer Stufe, die Erfahrung aus dem Arbeiten mit Homologietheorien, rechtfertigt es, alles als Homologietheorie anzusprechen, was diese Axiome erfüllt.

[136]Vgl. hier auch Anm.42.

Entsprechend werden aus dieser Erfahrung (hochgestochen ausgedrückt: aus dieser Herstellungshandlung der Axiome) die Axiome als Gegenstand im erkenntnistheoretischen Sinn gerechtfertigt.

Die Herstellungsschritte der einstigen Objekte (die *steps* (1)-(4), s.o.) sind Abstraktionsschritte, die einstigen Objekte gingen also aus Abstraktionen hervor; diese Herstellungsschritte wurden in den jeweiligen Homologietheorien mit konkreten Kalkülen ausgeführt. Sollte eine Aussage über die einstigen Objekte bewiesen werden, mußte auf den konkreten Kalkül zurückgegangen werden. Im Ansatz von Eilenberg-Steenrod gehen diese Herstellungsschritte weitgehend in den Axiomen auf: *each of the steps (2), (3), and (4) is derived from the axioms* (s.o.). Das Zustandekommen der Herstellungsregeln der neuen Objekte (der Umstand, daß diese Objekte Aussagen über Objekte sind, die aus Abstraktionen hervorgehen) wird nicht mehr thematisiert. Die Aussagen berufen sich nicht mehr auf diesen Umstand.

Es wäre nach meiner Auffassung ein Irrtum, als neue Gegenstände die Objekte des Typs "Homologietheorie als reine Daten" anzusprechen, die ja durchaus als Abstraktion aus den einstigen Objekten aufgefaßt werden können. Bezieht man sich (wie ich glaube: richtiger) auf die *Aussagen* über solche Daten als neue Gegenstände, so stellt man fest: Die Aussagen über die reinen Daten kommen nicht durch "Abstraktion" aus den Aussagen über die speziellen Kalküle zustande (es sind einfach die *selben* Aussagen), ebensowenig die konzeptuellen Beweise durch Abstraktion aus den rechnerischen Beweisen. Im Gegenteil sind beide Beweise sehr verschieden, und aus diesem Umstand ist auch mein Vorgehen gerechtfertigt, die Aussagen als die Gegenstände in der neuen Situation zu identifizieren.

Die *community* der algebraischen Topologie hatte zuvor jahrelang mit den zahlreichen konkreten Kalkülen gearbeitet und unter dieser Arbeit zweifellos immer wieder die überflüssigen Wiederholungen und sonstigen Unannehmlichkeiten wahrgenommen, die dies in bestimmten Situationen mit sich bringt; es bestand also wohl ein gemeinsamer Konsens dahingehend, daß auf jene Situationen gemünzt eine Ausschaltung der Unannehmlichkeiten gesucht werden sollte. Schließlich kann nur eine *community*, in der ein solcher Konsens besteht, bereit sein zu akzeptieren, daß der Name "Homologietheorie" auf Objekte übergeht, die anders charakterisiert sind als die vormalig betrachteten Objekte. Es wird deutlich, daß die hier wirksamen Motivationen nur auf technischer Ebene verstanden werden können.

Die Einschränkung "in bestimmten Situationen" ist so zu verstehen, daß hier natürlich nicht behauptet werden soll, durch die neuen Objekte seien die alten abgelöst oder ersetzt. Die Vielzahl der Kalküle wäre ja gar nicht erst entstanden, wenn nicht jeder für sich in einer bestimmten Situation seine ureigene Motivation und Berechtigung hätte. Gleichwohl kam man in der Anwendung der Ergebnisse jener Kalküle immer wieder dazu, einen bestimmten Typ von Aussagen über diese heranzuziehen, in deren Beweis der Rückgriff auf den konkreten Kalkül auf mühsame Rechnungen führte — und zugleich überflüssig erschien (weil man bemerkte, daß die Aussagen für alle Kalküle Bestand haben). *Für den Beweis solcher Aussagen* wurde also ein neuer, angemessenerer Rahmen gesucht; für die ursprünglichen Aufgaben der einzelnen Kalküle blieben diese Kalküle das Mittel der Wahl[137]. Die algebraische Topologie wurde also nicht völlig transformiert, sondern eher um einen Aspekt ergänzt. Allerdings wird sich im nächsten Kapitel zeigen, daß gerade dieser Aspekt es erlaubt hat, die Methoden der algebraischen Topologie in Fragestellungen der Algebra einzusetzen, d.h. sie über ihr angestammtes Terrain hinaus nutzbar zu machen.

2.5.3 Die Bedeutung der KT für die Unternehmung

Wurde im Vorangegangenen aufgezeigt, daß die Behauptungen der in Kapitel 1 skizzierten Erkenntnistheorie im Falle des Buchs von Eilenberg-Steenrod haltbar scheinen, so ist damit noch nicht gesagt, daß der KT bei der beobachteten Etablierung eines neuen *common sense* eine entscheidende Rolle zukommt. Tatsächlich sind zwar Aussagen die neuen Objekte, jedoch sind dies nicht ausschließlich kategorientheoretisch kodifizierte Aussagen (die Axiome sind ja nicht durchweg als kommutative Diagramme aufzufassen)[138]. Gleichwohl ist die KT von großer Bedeutung für das Projekt von Eilenberg-Steenrod, wie ich nun darstellen will.

[Eilenberg und Steenrod 1952] enthält ein Kapitel über Kategorien (S.108ff). Man könnte das Buch aus diesem Grund als "erstes Lehrbuch der KT" ansehen — wenn man es denn überhaupt als Lehrbuch ansprechen will. In erster Linie ist es ja eine Monographie, die versucht, Ordnung in eine weitentwickelte, aber etwas chaotisch ausgefächerte Disziplin zu bringen[139]; das Buch scheint mir nicht so sehr als Einstiegslektüre in diese Disziplin gedacht, sondern an die bereits in dem Feld Tätigen gerichtet — trotz der im Vorwort unterstrichenen didaktischen Ausrichtung[140] und trotz des Faktums, daß Übungsaufgaben vorhanden sind. Jedenfalls gibt es nach meiner Kenntnis keine ältere Buchveröffentlichung, die ein ganzes Kapitel zur Entwicklung kategorientheoretischer Grundbegriffe enthält. Zu diesem Kapitel heißt es:

> The first objective of this chapter [IV: Categories and functors] is to introduce and illustrate the concepts of *category, functor*, and related notions. These are needed in subsequent chapters to facilitate the statements of uniqueness and existence theorems. Only as much of the subject is included as is used in the sequel. A thorough treatment can be found in [[Eilenberg und Mac Lane 1945]].
>
> The ideas of category and functor inspired in part the axiomatic treatment of homology theory given in this book. In addition, the point of view that these ideas engender has controlled its development at every stage. [S.108]

[137] Bestimmte Techniken im Zusammenhang der Kalküle kommen in 2.6.1 zur Sprache.

[138] Eilenberg und Mac Lane waren der Einschätzung, die KT diene hier als Sprache, vgl. 3.4.3.2.

[139] Ich will hiermit nicht das oben Gesagte zurücknehmen und nun doch behaupten, *foundations* seien hier einfach nur im Sinne von Organisation gemeint. Die oben geschilderten Bemühungen, für einen bestimmten Typ von Aussagen einen angemesseneren deduktiven Rahmen bereitzustellen, können durchaus gleichzeitig zwei Motivationen entspringen, nämlich zum einen dem Bedürfnis, Ordnung in den Wildwuchs einer Disziplin zu bringen, und zum andern der Überzeugung, Homologietheorien als reine Daten in Absehung von ihrer Herstellung seien hinreichend rechtfertigte Gegenstände wissenschaftlicher Untersuchung.

[140] Vgl. hier auch die Diskussion in 1.3.4.

(Weitere *objectives* dieses Kapitels — die es gibt, wie die Formulierung vermuten läßt —, spielen hier keine Rolle.) Wenn es darum geht, die Formulierung von Sätzen zu erleichtern *(facilitate the statements of [. . .] theorems)*, wird die KT offenbar als Sprache benutzt. Allerdings bleiben Eilenberg und Steenrod nicht bei einer solchen Verwendung als Sprachrahmen stehen: die Funktorialität ihrer Konstruktionen ist ihnen wichtig und wird entsprechend hervorgehoben. Allen voran wird auf S.10f die Funktorialität von Homologie zum axiomatischen Kennzeichen einer Homologietheorie gemacht; die Bedeutung der Funktorialität anderer Konstruktionen erläutere ich exemplarisch anhand ihrer Stellungnahme zu den Schwierigkeiten mit dem direkten Limes topologischer Gruppen.

Zunächst wird auf S.132 erklärt, warum bereits die direkte Summe keine sinnvolle Konstruktion auf kompakten abelschen Gruppen ist: $\sum G_\alpha$ wäre nämlich nicht abgeschlossen in $\prod G_\alpha$ (da überall dicht, wie leicht einzusehen ist); da aber die Topologie von $\prod G_\alpha$ hausdorffsch ist, ist also $\sum G_\alpha$ nicht wieder kompakt[141]. Fazit: *“It is for this reason that the direct sum is not a useful operation to apply to compact groups”*. Hier bleibt noch implizit, daß dieses *“not useful”* an der verletzten Funktorialität der Konstruktion $\sum G_\alpha$ festzumachen ist (die Kategorie der kompakten abelschen Gruppen wird verlassen); immerhin heben Eilenberg-Steenrod zwei Kategorien von Gruppen explizit hervor, nämlich gerade die R-Moduln und die kompakten abelschen Gruppen (S.110).

Ein ähnliches Argument richtet sich dann auch gegen den direkten Limes topologischer Gruppen (S.223): dies wäre die Gruppe $(\sum G)/Q$ für ein bestimmtes Q; es stellt sich wieder heraus, daß dieses Q in $\sum G$ nicht abgeschlossen ist. Der Quotient wäre also nicht hausdorffsch. Fazit: *“This means that no analog of 4.12 would hold for any reasonable category of topological groups”* (4.12 ist die Aussage, daß man die Bildung des inversen Limes als kovarianten Funktor von der Kategorie der *direct systems* von R-Moduln in die Kategorie der R-Moduln auffassen kann). Es werden demnach zwei Vorentscheidungen spürbar: Die Funktorialität der Limesbildung soll nicht in Gefahr gebracht werden, und Kategorien topologischer Gruppen sind erst *“reasonable”*, wenn die Gruppen wenigstens hausdorffsch sind. Die zweite Vorentscheidung entspringt vermutlich der Theorie topologischer Gruppen bzw. den Anwendungen, die Eilenberg und Steenrod von dieser Theorie machen; die Berechtigung der ersten Vorentscheidung wird sich wohl am ehesten daraus erarbeiten lassen, daß man weiterverfolgt, was in der Folge alles von 4.12 abhängt. Die wesentliche Anwendung scheint mir zu sein, daß die Čech-Theorie Axiom 2 einer Homologietheorie (bzw. Axiom 2c einer Cohomologietheorie) erfüllt (S.240); hierbei ist dieses Axiom (das seinerseits die Funktorialität der (Co)Homologie zusichert) keine reine Konvention, sondern zahlreiche Sätze hängen davon ab.

Eilenberg und Steenrod kommen sogar einer Weiterentwicklung des Limesbegriffs im Sinne Kans[142] recht nahe, und zwar im Zusammenhang des spezifischen Zugangs zu den Koeffizienten der Homologietheorien in der axiomatischen Situati-

[141]“Kompakt” bedeutet bei [Eilenberg und Steenrod 1952] hausdorffsch und kompakt im üblichen Sinn, vgl. ebd. S.4.

[142]Vgl. 2.6.2.3.

on (S.17). Vorausgesetzt, daß eine Homologietheorie die Axiome erfüllt, kann man offenbar die Koeffizienten durch Anwendung des Homologiefunktors auf bestimmte Räume gewinnen: Zunächst fixieren Eilenberg und Steenrod einen Basispunkt P_0 im topologischen Raum und ermitteln die Koeffizientengruppe als $H_0(P_0)$. Man kann aber sogar darauf verzichten, einen Basispunkt zu fixieren, und zwar mit Hilfe der angekündigten Limeskonstruktion. Hierzu erklären Eilenberg und Steenrod zunächst zu einer (nach einer Menge M indizierten) Familie von Gruppen $G_\alpha, \alpha \in M$ und Isomorphismen π^α_β eine Gruppe G; die Konstruktion ist formal analog zu der der inversen Limesgruppe von Eilenberg-Mac Lane, die allerdings diese Konstruktion nur für gerichtete Indexmengen durchführen[143]. Sie wählen nun M speziell als die Menge aller einpunktigen Räume in der zugrundegelegten Kategorie topologischer Räume und nehmen als G_α die H_0 zu diesen Indizes; G ist erwartungsgemäß zu sämtlichen G_α isomorph (kann also ebenfalls als Koeffizientengruppe angesprochen werden) und hängt nicht mehr von der Wahl eines Basispunktes ab. Hier dient also einmal mehr eine universelle Konstruktion zur Unterdrückung von Varianz[144]. Aufgrund der speziellen Anwendungsabsicht machen die Autoren jedoch keinen Versuch, den Zusammenhang zwischen der Konstruktion und der des inversen Limes in einem allgemeineren kategorientheoretischen Rahmen zu analysieren; dies bleibt Kan vorbehalten.

Auch die KT-spezifische Beweismethode wird besonders akzentuiert[145]:

> The reader will observe the presence of numerous diagrams in the text. [. . .] Two paths connecting the same pair of vertices usually give the same homomorphism. This is called a *commutativity* relation. The combinatorially minded individual can regard it as a homology relation due to the presence of 2-dimensional cells adjoined to the graph. [. . .]
>
> The diagrams incorporate a large amount of information. [. . .] In the case of many theorems, the setting up of the correct diagram is the major part of the proof. [1952, xi]

Das kategorientheoretische Handlungsschema der Dualisierung ist in dem Projekt von Anfang an präsent:

> Cohomology can be axiomatized in the same way as homology. It is only necessary to reverse the directions of the operators ∂ and f_* in the [. . .] axioms and make such modifications in the statements as these reversals entail. [1945, 120]

Später wird es (nach einem mißlungenen Anlauf Mac Lanes) Buchsbaum gelingen, diese Dualität explizit zu machen, vgl. 3.1.5.2.

---

[143]Vgl. hierzu 2.2.3.2. Dies halten übrigens auch Eilenberg und Steenrod bei der Konstruktion des inversen Limes so (S.212ff); daher sprechen sie die hier vorliegende Konstruktion auch nicht als Limesgruppe an.

[144]Eine echte Varianz liegt freilich gar nicht vor; in der Konstruktion wird ja bereits das (anderweitig erbrachte) Resultat benutzt, daß alle $H_0(P_0)$ isomorph sind. Es geht mehr um ein kanonisches Berechnungsverfahren.

[145]Vgl. hier Anm.297.

2.6 Simpliziale Mengen und adjungierte Funktoren

2.6.1 *complete semisimplicial complexes*

Die Bezeichnung *complete semisimplicial complex* (im folgenden kurz *c.s.s. complex*) ist heute durch die einfachere Bezeichnung *"simplicial set"* ersetzt. Die Einführung des Begriffes fand offenbar bei [Eilenberg und Zilber 1950] statt. Dort steht auf S.507f folgende Definition:

> A *complete semi-simplicial complex* K is a collection of "simplices" $\{\sigma\}$, to each of which is attached a dimension $q \geq 0$, such that for each q-simplex σ and each map $\alpha : [m] \to [q]$, where $m \geq 0$, there is defined an m-simplex $\sigma\alpha$ of K, subject to the conditions
>
> (8.1) *If ϵ_q is the identity map $[q] \to [q]$, then $\sigma\epsilon_q = \sigma$.*
>
> (8.2) *If $\beta : [n] \to [m]$, then $(\sigma\alpha)\beta = \sigma(\alpha\beta)$.*

Hierbei bezeichnet $[m]$ die geordnete Menge $(0, 1, \ldots, m)$, und alle *maps* sind *weakly monotone*.

Eilenberg-Zilber ging es zunächst darum, einen Komplexbegriff zu haben, der auch den singulären Komplex erfaßt und dennoch für bestimmte Methoden des Kalküls zugänglich ist: *"the various constructions of homology theory (including homology with local coefficients, cup-products, etc.) can be carried out just as for simplicial complexes"*. Dieser Ansatz führte sie zunächst zum Begriff des *semi-simplicial complex* (in der Folge kurz s.s.c.; heute: *bisimplicial set*; S.499). *c.s.s. complex* ist zwar nicht als Spezialisierung von s.s.c. definiert (wie man annehmen könnte); es wird aber gezeigt, daß diese Komplexe solche Spezialisierungen sind. Die genaue Rolle der *c.s.s. complexes* in der Arbeit zu kennen, würde eine vertiefte Lektüre erfordern; diese Rolle scheint aber keine zentrale zu sein. Vermutlich treten sie erst in der zweiten Arbeit [Eilenberg und Zilber 1953] in den Vordergrund. Jedenfalls wurde dem Begriff, dessen Definition oben zitiert ist, wenig später eine große Bedeutung für die algebraische Topologie zugemessen (s.u. Godement); zugleich hat man mit einer gewissen terminologischen Verwirrung zu kämpfen, da es dieser Begriff ist (und nicht der *semi-simplicial complex* von Eilenberg-Zilber), den Godement als *complexe de chaînes semi-simplicial* bezeichnet; Kan bleibt bei der Bezeichnung von Eilenberg-Zilber, während in einem späteren Zusammenhang Segal von *semi-simplicial set* spricht.

Entsprechend dem Kerninteresse der vorliegenden Arbeit soll es hier hauptsächlich darum gehen, welcher Fortschritt in der Behandlung solcher Komplexe durch den Einsatz kategorientheoretischer Mittel erzielt wurde. [Kan 1958b, 331], der [Eilenberg und Zilber 1950, 1953] wegen des Begriffs des *c.s.s. complex* zitiert, definiert den Begriff in naheliegender Weise als Funktor, und dies wird auch für seine Methodik entscheidend (Stichwort: Adjunktion von Funktoren, vgl. 2.6.2). Kan faßt entsprechend die Kategorie der *c.s.s. complexes* als Funktorkategorie auf [Kan 1958b, 331]. Das Bourbaki-Manuskript *n°307* führt *structures semi-simpliciales* als Beispiel einer Konstruktion an, die man sinnvollerweise als Funktor definiert — und die somit die Bedeutung des Funktorkonzepts unterstreicht ⟨#95 S.259⟩. Ähnlich explizit befürwortet später Segal die funktorielle Sicht:

> A semi-simplicial set is a sequence of sets $A_0, A_1, A_2, \ldots$ together with boundary- and degeneracy-maps which satisfy certain well-known conditions [[Godement 1958]]. But it is better regarded as a contravariant functor A from the category *Ord* of finite totally ordered sets to the category of sets. [Segal 1968, 105]

Godement bezeichnet interessanterweise die Auffassung, man habe es hier mit einer Funktorkategorie zu tun, als zu pedantisch:

> Étant donné un entier $n \geq 0$, nous désignerons [...] par Δ_n l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ [...]. Étant donnés des entiers $p, q \geq 0$, on notera G_{pq} l'ensemble des applications de Δ_p dans Δ_q ; on a évidemment des lois de composition
>
> $$G_{pq} \times G_{qr} \to G_{pr}$$
>
> de sorte que l'on peut considérer l'ensemble constitué par les objets $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ comme une *catégorie* (mais nous n'adopterons pas ce point de vue, par trop pédant...). [Godement 1958, 35]

Godement straft sich aber sogleich selbst Lügen:

> Dans les définitions précédentes, on peut remplacer, quels que soient p et q, l'ensemble G_{pq} par le sous-ensemble G^+_{pq} formé des applications *croissantes (au sens large)* de Δ_p dans Δ_q ; on parvient alors à la notion de *complexe de chaînes* (resp. de cochaînes) *semi-simplicial* [...].
>
> On notera d'autre part que les définitions que nous avons présentées [...] s'étendent au cas [d'une] *catégorie abélienne* quelconque $\mathfrak{K}$; par exemple un complexe de chaînes (resp. de cochaînes) semi-simplicial dans $\mathfrak{K}$ est un foncteur contravariant (resp. covariant) $\Delta^+ \to \mathfrak{K}$, en notant Δ^+ la catégorie suivante [...] [ebd. S.36].

Δ^+ bezeichnet natürlich genau die gerade noch als *trop pédant* verworfene Kategorie (mit monoton wachsenden Abbildungen). Vermutlich erfordern die Anwendungen, die Godement von dem Begriff macht, nicht diese Sichtweise, während dies die (weitergehenden) von Kan vorgenommenen Anwendungen tun. Daß Godements Anwendungen nicht die volle Tiefe des Begriffs ausschöpfen, deutet sich nämlich in folgender Anmerkung an, die bei der Definition der *complexes semi-simpliciaux* angebracht ist:

> [...] il peut être utile de préciser que les complexes *semi*-simpliciaux jouent actuellement en Topologie un rôle beaucoup plus important que les complexes simpliciaux, bien que ce fait ne résulte pas des exemples données dans ce §. [...]

Godement gibt nähere Anhaltspunkte zu der hohen Bedeutung, die dem Begriff zugemessen wurde, in seinem Vorwort; er schließt an die von Eilenberg-Zilber evozierten Punkte an:

> Quant aux « complexes simpliciaux », il s'agit des complexes de chaînes (ou de cochaînes) dans lesquels on a des « opérateurs de face » permettant d'effectuer formellement les calculs simpliciaux classiques : situation que l'on rencontre non seulement dans la théorie classique des polyèdres, mais aussi en homologie singulière, en cohomologie de Čech, et en théorie des faisceaux. Comme de plus les travaux récents de Kan semblent prouver que ces complexes constituent le domaine naturel de validité d'une théorie complète de l'homotopie, on peut affirmer que la notion générale de complexe simplicial (due essentiellement à Eilenberg et Zilber) est appelée à jouer un rôle essentiel en topologie algébrique. [1958, ii]

Mit den *calculs simpliciaux classiques* meint Godement, wie sich herausstellt, eine Behandlung der verschiedenen "Produkte" (kartesisches Produkt, *cup*-Produkt etc.). Es geht also um die Wiedereinführung kombinatorischer Methoden insofern, als diese *Produkte* ursprünglich auf einen kombinatorischen Kontext angewiesen waren und jetzt überall da entwickelt werden können, wo simpliziale Mengen auffindbar sind[146].

2.6.2 Kans begriffliche Neuerungen

2.6.2.1 Einige Bemerkungen zur Entstehungsgeschichte von Kans Arbeiten

[Corry 1996, 371] stellt ausführlich dar, daß es sich bei Kans Veröffentlichungen um Ergebnisse handelt, die Kan offenbar zunächst unter eigener Regie erarbeitet hat, bis sie Eilenberg 1956 bei einem Israelaufenthalt bekannt wurden; dieser empfahl dann, die Ergebnisse als Dissertationsleistung anzuerkennen. (Corry bezieht sich zwar auf briefliche Informationen von Eilenberg; gleichwohl erstaunt, daß es kein weiteres Dokument gibt, aus dem sich auf einen Israelaufenthalt Eilenbergs im Jahr 1956 schließen läßt. Gastprofessor an der Hebrew University war er 1954, nicht 1956; 1956-57 war er Gastprofessor des Tata Institute[147]. Es ist natürlich eine Durchreise denkbar, ebensogut aber auch eine Verwechslung von Corry oder von Eilenberg selbst.) [Kan 1958a] trägt als Adresse die Columbia University und den Vermerk, daß der Autor zum Zeitpunkt des Drucks wieder in Israel ist. Ähnlich findet man bei [Kan 1957, 476] den doppelten Vermerk "Weizmann Institute, Rehovoth, Israel; Columbia University NY." Wenn das, was Corry wiedergibt, stimmt, dann folgte Kan wohl einer Einladung Eilenbergs an die Columbia University. [Mac Lane 1996b, 137] erwähnt zwar, daß Kan dorthin kam, nicht aber wann; von einer Reise Eilenbergs ist übrigens keine Rede.

Wenn man sich Kans Bibliographie im MathSciNet ansieht, fällt auf, daß zum einen Corrys Darstellung des von Eilenberg in Israel "entdeckten" Kan chronologisch nicht stimmen kann, insofern Kan bereits vorher veröffentlicht hat (bzw. auch dies spricht dafür, daß die Jahreszahl 1956 einfach falsch ist und Eilenberg Kan bereits

---

[146] Im axiomatischen Kontext von [Eilenberg und Steenrod 1952] werden die Produkte nicht eingeführt; [Dold 1980], der sich auf die singuläre Theorie beschränkt, bezieht sich bei der Konstruktion der Produkte stark auf die Konstruktion des singulären Komplexes, allerdings nur insofern, als in dieser Situation der Satz von Eilenberg-Zilber gilt.

[147] Vgl. 3.3.1.1.

bei seinem nachweislichen Israelaufenthalt 1954 unterstützt hat), und daß zum anderen die am stärksten kategorientheoretisch geprägte Arbeit [Kan 1958a] erst spät rezensiert wird. Es wurde wohl damals als dringender angesehen, zu den Anwendungen auf algebraische Topologie *Reviews* zu erstellen; die kategorientheoretischen Methoden erschienen als weniger sensationell.

2.6.2.2 Der Begriff des adjungierten Funktors

[Kan 1958a, 294] geht von der homologischen Algebra aus. Dort, so Kan, gibt es eine bestimmte Art von Paaren von Funktoren, die sehr wichtig ist, nämlich Paare, die zum einen aus einem Hom-Funktor bestehen, zum andern aus einem Funktor, der zwei Objekten ihr Tensorprodukt zuweist. Es gibt eine natürliche Äquivalenz der Form

$$\alpha : \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$$

Kan verallgemeinert diese Situation und nennt sinngemäß zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *adjungiert*, wenn es zu jedem Objekt A von $\mathcal{C}$ und jedem Objekt B von $\mathcal{D}$ eine natürliche Äquivalenz der Form

$$\alpha : \mathrm{Hom}(F(A), B) \to \mathrm{Hom}(A, G(B))$$

gibt; entsprechend für Funktoren in mehreren Variablen. (Da in seinem Ausgangsbeispiel einer der beteiligten Funktoren selbst ein Hom-Funktor ist, stellt Kan es so dar, als habe er zunächst vor dem Problem gestanden, die äußeren Hom-Funktoren überhaupt als Bestandteil des allgemeinen Konzepts zu erkennen. Dieser Kommentar mag eine expositorische Funktion haben und nicht den Weg wiedergeben, den Kan bei der Erarbeitung des Konzepts tatsächlich eingeschlagen hat — denn das Ausgangsbeispiel hat, wie wir bei 5.2.2 sehen werden, die Aufgabe, den Leser an das Konzept heranzuführen, war aber nicht entscheidend für Kans beabsichtigte Anwendung des Konzepts.)

2.6.2.3 Kans neue Definition von Limes

Kan gibt dem Begriff des Limes seine endgültige Form.

> The notions of limit and colimit have a long history in various concrete examples. Thus colimits were used in the proofs of theorems in which infinite abelian groups are represented as unions of their finitely generated subgroups. Limits (over ordered sets) appear in the p-adic numbers of Hensel and in the construction of Čech homology and cohomology [...] E.H.Moore's general analysis (about 1913) used limits over certain directed sets. In all these classical cases, limits appeared only for functors $F : J \to C$ with J a linearly or partly ordered set. Then Kan [...] took the step of considering limits for all functors [...] [Mac Lane 1971b, 76]

(Mac Lane verweist auf "Kan 1960", gemeint ist aber zweifellos [Kan 1958a, 309]). Ich will hier nicht die technischen Details von Kans Definition wiedergeben; entscheidend ist, daß Kan letztlich zu einer vollständig kategoriellen Charakterisierung vordringt, die es nicht nur erlaubt, den Begriff auf beliebige Kategorien zu übertragen, sondern auch, verschiedene Konstruktionen als Limites anzusprechen. War bei Eilenberg-Mac Lane stets eine bestimmte Konstruktion gemeint, tritt bei Kan die universelle Eigenschaft[148] in den Vordergrund, die in ähnlicher Form auch andere Konstruktionen haben (so kann nun beispielsweise das direkte Produkt als Limes angesprochen werden). Dies gelingt dadurch, neben der Zielkategorie auch die Urbildkategorie variabel zu machen (also insbesondere nicht ausschließlich von teilgeordneten Mengen auszugehen; Kan führt Beispiele an, bei denen die zugrundeliegenden Kategorien keine geordneten Mengen sind — S.309f, 323).

Durch diese nochmalige Ausdehnung der Anwendbarkeit des Limesbegriffs stellt sich nun umso eindringlicher die Frage der Existenz von Limites für gegebene Kategorien. Kan gibt unter Verwendung des Begriffs des adjungierten Funktors eine notwendige und hinreichende Bedingung an dafür, daß Limites existieren. Die Gründe für Kans neue Definition kommen im nächsten Abschnitt zur Sprache.

Es hat vor Kan Beispiele von Konstruktionen gegeben, die schon in die Richtung der allgemeinen Definition hätten weisen können (und zwar in stärkerem Maße als etwa direkte Produkte, weil die betreffenden Konstruktionen sehr eng angelehnt an die des inversen bzw. direkten Limes verlaufen). [Lefschetz 1942, 56] betrachtet *inverse systems* mit mehreren Pfeilen zwischen je zwei Objekten; ebd. S.59 für *direct systems*. Dieser Fall läßt sich bei Eilenberg-Mac Lane nicht erfassen (da hier die Indexmenge nicht sinnvoll als teilgeordnete Menge aufgefaßt werden kann). Wie bereits bei 2.5.3 angedeutet, erreichen Eilenberg und Steenrod eine invariante Beschreibung der aus den Axiomen wiedergewonnenen Koeffizientengruppe der Homologie, indem sie diese analog zur inversen Limesgruppe eines *inverse system of groups* konstruieren. Der Unterschied zur inversen Limesgruppe besteht u.a. darin, daß die Indexmenge nicht als gerichtet oder überhaupt geordnet angenommen wird. Eine Ordnung spielt in der Tat keine Rolle in der Situation von Eilenberg und Steenrod, denn ihre Indexmenge ist die Menge aller einpunktigen Räume in der zugrundegelegten Kategorie topologischer Räume.

Diesen Konstruktionen gelang es jedoch nicht, Anlaß zu Vorgriffen auf Kan zu geben: Man verspürte bei ihrer Einführung kein Bedürfnis nach einem übergeordneten vereinheitlichenden Begriff. Insofern ist zu fragen, wieso (aufgrund welcher Charakteristika seiner speziellen Problemsituation) Kan dieses Bedürfnis hatte. Ich beabsichtige, dem in einer separaten Publikation nachzugehen.

Eine bestimmte Beschreibungsmöglichkeit des Limitkonzepts steht bei [Isbell 1966, 623ff]; Isbell behauptet auf S.625, diese stamme von [Kan 1958a], und er weist nach, daß sie äquivalent zu seinem Konzept *“conjugate”* aus [Isbell 1960] ist.

2.6.2.4 Auswirkungen für die Behandlung simplizialer Mengen

Das Anwendungsfeld der Begriffe adjungierter Funktor und Limes, das Kan hauptsächlich interessiert zu haben scheint, sind, wie gesagt, *c.s.s. complexes*. Sie werden in

[148] Diese universelle Eigenschaft hatte auch Cartan bei seiner Verwendung des Limesbegriffs in der Garbentheorie im Blick; vgl. 3.2.2.2.

[Kan 1958a] mehrfach mit dem neuen Begriff in Verbindung gebracht (insbesondere S.327) und sind auch alleiniger Gegenstand der unmittelbar anschließenden Arbeit [Kan 1958b]. [Barr und Wells 1985, 63] befassen sich mit der Beziehung zwischen Kans Arbeiten und *simplicial sets*.

Wichtige Beispiele für Adjunktionen bei Kan: Die Zuweisung einer singulären simplizialen Menge zu einem topologischen Raum ist rechtsadjungiert zur Realisierung der entsprechenden Menge; der Übergang von einem Raum zum Produktraum des Raums mit dem Einheitsintervall ist linksadjungiert zum Übergang von einem Raum zum Raum all seiner Wege (S.304); eine ähnliche Situation besteht zwischen der Konstruktion der *suspension* und dem *loop functor*[149].

Bei Kan scheint mir die Adjunktion v.a. dazu zu dienen, bei einem Liften von Limes einen "Schritt zur Seite" machen zu können (S.318ff).

2.7 Wieso gerade algebraische Topologie?

Eine naheliegende Frage, zu der man sich in einer Geschichte der Kategorientheorie eine Antwort wünschen könnte, ist die, wieso ausgerechnet der Kontext der algebraischen Topologie derjenige war, aus dem die KT hervorging. In der Tat hat Andrée Ehresmann mir gegenüber geäußert, daß nach ihrem Empfinden eine ausschließliche historische Zurückführung der KT auf Probleme der algebraischen Topologie zu einseitig ist; sie hat die Bedeutung hervorgehoben, die Bourbaki bereits vor dem Krieg einer Explikation von ◁Struktur▷ zugemessen hat. Auch Eilenberg war durch seinen IHP-Aufenthalt in den dreißiger Jahren[150] mit diesen Bestrebungen vertraut; dieser Aufenthalt war wohl auch ausschlaggebend für seine spätere Bourbaki-Mitgliedschaft. Die Geschichte der Kategorientheorie unter dem Gesichtspunkt einer Explikation von ◁Struktur▷ wurde bereits von [Corry 1996] aufgearbeitet; einige ergänzende Bemerkungen mache ich in Abschnitt 6.5. Gleichwohl scheint mir, wie schon in der Einleitung dargelegt, daß eine Interpretation der KT als Explikation von ◁Struktur▷ ihrerseits einseitig ist, wenn nicht gar zu kurz greift. Ein Erklärungsbedarf der Rolle der algebraischen Topologie bleibt also bestehen.

Mac Lane zeigt in seinen historischen Darstellungen wenig Scheu vor solchen Fragen und entsprechenden Hypothesen. In [1988a, 335] vertritt er (im Blick auf Ehresmanns differentialgeometrisches Interesse am Gruppoidbegriff, das ich kurz in 5.1.6.2 darstelle) die These, Kategorientheorie hätte auch im Bereich der Differen-

[149] Die Konstruktion der *suspension* stammt von Freudenthal (eine Quellenangabe findet sich bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 48]) und dient zur Ausschaltung von Homologieklassen.

[150] Aus dem Nachlaß geht hervor, daß Eilenberg in der *année universitaire* 1936/37 am IHP immatrikuliert war *(présenté par Maurice Frechet)*; es gibt auch zwei Postkarten von Bronisław Knaster an Eilenberg, die an eine Pariser Adresse geschickt wurden.

tialgeometrie aufkommen können; an anderer Stelle untersucht Mac Lane, ob nicht der Begriff des adjungierten Funktors aus der Arbeit von Marshall Stone hätte kommen können [1970]. Wie er in [1996a, 131] darstellt, wurde auf der KT-Tagung in Tours 1994 über die Frage gesprochen *"If Eilenberg and Mac Lane had not formulated category theory, who would ever have done so?"*; Mac Lane bespricht eine ganze Reihe von solchen hypothetischen Ursprungskontexten (bzw. Urhebern)[151]. In der Bereitschaft Mac Lanes, diese Frage hypothetischer Geschichte ernsthaft zu untersuchen, drückt sich eine grundsätzliche Haltung zum Wesen mathematischer Innovationen aus — und zwar die, die [Stork 1977, 24ff] (im Bezug auf andere Autoren) skizziert hat, wonach Simultaninnovationen eigentlich die Regel sind und nur durch die mittlerweile recht gut funktionierenden Mechanismen der Vermeidung von Prioritätsstreitigkeiten häufig nicht als Parallelpublikationen offenbar werden.

Methodologisch hat man es hier mit dem Problem der hypothetischen Geschichte zu tun: Den Kontext algebraische Topologie als kontingent zu bezeichnen ist gleichbedeutend mit der Hypothese, die KT hätte auch in einem anderen Kontext erstmals entwickelt und eingesetzt werden können. Man kann sich offenbar in verschieden starkem Maße solchen Hypothesen anvertrauen; eine schwache Variante wäre, daß man sie zunächst einmal zum Anlaß nimmt, zu fragen, welche Partikularitäten denn die tatsächliche Ursprungssituation auszeichneten und sozusagen als Brutstätte in besonderem Maße empfahlen. Im vorliegenden Fall sehe ich mindestens folgende Kennzeichen:

- die Notwendigkeit, Limites auf beliebigen gerichteten Mengen zu betrachten (Čech);
- der Übergang zwischen den "Disziplinen" Topologie und Algebra[152];
- die Bedeutung der Morphismen;
- das Interesse an nicht notwendig injektiven oder surjektiven Homomorphismen;

[151] Ein Teilnehmer der Tagung erinnert sich, daß Mac Lane folgendermaßen an die Frage heranging: er forderte das Publikum auf, Autoren vorzuschlagen, die die KT hätten erfinden können, wenn es nicht Eilenberg-Mac Lane getan hätten — und kommentierte diese Vorschläge umgehend, quasi von seiner höheren Autorität aus.

[152] Ein Slogan (nicht nur) der algebraischen Topologie ist die Handlungsmaxime, einerseits Information wegzulassen, damit man mit den Dingen möglichst einfach arbeiten kann, doch zugleich nicht zuviel Information wegzulassen, damit man noch möglichst feine Unterscheidungen treffen kann. Sieht man nun die geschichtliche Entwicklung dieser Disziplin an, so scheinen die Funktoren gegenüber den klassischen Invarianten auf *beiden* Gebieten einen Fortschritt darzustellen — sowohl in der Handhabbarkeit als auch im Informationsgehalt. Intuitiv würde man vielleicht annehmen, daß nicht beides zugleich vergrößert werden kann, aber ein "konstantes Gesamtgewicht" beider Dinge besteht natürlich nicht über historische Stadien hinweg. Vielmehr geht es darum, daß die Ausgangsobjekte (topologische Räume) reicher strukturiert, zugleich aber auch schwerer in ihren Wesensmerkmalen zu erfassen sind als die Objekte, auf deren Studium man das Problem überträgt. Und hier erhöhen funktorielle Übertragungen gegenüber den numerischen Invarianten nicht nur das Maß an Struktur ("Information"), das bei der Übertragung erhalten bleibt, sondern auch das Maß der Manipulierbarkeit — weil mehr Ansatzpunkte für Manipulationen geboten werden.

- die entscheidende Äquivalenzrelation ist nicht extensionale Gleichheit, sondern Isomorphie;
- die Suche nach einem systematischen Zugang zur "Dualität" von Situationen.

Mir scheint, daß es möglich ist, diese Liste so fortzusetzen, daß kein anderer Kontext sämtliche Kennzeichen mit der algebraischen Topologie teilt.

Kapitel 3

Homologische Algebra

In der algebraischen Topologie bis zu Eilenberg-Steenrod diente die KT als sprachlicher Rahmen für die Organisation eines Wissensgebäudes (ein Rahmen, der für die Fortentwicklung dieses Wissens allenfalls stimulierende Bedeutung hat, da er den Ausdruck erleichtert). Kan erreichte begriffliche Neuerungen, durch die die KT in die Deduktion einbezogen wurde. In einem anderen Kontext, der homologischen Algebra, fand parallel eine ähnliche Umbewertung von KT statt. Hierbei eignen sich die Begriffstransformationen in der Geschichte der homologischen Algebra in besonderer Weise zur Analyse der Umbewertung; ich widme daher ihrer Darstellung ein eigenes Kapitel.

[Grothendieck 1957] hat die homologische Algebra in den Stand versetzt, ihre Ergebnisse auf Ergebnisse der KT zurückzuführen. Diese kategorientheoretischen Ergebnisse erscheinen nicht aus sich heraus, von der Warte einer (hypothetischen) rein formalen KT, als besonders interessant, sondern erst im Blick auf die beabsichtigten Anwendungen. Ähnlich sieht es mit den zu definierenden abgeleiteten Begriffen aus. Es geht also um zweierlei Kriterienprobleme:

- welche Ableitungen und Definitionen soll man innerhalb der KT machen?
- wieso zieht man gerade die Kategorientheorie (und keine andere mathematische Theorie) zur Weiterbearbeitung eines gegebenen Problemfeldes heran?

Die Antwort auf die erste Frage wurde historisch in den jeweils vorgesehenen Anwendungen gesucht. Die zweite Frage zeigt aber, daß das Verhältnis der Theorie zu ihren Anwendungen nicht zu trennen ist vom Verhältnis der Problemsituation zu ihren Bearbeitungsmitteln. Hierbei ist die zweite Frage — also die, wie Grothendieck darauf geführt wurde, die Lösung seiner Probleme gerade mit kategorientheoretischen Mitteln anzugehen — historisch interessanter: Sieht man nämlich die KT nur als Sprachrahmen — wie es Eilenberg-Mac Lane taten —, fällt es zunächst einmal schwer, ihr so weitgehendes Eingreifen überhaupt zuzutrauen.

Nun hat Grothendieck die Kategorientheorie keineswegs als etwas im Voraus gegebenes angesehen. Es läßt sich historisch nachweisen, daß er die bestehenden Arbeiten zur KT erst auf äußere Einflußnahme hin bei der Endredaktion seines Textes zur Kenntnis nahm; insbesondere bezieht er sich eigentlich nur auf grundlegende

Definitionen, nicht aber auf bereits anderweitig entwickelte Resultate und Verfahren der Theorie. Er rezipiert also strenggenommen keine bereits vorliegende *Theorie* (sondern entwickelt diese selbst). Die Frage aber bleibt: Was hat ihn dazu gebracht, in dieser Theorie die Lösungsmittel zu vermuten? In Abschnitt 3.3.4.1 werden wir sehen, daß gerade die Plazierung von Konzepten im allgemeinen KT-Rahmen (und *nicht* nur im Rahmen der abelschen KT) ihre deduktive Anwendbarkeit beförderte. Jedenfalls wird hier, wie schon in 1.1.3 vermutet, deutlich: Historisch gibt es nicht am Anfang eine formale Theorie in Reinform, aus der man erst durch Anwendung die relevanten Teile herausdestillieren muß. Das Bedürfnis, eine solche Auswahl erklären zu wollen (und also das Postulat, eine solche Auswahl habe tatsächlich stattgefunden), kann höchstens nachträglich aufkommen, wenn sich *schließlich* eine solche Theorie entwickelt hat, die man ohne Bezug auf die Anwendungen aufstellen kann. Am Anfang sind vielmehr zu erprobende Begriffe gegeben, aus deren Erprobung sich Elemente einer Theorie ergeben, die anschließend als aus einer Gesamtheit von möglichen Aussagen sinnvoll ausgewählt *erscheinen*. Darin, daß die Mitglieder einer *community* diesen *Eindruck haben*, kommt zum Ausdruck, daß die *community* von einem *common sense* zusammengehalten wird.

Aus der Warte der homologischen Algebra ist bemerkenswert, daß gerade eine Reduktion der Probleme auf pfeilsprachlich Ausdrückbares zu einem Fortschritt führt. Dies hängt offenbar damit zusammen, daß es auf die Kettenkomplexstruktur der algebraischen Ausgangssituation ankommt. Hier geht offensichtlich die Einsicht aus [Eilenberg und Steenrod 1952] voraus, daß man die üblichen Verfahren zum Berechnen von Homologie in mehrere konzeptuelle Schritte unterteilen kann, deren letzter in einer Betrachtung auf Kettenkomplexen besteht (vgl. 2.5).

Strenggenommen paßt die Bezeichnung homologische Algebra nicht so recht auf die Unternehmung von [Grothendieck 1957]. Denn mit homologischer Algebra war bei [Cartan und Eilenberg 1956] zunächst gemeint, daß homologische Methoden auf algebraische Probleme angewandt werden (einige historische Informationen zu dieser Art homologischer Algebra stelle ich in 3.1 zusammen). Bei Grothendieck geht es nun eher darum, dieselben homologischen Methoden auf die Garbentheorie und damit mittelbar auf die algebraische sowie die komplexe analytische Geometrie anzuwenden[153]. Garbentheorie ist aber keine reine Algebra[154]; allerdings hat Grothendieck mit seiner Unternehmung Erfolg durch Konzentration auf den algebraischen Anteil der Garbentheorie, denn es geht gerade darum, ohne Voraussetzungen an die Topologie des zugrundeliegenden Raumes auszukommen.

Historische Sekundärliteratur zur homologischen Algebra gibt es einige: [Hilton 1987], [Mac Lane 1978], [Weibel 1999]. Ich möchte hier noch zwei interessante Stellungnahmen zur Geschichte dieser Disziplin wiedergeben. Zum einen setzen die

[153] Es gibt mittlerweile weitere Anwendungsfelder der homologischen Algebra, die hier nicht näher besprochen werden: algebraische Topologie, später globale Analysis (Differentialgleichungen; D-Moduln, *perverse sheaves*; vgl. [Kashiwara und Schapira 1990]) und Operatortheorie. Für eine Geschichte der D-Moduln vgl. Houzel[1990, 1998].

[154] [Gray 1979, 1] zitiert Auslander: *"Sheaf theory is the subject in which you do topology horizontally and algebra vertically"*.

Herausgeber der Hopf-*Selecta* [1964] auf S.186, wo die Arbeit [Hopf 1942] abgedruckt ist, folgende Bemerkung hinzu:

> Diese Arbeit [...] enthält im Keim sowohl die algebraischen wie auch die topologischen Ideenkreise, die man heute mit dem Namen "Homologische Algebra" bezeichnet. [In Hopfs an diese Arbeit anschließenden Arbeiten] tritt [...] die Homologietheorie der Gruppen mit ihren topologischen Anwendungen auf und ebenso der algebraische Begriff der freien Auflösung eines Moduls. Für [weitere] historische Hinweise sei der Leser auf [[Mac Lane 1967]] aufmerksam gemacht.

Ich werde auf diese frühe Geschichte der Disziplin nicht näher eingehen. Zum andern geben Gelfand und Manin folgende Periodisierung der Disziplin:

> The history of homological algebra can be divided into three periods. The first one
> starts in the 1940's with the classical works of Eilenberg and MacLane, D.K.Faddeev, #26
> and R.Baer and ends with the appearance in 1956 of the fundamental monograph [[Cartan und Eilenberg 1956]] which has lost none of its significance up to the present day.
>
> A.Grothendieck's long paper [[Grothendieck 1957]] (its appearance has been delayed #27
> three years) marks the starting point of the second period, which was dominated by
> the influence of Grothendieck and his school of algebraic geometry. #28
>
> The third period, which extends up to the present time, is marked by the ever-increasing use of derived categories and triangulated categories. The basic technique [...] was slow in spreading beyond the confines of algebraic geometry. Only in the last fifteen years has the situation changed. [...] [Gelfand und Manin 1996, v]

(Bei der Erwähnung von D.K.Faddeev unter den *classical works* denken sie vermutlich an die Arbeit [1947]— sie geben selbst keine Referenz an[155]. Ich habe mich nicht näher mit dieser Arbeit auseinandergesetzt, die in keinem der von mir sonst herangezogenen Texte erwähnt wird.) Auf die derivierten und triangulierten Kategorien werde ich nicht näher eingehen (vgl. hierzu jedoch Anm.288); zwar ist erst in diesem Kalkül eine vollständige Durchdringung von KT und homologischer Algebra erreicht, aber die entscheidende Rolle der KT für die homologische Algebra kann man bereits an der vorangehenden Periode gut darstellen.

3.1 Cartan und Eilenberg: derivierte Funktoren

3.1.1 Vorgeschichte: Der Begriff der exakten Sequenz

Der zentrale Begriff der homologischen Algebra ist der Begriff der exakten Sequenz. Ich trage hier einige Elemente einer Geschichte dieses Begriffs zusammen; diese Zusammenstellung ist allerdings weit entfernt von einer vollständigen Darstellung[156].

[155] Ich danke Rainer Schulze-Pillot für den entsprechenden Hinweis.

[156] Eine solche Darstellung gibt es übrigens meines Wissens noch nirgends: [Eckmann 1998, 26] *"l'histoire des suites exactes est assez complexe et curieuse; je n'entre pas dans ce sujet"*. [Corry

Stellt man die Frage, wer erstmals von exakten Sequenzen sprach, so muß man präzisieren, ob es um erstmalige Verwendung des Terminus oder des Inhalts geht. Zur erstmaligen Verwendung des *Inhalts* ist zu sagen, daß zumindest kurze exakte Sequenzen (in Gestalt von Faktorgruppen) zweifellos schon von den Anfängen der modernen Algebra an ein Thema waren; in unserem Zusammenhang hatten wir ein Beispiel bei [Eilenberg und Mac Lane 1942a] kennengelernt (2.2.4). Eine lange exakte Sequenz tritt (mit der Pfeilschreibweise, aber ohne die Bezeichnung exakte Sequenz) bei [Hurewicz 1941] auf; weitere solche Sequenzen findet man dem Inhalte nach (aber ohne die Schreibweise) in [Fox 1943] (vgl. 2.4.3.1). In beiden Fällen geht es um Homologiesequenzen.

Zum Ursprung der *Bezeichnung* gibt [Mac Lane 1978, 86] an, das Wort exakt sei von Eilenberg und Steenrod gewählt worden (während sie [1952] schrieben). Die Sprechweise "exakte Sequenz" wurde allerdings schon anderswo verwendet, bevor [Eilenberg und Steenrod 1952] herauskam: in [Kelley und Pitcher 1947, 687]. Deren Hauptanwendung ist eine exakte Homologiesequenz für einen abstrakten Kettenkomplex M mit Subkomplex N und Quotientenkomplex M/N. Die Komplexe gehen hier noch aus geometrischen Konstruktionen hervor; dennoch läßt sich die Perspektive der späteren homologischen Algebra schon hindurchspüren.

Historisch von Interesse ist auch eine Diskussion Bourbakis über den Begriff exakte Sequenz, die ich bei 6.3.3.2 näher darstelle.

3.1.2 Die Ziele des Buches von 1956

Es geht in [Cartan und Eilenberg 1956][157] um die Entwicklung eines allgemeinen Formalismus für (Co)Homologietheorien für algebraische Objekttypen nach dem Vorbild der vorhandenen (Co)Homologietheorien für die drei algebraischen Objekttypen Moduln für Gruppen, Lie-Algebren, assoziative Algebren[158]; die Anwendungen dieses

1996, 349] *"A detailed account of the rise of category theory should thus describe systematically the connections between the formulation of the central concepts of the theory and [exact sequences]"* — diese systematische Beschreibung bleibt bei Corry allerdings aus. Einige Informationen sind in [Shields 1987] enthalten; wie aus einem Brief an Eilenberg vom 09.10.1989 hervorgeht, wollte Donald Samson Shields' Text in diesem Punkt noch ergänzen — Shields war kurz zuvor verstorben. Es ist unklar, ob Samson dieses Vorhaben in die Tat umgesetzt hat.

[157]Es gab offenbar Verzögerungen bei der Publikation dieses Buches. Das Vorwort zu [1956] ist datiert mit *September, 1953;* ferner war Buchsbaums Dissertation (veröffentlicht als [Buchsbaum 1955]; vgl. 3.1.5.1) zum Zeitpunkt des Erscheinens von [1956] schon erschienen — und dennoch liest man in Buchsbaums Anhang zu [1956]: *"No proofs will be given here; they will be found in a separate publication"* (S.379), was ja darauf hindeutet, daß der Anhang schon vor dem Erscheinen von [Buchsbaum 1955] druckgelegt war. Auch in der Bibliographie von [Yoneda 1954, 193] wird das Buch von Cartan-Eilenberg als *to appear soon* aufgeführt. Jacques Dixmier hat mir mitgeteilt, daß niemand anderes als André Weil für die Verzögerung verantwortlich ist, da er abgelehnt habe, das Buch in einer damals von ihm betreuten Reihe herauszugeben, so daß erst ein neuer Verlag gefunden werden mußte; vgl. hierzu 6.3.3.2. Cartan übergeht diese unrühmliche Episode weltmännisch, wenn er in [Bass et al. 1998] schreibt, er wisse nicht, wieso sich die Publikation verzögert habe.

[158]Die Originalarbeit für den Fall der Lie-Algebren ist [Chevalley und Eilenberg 1948], die für die assoziativen Algebren von Hochschild. Die historische Sekundärliteratur zur Cohomologie von abelschen Gruppen umfaßt [Mac Lane 1976a, 1978, 1979a] und [Brown 1982]; zu Lie-Algebren vgl.

Formalismus zielen vor allem auf die Algebra. Der Anfang des Vorworts dieses Buches sei aufgrund seiner großen strategischen Dichte hier in einiger Ausführlichkeit zitiert:

> During the last decade the methods of algebraic topology have invaded extensively the domain of pure algebra, and initiated a number of internal revolutions. The purpose of this book is to present a unified account of these developments and to lay the foundations of a full-fledged theory. #29
>
> The invasion of algebra has occurred on three fronts through the construction of cohomology theories for groups, Lie algebras, and associative algebras. The three subjects have been given independent but parallel developments. We present herein a single cohomology (and also a homology) theory which embodies all three; each is obtained from it by a suitable specialization.
>
> This unification process has all the usual advantages. One proof replaces three. In #30 addition an interplay takes place among the three specializations; each enriches the other two.
>
> The unified theory also [...] applies to situations not covered by the specializations. An important example is Hilbert's theorem concerning chains of syzygies in #31 a polynomial ring of n variables. We obtain his result (and various analogous new theorems) as a theorem of homology theory.
>
> The initial impetus which, in part, led us to these investigations was provided by [...] Künneth ['s study of] the relations of the homology groups of a product space to those of the two factors [in [Künneth 1923]]. He obtained results in the form of numerical relations among the Betti numbers and torsion coefficients. The problem was to strengthen these results by stating them in a group-invariant form. The first step is #32 to convert this problem into a purely algebraic one concerning the homology groups #33 of the tensor product of two (algebraic) complexes. The solution [...] involves not only the tensor product of the homology groups of the two complexes, but also a second product called their *torsion* product. The torsion product is a new operation derived from the tensor product. The point of departure was the discovery that #34 [this] process of deriving [...] could be generalized so as to apply to a wide class of functors. In particular, the process could be iterated and thus a sequence of functors could be obtained from a single functor. It was then observed that the resulting #35 sequence possessed the formal properties usually encountered in homology theory [1956, v].

Dieser Text soll offensichtlich dem Leser vermitteln, was in dem Buch erreicht wird in Verhältnis zu dem, was bereits vorher erreicht war; des weiteren geht es um den Weg, den die beiden Autoren gegangen sind, um zu ihrer Theorie zu gelangen.

Zentral erscheint mir die Feststellung, daß die entstehende *sequence of functors* sich formal verhält wie in der Homologietheorie. Daß nun also Homologiegruppen als Derivierte von Funktoren *definiert* werden, ist eine Umkehrung der Reihenfolge:

[Hess 1999, 761f].

Zuerst ging man von Homologiegruppen (topologischer Komplexe) aus und entdeckte bei deren Untersuchung das Torsionsprodukt, einen Spezialfall des Ableitungsprozesses; man isolierte diesen Prozess und setzte ihn an den Anfang; natürlich erhielt man als spezielles Resultat die üblichen Homologiegruppen (den ursprünglichen Ausgangspunkt) zurück. Solche Umkehrungen sind m.E. ein zentrales Motiv mathematischer Forschung im zwanzigsten Jahrhundert.

Das Problem, um das es Cartan und Eilenberg geht, ist, zu bestimmen, in welchem Maße ein gegebener Funktor die Exaktheit einer gegebenen Sequenz respektiert. Exaktheit ist eine algebraische Eigenschaft; es geht hier um die Übertragung von Methoden, die in der Topologie entwickelt wurden, in die Algebra.

Soll eine Homologietheorie im Sinne von Eilenberg-Steenrod entstehen, so ist zunächst dafür zu sorgen, daß die Axiome überhaupt einen Sinn im algebraischen *setting* haben. Beispielsweise wird ein rein algebraischer Begriff der Kettenhomotopie eingeführt, bezüglich der dann die Homologie homotopieinvariant ist. Auf eine ähnliche Umdeutung der langen exakten Homlogiesequenz gehe ich in 3.4.1 ein.

3.1.3 Satelliten und Derivierte, oder das Zurücklassen eines intuitiven Konzepts

Im weiteren Verlauf des Vorworts, den ich hier nicht mehr wiedergebe, werden zwei Verfahren vorgestellt, um die erwünschte *sequence of functors* zu erhalten. *Satelliten* sind rekursiv definiert, *Derivierte* ein für alle mal. S.33 beginnt Kapitel III über *Satellites*, also die rekursive Variante der derivierten Funktoren. Es wird angemerkt, daß dieses Kapitel für den Rest des Buches nicht von Bedeutung ist; daß es dennoch lesenswert sei, wird unter anderem so begründet:

> #36 the reader will find it well worth his trouble to familiarize himself with the technique of proofs based on diagrams.

Es entsteht also der Eindruck, als sei das Kapitel über *Satellites* lediglich für Zwecke der Übung in Beweistechniken nützlich, nicht aber für die systematischen Entwicklungen des übrigen Buchs. Im Vorwort hingegen wird vermittelt, es sei gerade die *rekursive* Behandlung der Derivation (also die *satellites* anstelle der *derived functors*), von der sie selbst zur Entwicklung der Theorie ausgegangen sind (Handlungsschema: “Einen Kern oder Cokern an eine Sequenz hängen”). Und so läßt sich dem Lernenden der Sinn des Verfahrens auch am ehesten vermitteln: eine Sequenz “exakt *machen*”. Daß dies die Handlungsintuition ist, die dahinter steht und die man sich aneignen muß, um das Verfahren zu verstehen, erkennen Cartan und Eilenberg auch dadurch an, daß das Vorwort eben so aufgebaut ist, wie es aufgebaut ist[159]. Das Relevanzurteil über das *Satellites*-Kapitel kann sich also eigentlich nicht gegen die Bedeutung der grundlegenden Idee (der Konzipierung) richten — sondern nur gegen die Entwicklung dieser Idee in einem zwar naheliegenden, manipulativ aber

[159] Cartan teilt in [Bass et al. 1998] mit, sie hätten Steenrod gebeten, dieses Vorwort zu schreiben, aber das ändert sicher nichts daran, daß sie inhaltlich voll hinter dem Vorwort stehen.

nachteiligen Rahmen[160]. Womöglich kann nur der Zugang über die derivierten Funktoren, der die Zielsequenz ein für alle mal entwickelt, die erforderlichen Invarianzen (vgl. Anm.332) garantieren.

3.1.4 Die Entwicklung des Verfahrens

Das Vorgehen beruht auf einigen wichtigen Begriffen und Resultaten.

Grundlegende Voraussetzung der Anwendbarkeit der Homologietheorie auf das Exaktheitsproblem ist der auf W.Mayer zurückgehende Begriff des abstrakten Kettenkomplexes (vgl. 5.1.2) — denn erst dank dieses Begriffs ist die Übertragung der in der Topologie entwickelten Homologiemethoden in die Algebra überhaupt möglich. Die homologische Algebra von Cartan-Eilenberg beruht auf der Einsicht, daß ein (Co)Homologiemodul zu einem Modul mit einem Endomorphismus d mit $dd = 0$ gehört und es irrelevant ist, ob dieser Endomorphismus seinen Ursprung in topologischen Fragestellungen hat (wie es in der algebraischen Topologie der Fall ist) oder nicht. Diese Einsicht dürfte erstmals im Zusammenhang mit Gruppencohomologie aufgekommen sein (nahegelegt durch die Zerlegung des Berechnungsverfahrens für (Co)Homologietheorien in Einzelschritte nach Eilenberg-Steenrod, vgl. 2.5); sie wurde entscheidend für die Anwendung von homologischer Algebra in der Garbentheorie, vgl. 3.4.1.

Ein spezieller Typ von Kettenkomplexen, die sogar exakte Sequenzen sind, sind die sogenannten Auflösungen. Zentral für das Vorhaben von Cartan und Eilenberg ist das Resultat, daß jeder Modul A injektive und projektive Auflösungen hat[161]. Der Beweis für den projektiven Fall verwendet recht einfache Mittel: F_A bezeichnet den freien Modul zur Basis A, wobei A selbst Modul ist; sie betrachten sodann (S.5) den Homomorphismus $F_A \to A$. Dieser Homomorphismus geht vermöge der universellen Eigenschaft des freien Moduls aus der Identität $A \to A$ hervor. Cartan und Eilenberg interessieren sich dann für die exakte Sequenz

$$0 \to R_A \to F_A \to A \to 0;$$

[160]Ganz ähnliches trifft man bei der Zariski-Topologie, vgl. Abschnitt 4.1.2.1.

[161]Ein Modul Q heißt injektiv, wenn man für Moduln $A' \subset A$ Modulhomomorphismen von A' nach Q zu solchen von A nach Q erweitern kann. Dual heißt ein Modul P projektiv, wenn man für jeden Modul A einen Modulhomomorphismus von P nach einem Quotienten A'' von A zu einem Modulhomomorphismus von P nach A erweitern kann [1956, 6ff]. Eine projektive Auflösung eines Moduls A ist eine exakte Sequenz $\cdots \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$, so daß alle X_n projektiv sind; eine injektive Auflösung ist dual definiert [1956, 75ff]. Ich gehe hier nicht ausführlich auf die Geschichte der beiden Begriffe ein; Cartan und Eilenberg machen nur Angaben zum Begriff injektiv:

> Injective modules (under a different terminology) were considered by [[Baer 1940]] who with minor variants has proved [the ideal-theoretic necessary and sufficient condition for being injective and the theorem that every module is a submodule of an injective module] [1956, 10]

Bei [Weibel 1999, 816] liest man, der Begriff des projektiven Moduls sei von Cartan und Eilenberg in ihrem Buch eingeführt worden.

(wobei R_A also den Kern von $F_A \to A$ bezeichnet). Dieser Sequenz bedienen sie sich auf S.7, um zu zeigen, daß ein Modul projektiv ist genau dann, wenn er direkter Summand eines freien Moduls ist. Mit diesem *Theorem 2.2* können sie dann zeigen, daß jeder Modul Quotient eines projektiven Moduls ist (sie brauchen nur die obige Sequenz zu nehmen, denn nach dem *Theorem 2.2* ist insbesondere ein freier Modul selbst projektiv). Durch sukzessive Anwendung dieses zweiten Satzes zeigen sie auf S.77, daß jeder Modul eine projektive Auflösung hat[162]. Der Beweis für den injektiven Fall verläuft interessanterweise *nicht* völlig parallel ("dual").

Die Bedeutung des Vorhandenseins "genügend" injektiver bzw. projektiver Objekte für das Starten des Prozesses der derivierten Funktoren wird in [1956, 82] klar. Wendet man den gegebenen Funktor auf die gegebene Auflösung eines Moduls an, so messen die Homologiegruppen des entstehenden Kettenkomplexes offenbar die Exaktheit des Funktors angewendet auf die gegebenene Auflösung. Das nächste wichtige Resultat ist nun, daß die Homologiegruppen nicht von der Auflösung abhängen, sondern nur vom Ausgangsmodul A (und eventuell weiteren Argumenten des Funktors); man kann also die Zuweisung dieser Gruppen als Objektfunktion eines Funktors (des derivierten Funktors) auf der Kategorie der Moduln auffassen. Das dritte Resultat betrifft nun die Anwendung des gegebenen Funktors T auf beliebige exakte Sequenzen, die nicht notwendig Auflösungen von A sind: Die Homologiegruppen des entstehenden Komplexes lassen sich aus den Werten des derivierten Funktors ableiten. Der Begriff des derivierten Funktors leistet also tatsächlich das Gewünschte: mit seiner Hilfe kann man bestimmen, in welchem Maße ein gegebener Funktor die Exaktheit einer gegebenen Sequenz respektiert.

In die beiden letztgenannten Resultate geht nicht explizit Modultheorie ein; ihr Beweis läßt sich ungeändert für beliebige abelsche Kategorien (s.u.) mit eventuellen Zusatzeigenschaften (nämlich der Existenz von "genügend" injektiven bzw. projektiven Objekten) führen.

Wendet man nun das beschriebene Derivationsverfahren auf den Funktor Hom an, stellt sich heraus, daß Ext der erste derivierte Funktor ist.

Die Anwendung von Kategorientheorie scheint hier auf den ersten Blick marginal zu sein, da man es immer mit Kategorien von Moduln zu tun hat. Dieser Eindruck ist allerdings irreführend, da, wie schon die Ubiquität des Begriffs ◁Funktor▷ und des Akzents auf funktoriellen (d.i. natürlichen) Konstruktionen nahelegen, die wenigsten Argumente überhaupt davon abhängen, daß man es mit Moduln zu tun hat; ein Großteil der Argumente läßt sich ebensogut in einem allgemeineren Kontext, dem der abelschen Kategorien, durchführen. Der Begriff des derivierten Funktors erlaubt es, einen allgemeinen Prozeß zu *beschreiben*, nach dem die Definition von Homologiegruppen zu gegebenen algebraischen Objekten ablaufen kann.

[162] Wie in Anm.123 näher erläutert, bedienten sich Eilenberg-Mac Lane in [1942a] noch freier Auflösungen, deren Existenz von bestimmten Eigenschaften des Grundrings abhängt.

3.1.5 Buchsbaum 1955

3.1.5.1 Der Begriff der exakten Kategorie

Es war die Aufgabe der Dissertation von David Buchsbaum unter Eilenberg, jenen (gegenüber Moduln) allgemeineren Kontext für das Verfahren aus [Cartan und Eilenberg 1956] herzustellen. Buchsbaums Ergebnisse sind zum einen in der publizierten Fassung seiner Dissertation [1955], zum anderen in einem von ihm verfaßten Anhang zu [Cartan und Eilenberg 1956] (S.379-386) niedergelegt[163].

Buchsbaum hält, über Cartan und Eilenberg hinausgehend, fest, daß der Derivationsprozeß bereits dann durchführbar ist, wenn es sich um Objekte eines Typs von Kategorien handelt, die einige wichtige Eigenschaften mit einer Kategorie von Moduln gemeinsam haben. Er bezeichnet solche Kategorien noch nicht, wie später (seit Grothendieck) üblich, als *abelian categories*, sondern als *exact categories*; dieser Begriff ist allerdings zu Grothendiecks Begriff der abelschen Kategorie äquivalent[164]. Ähnlich wie die Kategorientheorie als ein allgemeiner Rahmen für die Rede über die Kommutativität von Diagrammen angelegt war, ist die Theorie der exakten bzw. abelschen Kategorien ein solcher Rahmen für die Rede über die Exaktheit von Sequenzen.

3.1.5.2 Buchsbaums Leistung: Dualität

Buchsbaums Arbeit schließt an [Mac Lane 1950] an, denn sein primäres Ziel ist offenbar[165], die latente Dualität in [Cartan und Eilenberg 1956] explizit zu machen. Zu dieser latenten Dualität äußern sich Cartan und Eilenberg selbst:

> In this chapter we present all the algebraic tools of homology theory [...]. The treatment here differs from the standard one in that great care is taken to maintain all symmetries and thus keep the system self-dual at all times. [...] The reader will have ample opportunities to convince himself that the preservation of this kind of a duality is indispensable. [Cartan und Eilenberg 1956, 53]

[163]Zur Chronologie dieser beiden Texte vgl. Anm.157.

[164]Bereits [Mac Lane 1950] definiert einen Begriff *abelian category*; Mac Lanes Begriff ist aber nicht äquivalent zu dem später üblichen. Da mithin Buchsbaums exakte Kategorien nicht das gleiche sind wie Mac Lanes *abelian categories*, ist es auch nicht verwunderlich, daß Buchsbaum, der sich explizit auf Mac Lanes Arbeit bezieht, für den neuen Begriff eine eigene Terminologie entwickelt — eben zur Unterscheidung von Mac Lanes anders definierten *abelian categories*. Grothendieck entwickelte seine Theorie zunächst ohne Kenntnis der Arbeiten von Mac Lane und Buchsbaum (vgl. 3.3.2), so daß es wiederum nicht verwundert, daß er eine bereits vergebene Terminologie gewählt hat; ursprünglich sprach er sogar von "classes abéliennes" (vgl. 3.3.2.2).

Mac Lane äußert sich später mehrfach zu seiner mißlungenen Definition, etwa bei [1988a, 359] oder [1976b, 136]. Ich gehe nicht näher ein auf dieses *"clumsy prelude to the development of Abelian categories"* [1971b, 205]; vgl. [Corry 1996, 363ff]. Interessant sind zwei Dinge: dieser erste Definitionsversuch kam nicht von der Motivation her, die Derivation von Funktoren in andere Kontexte zu übertragen (sondern von Dualitätsbetrachtungen), und: er mißlang, insofern ein zu starres Identifikationskriterium verwendet wurde; vgl. dazu Abschnitt 5.3.1.5.

[165]Vgl. den Aufbau seines Anhangs zu [Cartan und Eilenberg 1956] von der Unternehmung her, die Wiederholung dualer Argumentationen vermeiden zu können.

Gleichwohl bleiben Cartan und Eilenberg genötigt, Rechts- und Linksderivierte jeweils getrennt zu behandeln und hierbei noch die verschiedenen möglichen Varianzen der Funktoren zu berücksichtigen (vgl. auch 3.3.3.3).

In Buchsbaums Lösung der Dualitätsfrage greifen zwei Begriffe ineinander: der der dualen Kategorie (die Buchsbaum bei vorgelegter Kategorie $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}^*$ bezeichnet) und der der exakten Kategorie. Die Definition von ◁duale Kategorie▷ steht bereits bei [Eilenberg und Mac Lane 1945, 259]. Diese Definition war also *nicht* der Fortschritt, den Buchsbaum[166] gegenüber [Cartan und Eilenberg 1956] erreichte und der Mac Lane in Bezug auf [Eilenberg und Steenrod 1952] fehlte. ◁Duale Kategorie▷ erlaubt auch nur, den *Dualisierungsprozeß* explizit zu machen, d.h. zu erklären, wie man von einer Aussage zu ihrer dualen Aussage kommt (Stichwort: Pfeile herumdrehen); um duale Argumentationen vermeiden zu können, muß noch ein *Dualitätsprinzip* hinzukommen, d.h. ein Metatheorem, das aufzeigt, unter welchen Umständen mit einer Aussage auch ihre duale Aussage *gültig* ist.

Das von Buchsbaum vorgelegte Dualitätsprinzip hängt mit seinem Begriff der exakten Kategorie zusammen; es lautet nämlich: Mit $\mathcal{A}$ ist auch $\mathcal{A}^*$ exakt [Cartan und Eilenberg 1956, 381]. Mit diesem Satz kann Buchsbaum das Dualitätsproblem bei [Cartan und Eilenberg 1956] und [Eilenberg und Steenrod 1952] lösen.

Im einzelnen erarbeitet Buchsbaum folgende Ergebnisse:

- *"In treating derived functors, it suffices to consider left derived functors of a covariant functor of several variables; all other types needed may then be obtained by a dualization process"* [Buchsbaum 1955, 1]; natürlich sorgt das Dualitätsprinzip dafür, daß auf diesem Wege tatsächlich wahre Aussagen zu derivierten Funktoren zustandekommen.

- *"The axiomatic homology and cohomology theories of [[Eilenberg und Steenrod 1952]] may be defined using an arbitrary exact category $\mathcal{A}$ as the range of values of the theory. Thus, replacing $\mathcal{A}$ by $\mathcal{A}^*$ replaces a homology theory by a cohomology theory, and vice versa"* [Cartan und Eilenberg 1956, 385]. Diese konzeptuelle Klärung des Zusammenhangs von Homologie- und Cohomologietheorien scheint das Ziel von [Mac Lane 1950] gewesen zu sein; somit war Mac Lane wohl auch auf den Begriff der abelschen Kategorie aus im Blick auf die Dienste, die er Buchsbaum in dieser Frage tatsächlich leistete. Da er allerdings nicht den richtigen Begriff von exakt hatte (3.1.5.1), gelang es ihm nicht.

- *"The Pontrjagin duality for discrete and compact abelian groups readily shows that the category $\mathcal{C}$ of compact abelian groups is the dual of the category $\mathcal{M}$ of discrete abelian groups. Thus we conclude that $\mathcal{C}$ satisfies Axioms V, VI and VI*. In fact, the injectives are the toroids [...] and the projectives in $\mathcal{C}$ are those compact groups whose character groups are divisible"* [Cartan und Eilenberg 1956, 386]. Die genannten Axiome betreffen die Existenz von (endlichen)

[166] In Bourbakis Wahrnehmung geht der Begriff der dualen Kategorie auf Buchsbaum zurück; vgl. *Tribu 43* in der Besprechung zu *n°279* S.1. Eilenberg war beim Kongreß *43* (1957.1) nicht anwesend (konnte dies also nicht richtigstellen); der Autor von *n°279* war Cartan (vgl. 6.4.2).

> direkten Summen und von (genügend) projektiven und injektiven Objekten. Was Buchsbaum neben seinem Dualitätsprinzip ausnutzt, ist, daß die zusätzlichen Axiome zueinander dual sind (V ist sogar selbstdual).

Im Grunde hält Buchsbaum hier weitere Dualitätsprinzipien fest: Die Aussage $<\mathcal{A}$ *is the range of values of a homology theory*$>$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage $<\mathcal{A}^*$ *is the range of values of a cohomology theory*$>$ wahr ist; die Aussage $<\mathcal{A}$ *is an exact category satisfying axioms V, VI and VI*$^*>$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage $<\mathcal{A}^*$ *is an exact category satisfying axioms V, VI and VI*$^*>$ wahr ist. Solche "Dualitätsprinzipien für spezielle Begriffe" verwenden also den Begriff der dualen Kategorie zur Vergrößerung der Reichweite der Begriffe.

Buchsbaum begründet, wieso seine Dualitätstheorie im *setting* von [Cartan und Eilenberg 1956] (wo nur Kategorien von Moduln betrachtet werden) nicht erreicht wurde.

> In [the] category [of all left Λ-modules $\mathcal{M}_\Lambda$], $H(A,B) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$. However, the dual category $\mathcal{M}^*_\Lambda$ admits no such concrete interpretation. This explains the fact that the duality principle could not be efficiently used, as long as we were restricted to categories concretely defined, in which the objects were sets and the maps were maps of those sets. [S.382]

Mit $H(A,B)$ ist die Konstruktion des Homologiefunktors gemäß [Cartan und Eilenberg 1956] gemeint. Im letzten Nebensatz wird der Fortschritt durch den Begriff $\lhd$duale Kategorie$\rhd$ deutlich: die dualen Kategorien sind keine solchen konkreten Kategorien ("Standardkategorien"; 5.3.3.2). Dies ist also der Sinn, in dem Buchsbaums Theorie über Kategorien von Moduln hinausgeht (obgleich die *Objekte* weiterhin Moduln sind — nicht aber die Pfeile Modulhomomorphismen). Hier besteht ein deutlicher Unterschied zu Grothendiecks Theorie, der es hauptsächlich um Garbenkategorien geht (vgl. die verbleibenden Abschnitte des vorliegenden Kapitels).

"Lohnt" sich Buchsbaums Unternehmung? In 3.3.3.3 wird dargestellt, daß Buchsbaums Dualitätstheorie auf den Umgang mit projektiven und injektiven Auflösungen nur recht eingeschränkte Auswirkungen hat. Wie dem auch sei: Für Buchsbaum war Dualität ein zentrales Thema (und nicht Garben). Seine explizite Nichtbehandlung von Garben (vgl. 3.3.3.2) macht insofern auch Sinn im Blick auf die Einheitlichkeit seiner Untersuchung; die damit getroffene Relevanzentscheidung stellt sich aus heutiger (von der Grothendieck-*community* geprägter) Sicht als unglücklich dar (hierzu ausführlicher 3.4.2). Buchsbaums Errungenschaft mag aus dieser Sicht nahezu trivial sein[167], belegt aber für den Historiker die herausragende Bedeutung der "Nonstandardkategorien" (vgl. 5.3.3.2) für die konzeptuelle Klärung.

---

[167] *"les axiomes [...] sont de toute évidence « auto-duals »"* [Godement 1958, 16]; *"tu pourrais t'appuyer sur Buchsbaum pour tout ce qui concerne les choses triviales sur les [catégories abéliennes]"* (Brief von Serre an Grothendieck; vgl. ⟨#56 S.123⟩).

3.2 Entwicklungsschritte des Konzepts Garbe bis 1957

Alexander Grothendieck hat in seiner berühmten Arbeit [1957] Kategorientheorie benutzt, um einen wichtigen methodischen Fortschritt in der homologischen Algebra zu erzielen, nämlich eine Übertragung der Verfahren aus [Cartan und Eilenberg 1956] auf die Garbentheorie.

Als Prägarbe bezeichnet man heute üblicherweise einen kovarianten Funktor $F : \mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$; hierbei bezeichnen X einen topologischen Raum, $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ das partiell geordnete System der offenen Mengen von X aufgefaßt als Kategorie und $\mathcal{C}$ eine zunächst nicht weiter spezifizierte Kategorie[168]. Erfüllen die $F(U)$ bestimmte Verträglichkeitsbedingungen ("Garbenbedingungen", vgl. 3.3.3.1), so spricht man von einer Garbe. Der Inhalt dieser Bedingungen hängt zusammen mit dem, was Gray als die hauptsächliche Aufgabe des Begriffs Garbe darstellt: *"in algebraic topology, [the local/global] dichotomy was not so evident until Cartan clarified it and provided the major tool — cohomology with coefficients in a sheaf — which ever since has mediated the passage from local to global"* [1979, 1]. In eine ähnliche Richtung geht die Aussage von Godement, die Hauptaufgabe der Garbentheorie sei *le prolongement [. . .] des sections* [1958, ii]; zum Begriff der *section* (dt. Schnitt) vgl. 3.2.2.2. Hierzu gibt Gray genauere Hinweise (die verwendeten technischen Begriffe tun jetzt noch nichts zur Sache, werden aber großteils im Laufe des vorliegenden Kapitels klar):

> [Leray's] use of fine couvertures [in [1949]] is one of the central ideas of sheaf theory. There were subsequently many related notions; for instance, homotopically fine in [SC 50/51], flasque [. . .] and mou [. . .] in [[Godement 1958]], and ultimately injective in [[Grothendieck 1957]]. All of them are concerned with what was regarded as the main concern of sheaf theory — that of extending partial sections to global sections. Their original use was the same as their later use: to construct resolutions of the sheaves in which one is interested by homologically trivial sheaves. Isomorphism theorems and duality theorems usually were proved by showing that some known resolutions were fine, flasque, or mou, etc. [1979, 6]

Die Aufgabe spezieller Klassen von Garben, die Gray benennt — *"construct resolutions of the sheaves in which one is interested by homologically trivial sheaves"* —, deutet bereits darauf hin, daß eine Analogie besteht zwischen der homologischen Algebra von Cartan-Eilenberg und der Garbencohomologie. Grothendieck formuliert dies explizit:

#37
> Ce travail a son origine dans une tentative d'exploiter l'analogie formelle entre la théorie de la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau [. . .] et la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules. [Grothendieck 1957, 119]

[168]In einer Weiterentwicklung des Konzepts wird die Ausgangskategorie $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ durch eine Kategorie allgemeineren Typs (Situs) ersetzt, vgl. 4.1.2.2.

Buchsbaum greift diese Formulierung am Beginn seines *Reviews*[169] von [Grothendieck 1957] auf: *"The formal analogy between the cohomology theory of a space with coefficients in a sheaf, and the derived functors of functors of modules has been apparent for some time."* Buchsbaum weist also darauf hin, daß die Beobachtung der Analogie, die Grothendiecks gerade benanntem Vorhaben zugrundeliegt, an sich nicht neu ist (wir werden weiter unten — 3.3.3.2 — noch sehen, daß Buchsbaum selbst in seiner Doktorarbeit zumindest in gewissem Maße diese Analogie im Hinterkopf hatte, was er mit seiner Formulierung im *Review* letztlich unterstreicht).

Will man verstehen, welche Aufgabe die KT im Zusammenhang der Garbencohomologie übernommen hat, so sollte man sich — da es Grothendiecks erklärtes Ziel ist, die besagte formale Analogie auszubeuten — offenbar damit auseinandersetzen, worin im Vorfeld Grothendiecks diese Analogie im einzelnen zum Ausdruck kommt und inwiefern kategorientheoretische Konzepte dabei helfen, sie "auszubeuten". Eine Analogie zwischen dem Verfahren des *Séminaire Cartan* und dem Cartan-Eilenberg-Verfahren wird in Abschnitt 3.2.2.3 besprochen. Eine Übertragung des zweitgenannten Verfahrens auf die Garbentheorie wird nahegelegt durch den Akzent auf der abelschen Variable der Cohomologie; vgl. dazu ausführlich 3.4.1. Die Verbindung wird hergestellt durch die Beobachtung, daß die Frage nach der Fortsetzbarkeit von Schnitten aufgefaßt werden kann als die Frage nach dem Verhalten eines Funktors auf einer exakten Sequenz von Garben.

Die folgenden Darstellungen der Arbeiten von Leray, Cartan und Serre haben hauptsächlich die Aufgabe, diese Auseinandersetzung zu ermöglichen, und sind nicht als eigenständige historische Untersuchungen dieser Arbeiten angelegt[170]; insbesondere gehe ich auf die jeweiligen eigenen Motivationen dieser Arbeiten nur ausnahmsweise ein.

[169] Es liegt nahe, anzunehmen, daß er auf Vorschlag von Eilenberg mit diesem *Review* betraut wurde. Eilenbergs Möglichkeiten, solche Entscheidungen zu beeinflussen, waren seit dem analogen Vorgang bei [Eilenberg und Mac Lane 1945] (vgl. 2.4.1) zweifellos noch gewachsen, und im Blick auf Grothendiecks widerstrebende Haltung gegenüber Eilenbergs Änderungswünschen (von diesem im Interesse Buchsbaums vorgebracht, vgl. 3.3.1.3) war Eilenberg sicher daran gelegen, Buchsbaum auf diesem Wege die Möglichkeit einer Reaktion zu geben.

[170] Dazu liegen bereits eine ganze Reihe von Untersuchungen vor (allen voran [Gray 1979]), auf die ich mich weitgehend stütze.

3.2.1 Leray: (Prä)Garben als Koeffizientensysteme für algebraische Topologie

3.2.1.1 Lerays Arbeiten von 1946

Zu Lerays Einführung[171] des Begriffes *faisceau* gibt es einige Sekundärliteratur[172]; daher kann hier auf eine eigene Darstellung verzichtet werden. Festzuhalten ist, daß Lerays Definition von *faisceau* von der heutigen in manchen Punkten abweicht:

- anstelle offener Mengen nimmt Leray abgeschlossene Mengen;
- es fehlen die Garbenbedingungen; Leray definiert also Prägarben im heutigen Sinn des Wortes. Allerdings scheint die Spezialisierung *faisceau normal* dem Inhalte nach in die Richtung des späteren Begriffs Garbe zu gehen[173].

Das Ziel Lerays in [1946a] ist das Studium der Topologie einer Abbildung (*représentation*) zwischen topologischen Räumen[174].

> Nous nous proposons d'indiquer sommairement comment les méthodes par lesquelles nous avons étudié la topologie d'un espace [[1945]] peuvent être adaptées à l'étude de la topologie d'une représentation [1946a, 1366].

Gemeint ist damit, die (Co)Homologie von Faserräumen zu ermitteln; die Rolle von *faisceaux* in diesem Problemkreis benennt Houzel:

> L'étude des relations entre l'homologie d'un espace fibré et celles de sa base et de sa fibre rendait nécessaire l'introduction de nouveaux outils : cohomologie à coefficients locaux, variant d'un point à l'autre ; calcul de la cohomologie par une suite d'approximations. Plus généralement, ces outils dévraient servir, dans le cas d'une application continue $\xi : X \to Y$, a étudier la cohomologie de X à partir de celles de Y et des fibres de ξ. [Houzel 1990, 9]

[171] Bereits Camille Jordan verwendete die Bezeichnung *"faisceau"* in seiner Arbeit [1877, 97]; dort scheint nicht definiert zu werden, was damit gemeint sein soll. Allerdings hat [Müller 1947] eine moderne Fassung von Jordans *"faisceau"* vorgelegt; wie der Titel von Müllers Arbeit nahelegt, geht es hierbei um ein gruppentheoretisches Konzept; aus dem Zentralblatt-*Review* zu [Müller 1947], Zbl.034.16302, geht klar hervor, daß das Konzept von Jordan-Müller in keinem ersichtlichen Zusammenhang zum LeraySchen Konzept steht.

[172] [Houzel 1990;1998] und [Kantor 2000] (dort insbesondere [Miller 2000]).

[173] Dies liegt nahe, da [Gray 1979, 6] in seiner Darstellung von [Leray 1949] schreibt *"[a sheaf] is called continuous (instead of the earlier term normal) if $B(F) = \lim B(V)$, the limit denoting the direct limit over all closed neighbourhoods V of F"*. Dies entspricht der Situation bei der Garbifizierung (vgl. 3.3.3.1); ob es inhaltlich tatsächlich mit der vorherigen Rede von *normal* übereinstimmt, wäre zu prüfen (Leray spricht 1946 nicht von Limites).

[174] Lerays Ziel ist also ähnlich wie bei Hopf (2.1.2) das Studium der Topologie von Abbildungen; es geht ihm um andere Typen von Abbildungen als Hopf (Stichwort Faserungen), doch die Strategien sind sich nicht völlig unähnlich. In jedem Fall sind Lerays Aktivitäten der algebraischen Topologie und nicht der homologischen Algebra zuzuordnen; ich bespreche sie gleichwohl im vorliegenden Kapitel, weil sie nachträglich, in ihrem Effekt, zur Vorgeschichte von Grothendiecks Ausdehnung der homologischen Algebra wurden.

> Leray introduit la notion de faisceau pour relier entre elles les cohomologies des fibres : au lieu de considérer seulement les fibres $\pi^{-1}(x^*)$ $(x^* \in E^*)$ et leur cohomologie, il considère les fermés F^* de E^*, leurs images reciproques $\pi^{-1}(F^*)$ et la cohomologie de ces images réciproques. [Houzel 1998, 37]

Die Anwendungen von Lerays Konzepten auf Faserräume finden sich bei [1946c;1946b]; In [1946b, 395f] erreicht Leray z.B. eine *extension du théorème de dualité de H. Poincaré à la projection π d'un espace fibré E sur sa base E^**. Außerdem bringt er in [1946d] Anwendungen auf homogene Räume. Zusammengefaßt: Leray entwickelt seine Konzepte also für Anwendungen in der algebraischen Topologie.

3.2.1.2 Zur Wahrnehmung dieser Arbeiten außerhalb Frankreichs

Diese Wahrnehmung scheint bislang noch nicht historisch untersucht worden zu sein. Im vorliegenden Zusammenhang ist insbesondere die Wahrnehmung dieser Arbeiten in Eilenbergs *Reviews* von Interesse. Hier sein *Review* zu [Leray 1946a; 1946c] *in extenso*:

> A "bundle" of groups in a topological space X is a function which with every closed subset F of X associates a group B_F and with every inclusion $F' \subset F$ a homomorphism $B_F \to B_{F'}$ subject to the usual transitivity condition. Moreover, B_F should be the trivial group if F is vacuous. A bundle of groups can be used as a coefficient system for homology and cohomology in the space X. Let $f\colon X \to Y$ be a continuous map and let p, q be integers. For each closed set $F \subset Y$, B_F is defined as the pth cohomology group of $f^{-1}(F)$ with coefficients in a ring A. This gives a bundle of groups in Y with respect to which the qth cohomology group is constructed. The resulting group is called the (p, q)-module of f over A.
>
> The second paper enters in more detail into the structure of this new group and states without proofs a number of applications.

Es fallen eine ganze Reihe von Dingen auf:

- Zunächst wirkt der *Review* durch seine Kürze auffallend desinteressiert. Insbesondere die von Leray aufgezeigte Überschneidung mit der Arbeit [Steenrod 1943] kommentiert Eilenberg nicht, obgleich diese Arbeit ihm vertraut war (er hat auch deren *Review* geschrieben). Er geht auch nicht näher auf die Anwendungen Lerays ein, wodurch der *Review* eigentlich ziemlich unbrauchbar wird — da man ihn ja liest, um zu wissen, was in der besprochenen Arbeit an Resultaten erreicht wird.

- Eilenberg weicht an bestimmten Punkten von Lerays Text ab:

  - Leray spricht nicht über *bundles* von Gruppen, sondern von Moduln oder Ringen;

  - Leray beabsichtigt nicht, ein *bundle of groups* als ein *coefficient system for homology* zu benutzen (sondern nur für *cohomology*);

– Leray betrachtet nicht stetige, sondern abgeschlossene stetige Abbildungen.

- Eilenberg gibt Lerays Symbolik nicht treu wieder, sondern substituiert eine eigene Symbolik:

Leray	E	F	f	$\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$	π	E^*	p	q	$\mathfrak{a}$
Eilenberg	X	F	F'	B_F	f	Y	p	q	A

  Es ist anzunehmen, daß Eilenberg das X (statt des französischen E für *espace*) im Blick auf die Verwendungstradition in seinem Kontext gesetzt hat; andererseits läßt er F für *fermé* und A für *anneau* stehen. Durch seine Änderung des f in F' wird die Lesbarkeit erleichtert, da der unbedarfte Leser bei f eher an eine Funktion denken wird (insbesondere der angelsächsische Leser). Man mag auch annehmen, daß es Eilenberg an einer Vereinheitlichung der Notation gelegen war, die damals, was die Symbolik der algebraischen Topologie betrifft, noch nicht eingesetzt hatte (vgl. dagegen die Einmütigkeit bei den ganzen Zahlen p, q). Leray verwendet übrigens keinen Pfeil.

- Eilenberg übersetzt *faisceau* mit *bundle*. Die Übersetzung *sheaf* war also nicht von Anfang an üblich; Eilenberg dachte wohl an eine Analogie zu *fiber bundle*?

- Eilenberg erwähnt nicht, daß es sich bei *faisceaux* im Grunde um Funktoren handelt (daß Eilenberg von *usual transitivity condition* spricht, ist wohl von der Parallele zu den bei Mannigfaltigkeiten schon lange gebräuchlichen Karten her zu verstehen). Hielt Eilenberg einen solchen Hinweis auf seine eigenen Arbeiten nicht für angebracht (zu viel Bescheidenheit)? Es wäre doch eine gute Möglichkeit gewesen, das Funktorkonzept in französischen Kreisen bekannter zu machen? Zu dieser Frage kehre ich in 3.4.2 zurück.

Ebenfalls zögerlich war die Wahrnehmung des Garbenbegriffs in der deutschen *community* (komplexe Geometrie; Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher). Noch 1954 auf dem ICM Amsterdam hält Hirzebruch einen Vortrag mit dem Titel "Der Satz von Riemann-Roch in *faisceau*-theoretischer Formulierung". Es gab also zu diesem Zeitpunkt noch keine gängige deutsche Übersetzung von *faisceau*; vgl. auch Hirzebruchs Anmerkung zu diesem Punkt in [1956, 1]. Die Arbeiten Hirzebruchs zu diesem Problemkreis sind übrigens von großer Bedeutung für die spätere Arbeit von Borel-Serre (vgl. 3.3.3.5).

3.2.2 Das *Séminaire Cartan*

Henri Cartan hat ab der *année universitaire* 1948/49 in Paris ein *Séminaire de Topologie algébrique* abgehalten. Dieses Seminar ist in seinem ersten Jahr noch vornehmlich rezeptiv: einige Grundbegriffe der Theorie der Homologiegruppen — die simpliziale, singuläre und Čech-(Co)Homologietheorie — werden erarbeitet. Bei allen Theorien kommt den induzierten Homomorphismen große Aufmerksamkeit zu.

Interessant ist für die vorliegende Arbeit vor allem *exposé 10*, wo es um lokale Koeffizienten geht. Das Fundamentalgruppoid[175] wird mit dem Gruppoid der Isomorphismen zwischen den verschiedenen lokalen Koeffizientengruppen in Verbindung gebracht — erwartungsgemäß in funktorieller Weise (jedoch ohne die kategorielle Sprache explizit zu verwenden). Nachdem lokale Koeffizienten für singuläre und simpliziale (Co)homologie besprochen wurden, folgt auf S.10-08 eine Modifikation des Konzepts des lokalen Koeffizientensystems für eine Anwendung in der Čech-Theorie. Es handelt sich um eine Vorwegnahme des Prägarbenkonzepts (für offene Überdeckungen), wobei immer nur von Isomorphismen die Rede ist. In heutiger Sprache ausgedrückt, steht hier eine Definition einer Prägarbe für offene Überdeckungen, bei der alle Restriktionsabbildungen Isomorphismen sind (die also als Funktor in ein Gruppoid geht).

In SC 50/51 werden eigenständigere Beiträge geleistet (die nach heutigem Verständnis eher zur homologischen Algebra als zur algebraischen Topologie zählen). Hier spielt die Rezeption der axiomatischen Methode in der Homologietheorie nach [Eilenberg und Steenrod 1952] (vgl. 2.5) eine Rolle[176]. Z.B. gibt Eilenberg in den ersten beiden *Exposés* des SC 50/51 Axiome für Gruppencohomologie an — und führt den Existenzbeweis einer solchen Cohomologietheorie, indem zur Gruppe Π Kettenkomplexe C aus $\mathbb{Z}(\Pi)$-Moduln betrachtet werden, auf die der Funktor $\mathrm{Hom}_\Pi(C, A)$ (A ein weiterer solcher Modul) angewandt wird. In den *Exposés 5-7* trägt Serre über algebraische Anwendungen der Gruppencohomologie vor (einfache Algebren); hier besteht zweifellos eine Verbindung zu seinen Arbeiten in dieser Richtung[177]. Anschließend spricht Cartan über Spektralsequenzen und Garbencohomologie (vgl. hierzu ausführlich 3.2.2.3).

3.2.2.1 Garbentheorie in zwei Anläufen

Cartan hatte bereits einen Teil von SC 48/49 der Garbentheorie gewidmet. In der *2e édition multigraphiée, revue et corrigée* (1955) ist am Fuß der *Table de matières* zu lesen:

> Les exposés 12 à 17 (Théorie des faisceaux) n'ont pas été réédités. Voir à ce sujet le Séminaire Henri CARTAN, 3e année, 1950/51, où la théorie des faisceaux a fait l'objet d'une nouvelle rédaction mise à jour en 1951.

SC 50/51 *Exposé 14* beginnt:

> Le but de cet exposé et des suivants est de reprendre entièrement la théorie [. . .] qui a fait l'objet des exposés 12 à 17 du Séminaire 1948/49. Entre temps est paru [[Leray 1950]]. [. . .]

[175] Vgl. hierzu 5.1.6.3.

[176] natürlich nicht bezogen auf das Buch von 1952; die Methode war ja älter und konnte von Eilenberg, der im *Séminaire* anwesend war, dargestellt werden. [Gray 1979, 7] erweckt den Eindruck, daß eine Lektüre von [Cartan 1949] helfen kann, Cartans Wahrnehmung des Eilenberg-Steenrod-Ansatzes besser einschätzen zu können.

[177] [Serre 1950a], [1950b] (letztere Arbeit ist in ausführlicher Form Serres Dissertation [1951]), [Serre und Hochschild 1953], [Serre 1953b].

> N.B.—La terminologie s'écartera quelque peu de celle adoptée dans le Séminaire 1948/49. En particulier, le sens du mot "faisceau" a été modifié.

Die letztzitierte Passage wirkt so, als sei das Erscheinen von [Leray 1950] der Anlaß gewesen für ein Neuaufrollen der Theorie der (damit obsoleten) *exposés* von 1948/49. Die zuletzt erwähnte Änderung der Garbendefinition (auf die ich unten eingehe) ist allerdings nicht aus Lerays Arbeit übernommen — vgl. [Leray 1950, 43]; zudem weist Cartan ausdrücklich darauf hin, daß die neue Definition von Lazard stammt[178]. Insofern ist die Auseinandersetzung mit Lerays Arbeit für uns hier nicht so entscheidend (es geht hier ja um das Eingreifen der Kategorientheorie in die Garbendefinition)[179].

3.2.2.2 Die neue Garbendefinition: *espaces étalés*

> La définition qui suit est due, sous la forme "topologique" qui lui est donnée, à Lazard :
>
> *Définition :* soit K un anneau commutatif à élément-unité [...]. Un faisceau de K-modules sur un espace topologique (régulier) $\mathcal{X}$ est un ensemble F, muni d'une application p (dite "projection") de F sur $\mathcal{X}$ et des 2 structures suivantes :
>
> 1) pour chaque point $x \in \mathcal{X}$, l'image réciproque $p^{-1}(x) = F_x$ est munie d'une structure de K-module ;
>
> 2) F est muni d'une structure topologique (en général non séparée) satisfaisant aux deux conditions (α) les lois de composition de F (non partout définies) définies par la structure de K-module des F_x sont *continues* ; (β) la projection p est un *homéomorphisme local* (i.e. : tout élément de F possède un voisinage ouvert que p applique biunivoquement et bicontinûment sur un ouvert de $\mathcal{X}$). [14-01]

Cartan betrachtet als nächstes die Menge $\Gamma(F, X)$ der "Schnitte" von F über einer offenen Teilmenge $X \subset \mathcal{X}$ (also der stetigen Abbildungen $s : X \to F$ mit $p(s(x)) = x \ \forall x \in X$). Auf dieser Menge gibt es eine naheliegende Modulstruktur, und zu einer Inklusion einer offenen Menge X in eine andere offene Menge Y gehört ein Modulhomomorphismus $\Gamma(F, Y) \to \Gamma(F, X)$. Diese Konstruktion führt Cartan dazu, verschiedene Arten zu unterscheiden, auf die ein *faisceau* gegeben sein kann.

[178] Es wäre in diesem Zusammenhang natürlich interessant, welche Definition in den *exposés 12 à 17 du Séminaire 1948/49* verwendet wurde; das ist aufgrund der Tatsache, daß diese *exposés* bei der Neuherausgabe weggefallen sind, schwierig zu sagen. Ich bin nicht sicher, ob noch Exemplare des ursprünglichen Texts existieren; sie scheinen jedenfalls existiert zu haben: *"Le séminaire de 1948-49 contenait une prémière version de la théorie des faisceaux (exposés 12 à 17) qui a été rétirée de la circulation"* [Houzel 1990, 12].

[179] Vgl. hier auch Anm.183. Gleichzeitig bleibt die Frage bestehen, welchen Anlaß das Erscheinen von [Leray 1950] denn nun gegeben hat, die Theorie neu aufzurollen. Leray untersucht ausführlich bestimmte Spektralsequenzen (*anneaux spectraux*, ebd. S.19), insbesondere im Zusammenhang mit Garben (S.78ff); er spezialisiert sie *u.a.* auf den Fall $f : X \to Y$ (S.91). Ich will nicht eingehend darstellen, was unter einer Spektralsequenz zu verstehen ist, da dies einige Notation erfordert und für die vorliegende Arbeit nicht so entscheidend ist. In der homologischen Algebra dienen Spektralsequenzen insbesondere zum Berechnen von derivierten Funktoren zusammengesetzter Funktoren; vgl. dazu eingehend [Cartan und Eilenberg 1956, 315ff]. In der späteren Theorie der derivierten Kategorien (vgl. Anm.288) wird das Konzept des derivierten Funktors neu definiert, und an die Stelle der Spektralsequenzen treten allgemeinere Verfahren.

> 2. – *Modes de définition de faisceaux. Exemples.*
>
> [...] Pour chaque point $x \in \mathcal{X}$, le module F_x s'identifie évidemment à la limite inductive ("direct limit") des modules $\Gamma(F, X)$ relatifs aux ouverts X contenant x, munis des homomorphismes $\Gamma(F, Y) \to \Gamma(F, X)$ définis ci-dessus. Pour le voir, on considère l'homomorphisme évident $\Gamma(F, X) \to F_x$ (défini pour $x \in X$), qui est tel que si $x \in X \subset Y$, l'homomorphisme $\Gamma(F, Y) \to F_x$ est composé de $\Gamma(F, Y) \to \Gamma(F, X)$ et de $\Gamma(F, X) \to F_x$. [14-02]

Cartan führt also den Nachweis, daß F_x mit einer bestimmten Limeskonstruktion auf modultheoretischer Ebene identifiziert werden kann, indem er zeigt, daß F_x der selben universellen Eigenschaft genügt, durch die jene Limeskonstruktion charakterisiert ist. Cartan fährt fort:

> *Réciproquement :* supposons que l'on ait attaché, à chaque ouvert X d'un système fondamental d'ouverts de l'espace $\mathcal{X}$, un module F_X, et, à chaque couple (X, Y) d'ouverts tels que $Y \subset X$ et que F_Y et F_X soient définis, un homomorphisme f_{XY} de F_Y dans F_X, et cela de manière que, si $X \subset Y \subset Z$, l'homomorphisme f_{XZ} soit le composé $f_{XY} f_{YZ}$. Ces données définissent un faisceau F, comme suit [...]

In heutiger Sprache ausgedrückt, ist durch die F_X ein Funktor von der als Kategorie aufgefaßten Basis der Topologie in die Kategorie der Moduln gegeben; solche Funktoren wird Grothendieck als *préfaisceaux* (Prägarben) bezeichnen (3.3.3.1). Zur angekündigten Konstruktion des *faisceau* F zu den Moduln F_X stellt Cartan zunächst fest, daß die offenen Umgebungen X eines Punktes x nach Verfeinerung geordnet eine gerichtete Menge $\Phi(x)$ bilden; man kann also definieren[180]

$$F_x := \varinjlim_{X \in \Phi(x)} F_X;$$

F ist dann die disjunkte Vereinigung der F_x; p ist einfach gegeben durch $p(y) = x \ \forall y \in F_x$; die Definition der Topologie auf F übergehe ich (vgl. z.B. 14-03 oder [Grothendieck 1957, 154]; [Godement 1958, 111] bringt eine etwas abweichende Definition). Cartan weiter:

> Lorsqu'un faisceau F est défini par le moyen de modules F_X comme ci-dessus, on a un homomorphisme évident : $F_X \to \Gamma(F, X)$; c'est celui qui, à un élément v de F_X, associe l'ensemble de ses images dans les limites inductives F_x relatives aux points $x \in X$. [14-03]

Cartan bleibt hier stehen bei der Feststellung *"En général, cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme"* [14-03] (vgl. auch [Houzel 1990, 12], [Houzel 1998, 43]). Die "Garbenbedingungen", von denen in 3.3.3.1 die Rede sein wird, haben sich in der weiteren Analyse herausgestellt als diejenigen zusätzlichen Bedingungen an die Prägarbe F, für die sich gerade ein Isomorphismus ergibt (vgl. z.B. [Godement 1958, 109ff]).

---

[180] Vorausgesetzt, in der Zielkategorie von F existieren geeignete Limites, was in **Set** oder auch in der Kategorie der K-Moduln jedenfalls der Fall ist.

Was in Cartans Sichtweise noch nicht klar zu erkennen ist (aber in jenem Isomorphismus zum Ausdruck kommen wird), ist, daß durch die Mengen der Schnitte von p auf den verschiedenen X selbst eine Garbe (i.S.Grothendiecks) gegeben wird[181]. Bei weiterer Klärung der Begriffe stellt sich heraus, daß jede Garbe als Garbe der lokalen Schnitte eines *espace étalé*[182] gegeben ist; in vielen Beispielen tragen die Mengen der lokalen Schnitte eine (z.B. algebraische) Struktur (denn die Schnitte sind Funktionen).

In zweierlei Hinsicht deutet sich bereits hier die Perspektive der KT an. Zum einen ist bei Cartans Konstruktion des *espace étalé* die hauptsächlich ausgenutzte Eigenschaft des Limes-Begriffs die universelle Eigenschaft. Zum anderen hält Cartan sogleich fest, daß es zu Garben i.S. Lazards einen Begriff des Homomorphismus gibt:

> *Homomorphisme de faisceaux :* considérons deux faisceaux F et G sur *le même espace* $\mathcal{X}$ (un cas plus général sera envisagé plus loin). Un homomorphisme de F dans G est une application *continue* ϕ de F dans G, telle que, pour tout point x, la réstriction ϕ_x de ϕ à F_x soit un homomorphisme de F_x dans G_x. L'ensemble des homomorphismes de F dans G est évidemment muni d'une structure de K-module. [...] [14-04]

Dieser Homomorphismenbegriff fällt, wie man leicht feststellt, zusammen mit dem, den man aus der Sicht der fertig entwickelten KT erwarten würde — die Kategorie der *espaces étalés* über X ist ein Beispiel einer sogenannten *slice category*, und dort sind Morphismen ϕ diejenigen Abbildungen, für die

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & G \arrow[dl, "p'"] \\ & \mathcal{X} & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist (näheres zum Begriff der *slice category* steht in 4.1.1.2).

Es bleibt die Frage zu klären, wozu zwei *modes de définition de faisceaux* nebeneinander benötigt werden. Immerhin steht die Definition über die F_X der vorangehenden Definition von Leray näher als Lazards Definition; letztere scheint also eigens eingeführt worden zu sein, um einen Zweck zu erfüllen, dem Lerays Definition nicht optimal angepaßt war[183]. Die Qualifikation von Lazards Definition als *"topologique"* ist so zu verstehen, daß hier nicht die Koeffizientenmoduln einzeln gegeben

[181] Ein Beweis steht z.B. bei [Godement 1958, 109].

[182] Läßt man in Lazards Garbendefinition die algebraische Struktur auf den Fasern F_x beiseite, so kommt man zur Definition eines Begriffes *faisceau d'ensembles*; hierfür führt Godement die Bezeichnung *espace étalé* ein. Ein *espace étalé* ist also ein topologischer Raum E, versehen mit einer Abbildung $p : E \to X$, die die Bedingung (β) (mit E anstelle von F) erfüllt. Ich verwende i.d.v.A. diese Terminologie, wenn ich mich auf Lazards Garbenbegriff beziehen möchte.

Die Garbe der Schnitte kann man übrigens auch definieren, wenn man nicht verlangt, daß man es mit einem *espace étalé* zu tun hat, sondern von p nur die Stetigkeit voraussetzt (man kommt so zum üblichen Begriff des topologischen Raumes "über" X, einem sehr allgemeinen Begriff, von dem sich etwa der Begriff der Überlagerung systematisch herleitet; [Godement 1958, 109] spricht von *espace découpé de base* X).

[183] Es ist also unwahrscheinlich, daß es gerade diese Änderung war, die durch das Erscheinen von [Leray 1950] nahegelegt wurde.

sind, sondern die Garbe als Ganzes (und zwar insbesondere als topologischer Raum) zuerst gegeben ist und die Modulstruktur gewissermaßen nachträglich den Fasern aufgeprägt wird. Dies scheint mir das Charakteristikum von Lazards Definition zu sein, das in SC 50/51 als Vorteil aufgefaßt wurde.

Kann Houzels folgende Bewertung stehenbleiben? *"La définition des faisceaux comme espaces étalés devait sembler préférable car elle se faisait en termes de structure sur un ensemble plutôt qu'en termes de foncteur sur la catégorie des ouverts"* [Houzel 1998, 42f]. Wie ist das zu verstehen? Ist gemeint, daß damals (jedenfalls in Frankreich) das Paradigma Menge mit Struktur so stark war, daß es die Tendenz gab, jedwede Definition daran anzupassen? Jedenfalls scheint es so, als hätte Cartan *zuerst* Lerays (implizit kategorielle) Definition von 1946 verwendet und sei *dann* zu dem Schluß gekommen, Lazards Definition sei *préférable*. Allerdings sind sämtliche Entsprechungen, die Houzels Satz über die *préférabilité* in der veröffentlichten Fassung des *Séminaire Cartan* hat, bereits oben wiedergegeben. Beispielweise gibt es kein Vorwort von SC 50-51 und demnach auch keine globale Begründung für das Zurückziehen der besagten *exposés*. Wie oben angedeutet, glaube ich nicht, daß der Wunsch nach dem Übergang zu einer "weniger kategorientheoretischen" Definition der Grund für das Zurückziehen der *exposés* war, da der Beitrag von [Leray 1950] darin gerade nicht besteht.

3.2.2.3 Garbencohomologie im Cartan-Seminar

In SC 50/51 wird der lokale Schnittfunktor $\Gamma(F, X)$ (F Garbe, X offene Menge) explizit als Funktor von F angesprochen; auch erscheinen die Begriffe Kern und Bild eines Garbenhomomorphismus und *suite exacte de faisceaux.* Diese Begriffe werden für Garben im Sinne Lazards folgendermaßen definiert: Ein Garbenhomomorphismus ϕ setzt sich zusammen aus zunächst auf den einzelnen $\mathcal{F}_x$ definierten ϕ_x; *deren* Kerne etc. geben dann Anlaß zum "Kern von ϕ" etc. Modern ausgedrückt: Ker(ϕ) repräsentiert den Funktor Ker(Hom($\cdot, \phi$)); [Kashiwara und Schapira 1990, 86]. Es wird (dem Inhalte nach) festgestellt, daß Γ linksexakt ist, aber nicht exakt (14-05). Γ_Φ wird definiert als der Funktor, der nur globale Schnitte s mit $\mathrm{supp}(s) \in \Phi$ liefert[184] (15-03); hierbei ist Φ eine Familie (mit bestimmten Abgeschlossenheitseigenschaften) von Teilmengen des topologischen Raumes, die bestimmten Bedingungen topologischer Art unterworfen sind. Auch die Linksexaktheit von Γ_Φ wird festgestellt; ferner wird sinngemäß folgender Satz bewiesen: Ist $f : F \to G$ ein surjektiver Garbenhomomorphismus mit *feinem* Kern[185], und sind die Elemente von Φ parakompakt, so ist der von Γ_Φ induzierte Homomorphismus surjektiv (zumindest auf der Folge $0 \to \mathrm{Ker}\, f \to F \to G \to 0$ ist Γ_Φ also exakt; 15-04).

In *Exposé 16* kommt Cartan auf eine *théorie axiomatique de la cohomologie* zu sprechen:

[184] Ist F ein *faisceau* im Sinne Lazards, so macht es, insbesondere durch die algebraische Struktur auf den Fasern, Sinn, den *support* eines Schnitts einzuführen: $\mathrm{supp}(s) = \{x \in X | \; s(x) \neq 0\}$. (15-04).

[185] Ich gehe hier nicht näher auf diesen Begriff ein.

> Il s'agira ici de la cohomologie "de Čech" ; plus exactement, dans le cas d'un espace *compact*, la famille Φ étant la famille de tous les sous-espaces fermés, on retrouvera la cohomologie telle qu'elle a été définie par Čech, au moins lorsque les coefficients forment un faisceau constant. Dans le cas général, la cohomologie qu'on va définir dépend de la famille Φ ; elle dépend aussi des coefficients choisis : ceux-ci constituent, en général, un *faisceau* F (sans graduation ni cobord) sur l'espace considéré $\mathcal{X}$. Il s'agit donc de "coefficients locaux", non pas dans le sens (plus particulier) [...] de Steenrod, mais tels que Leray les a introduits dans [[1946a, 1946c, 1946d, 1946d, 1950]]. [...] (16-01)

Cartans Einführung von Garbencohomologie geht analog zu Eilenbergs Darstellung der Gruppencohomologie vor: erst axiomatische Definition, dann Existenzbeweis. Nähere Erläuterungen finden sich bei [Houzel 1998, 43f] und [Houzel 1990, 13]; hier nur soviel: der Existenzbeweis wird mithilfe einer graduierten Garbe C geführt, die sich aus einer feinen Auflösung des Grundrings ergibt (*"faisceau fondamental"*). Eine Analogie zum Verfahren bei [Cartan und Eilenberg 1956] besteht darin, daß C einerseits selbst als azyklischer Komplex aufgefaßt werden kann, sich aber ein Komplex mit eventuell nichttrivialer Cohomologie ergibt, wenn man auf das Tensoprodukt von C mit einer vorgegebenen Garbe F den Funktor Γ_Φ anwendet; dies ist dann die Definition der Cohomologie von F: $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F) := H^q(\Gamma_\Phi(C \bigcirc F))$ (16-07; hierbei bezeichnet $\bigcirc$ das Tensorprodukt). Es liegt also nahe, hier eine Analogie zum Verfahren des Derivierens von Funktoren aus [Cartan und Eilenberg 1956] zu vermuten, und zwar für den Funktor Γ_Φ. Daß gerade Γ deriviert werden muß, erklärt sich daraus, daß es immerzu um das *prolongement d'une section* geht (vgl. auch 3.4.1); man kann Garbencohomologie (also ein Maß der Nichtexaktheit des Schnittfunktors) für den Übergang vom Lokalen zum Globalen nutzbar machen: Der Übergang funktioniert durch das Auflösen einer gegebenen Garbe in (co)homologisch triviale Garben — also solche, bei denen sich alle Schnitte fortsetzen lassen.

Bei der Definition des Corandoperators für diese Cohomologietheorie spielt die spezielle Bedingung dafür, wann Γ_Φ ausnahmsweise exakt ist (s.o.), eine Rolle; "fein" ist also wesentlich. Die Aussage, daß jede Garbe in eine feine Garbe eingebettet werden kann (die in die Konstruktion von C eingeht), hängt aber von der Parakompaktheit (insbesondere der Hausdorff-Eigenschaft) des Raumes $\mathcal{X}$ ab. Cartans Cohomologietheorie läßt sich also nicht auf Garben über beliebigen topologischen Räumen anwenden[186].

Bei 17-10 wird der bereits angedeutete Vergleich zwischen der Čech-Theorie und Cartans axiomatischer Theorie skizziert: erstere erfüllt die Axiome, also folgt die Gleichheit aus dem zuvor bewiesenen Eindeutigkeitssatz. Es geht wohl übrigens nicht darum, daß man nur mit der Čech-Theorie wirklich rechnen kann, da der Beweis der Existenz feiner Auflösungen konstruktiv ist.

[186] Zugleich sagt [Gray 1979, 8]: *"existence [of cohomology is] shown by means of fine resolutions although injectives are mentioned"*; tatsächlich kommt in *Exposé 17* der Begriff Φ-*injectif* zur Sprache. Es liegt nicht auf der Hand, in welchem Verhältnis er zum Begriff des injektiven Moduls aus [Cartan und Eilenberg 1956] steht.

3.2.3 Serre und *Faisceaux algébriques cohérents*

3.2.3.1 Garbencohomologie in der algebraischen Geometrie?

In den vierziger und fünfziger Jahren fand in der algebraischen Geometrie ein Methoden- (und Gegenstands-)wechsel statt: neben transzendenten Methoden (gespeist aus der komplexen Geometrie; Stichwort: komplexe Varietäten) begannen algebraische Methoden wichtiger zu werden, weil diese auf die neuen, allgemeineren Gegenstände (bei André Weil: Varietäten über beliebigen Grundkörpern) anwendbar sind. Serre [1955] wollte auch in solchen beliebigen algebraischen Varietäten mit Garben[187] in einer Topologie arbeiten, der Zariski-Topologie[188], und Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in diesen Garben einsetzen. Nach dem Zeugnis von [Grothendieck 1960a, 103] war Serre der erste, der dies versuchte; ähnlich [Mumford 1971, 88]: *"[[Serre 1955]] introduced the cohomology of sheaves into algebraic geometry for the first time"*. Serre konnte in dieser Arbeit ferner erstmals den praktischen Nutzen der Zariski-Topologie aufzeigen.

Serre hebt zu Anfang die Schwierigkeiten hervor, die sich bei der Übertragung der bisher üblichen Methoden auf seine Situation aus der Tatsache ergeben, daß die Zariski-Topologie nicht hausdorffsch ist:

> Dans les applications [...], X est une variété algébrique, munie de la topologie de Zariski, donc n'est pas un espace topologique séparé, et les méthodes utilisées par [[Leray 1950]], ou [SC 51/52] (basées sur "partitions de l'unité", ou les faisceaux "fins") ne lui sont pas applicables ; aussi avons-nous dû revenir au procédé de Čech [...]. Une autre difficulté, liée à la non-séparation de X, se rencontre dans la "suite exacte de cohomologie" [...] ; nous n'avons pu établir cette suite exacte que dans des cas particuliers, d'ailleurs suffisants pour les applications que nous avions en vue [...] [Serre 1955, 197].

Auf die letztgenannten Probleme (die Notwendigkeit, auf die Čech-Theorie zurückzugreifen, und das Problem der exakten Cohomologiesequenz) werde ich in den nächsten beiden Abschnitten eingehen, während das Problem, daß bestimmte Methoden von [Leray 1950] und SC 51/52 nicht anwendbar sind, in 3.3.3.5 besprochen wird (im Zusammenhang mit der von Grothendieck gefundenen Lösung).

3.2.3.2 Čech-Cohomologie als Substitut für feine Garben

Serre nimmt die Berechnung der Garbencohomologie nach dem Čech-Verfahren vor[189]. Bezeichnen $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung und $\mathcal{F}$ eine Garbe, so definiert [Serre 1955, 212] für $p \geq 0$ den Begriff *p-cochaîne de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$*: Eine Funktion f,

[187]Die Garbendefinition von [Serre 1955] ist inhaltlich die von Lazard; 3.2.2.2. Hierbei wird stärker ein algebraischer Akzent gesetzt (nicht die Fasern des topologischen Raumes tragen eine algebraische Struktur, sondern die Mengen, die eine algebraische Struktur tragen, werden mit einer Topologie versehen), es bleibt aber im Prinzip dabei, daß eine Garbe ein topologischer Raum "ist".

[188]Nullstellenmengen von Polynomen sind abgeschlossen; mehr zu dieser Topologie in 4.1.2.1.

[189]Auch im Cartan-Seminar war ja eine Garbencohomologie vorgelegt worden, von der gezeigt werden konnte, daß sie mit der Čech-Theorie übereinstimmt, vgl. 3.2.2.3.

die jedem $p+1$-Tupel $s = (i_0, \ldots, i_p)$ von Elementen einer Indexmenge einen Schnitt f_s von $\mathcal{F}$ über $U_s = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$ zuordnet. Diese f bilden eine Gruppe $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod \Gamma(U_s, \mathcal{F})$. Serre bildet daraus den Komplex $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ und definiert $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ entsprechend; schließlich geht er zum Limes über (S.215). Bei der Zariski-Topologie (die kompakt ist) kommt man mit endlichen Überdeckungen aus — aber nicht ohne Limes; das System der endlichen Überdeckungen ist lediglich kofinal zum System aller Überdeckungen (d.h. liefert den selben Limes).

3.2.3.3 Exakte Cohomologiesequenz für kohärente Garben

Für eine exakte Sequenz von Garben $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$ ist, so [Serre 1955, 216], $0 \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{A}) \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{B}) \to C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ exakt, aber der rechte Homomorphismus ist nicht surjektiv (dies ergibt sich aus Cartans entsprechendem Ergebnis für Γ, vgl. 3.2.2.3). Um eine exakte Cohomologiesequenz zu erhalten, muß man das Bild des Homomorphismus an die Stelle von $C(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ setzen; hierdurch tritt in der Cohomologiesequenz nicht $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ auf, sondern die Cohomologiegruppe dieses Bildes, die Serre mit $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ bezeichnet. Für parakompakte Räume sind diese beiden Gruppen isomorph (S.218), aber die Zariski-Topologie ist nicht parakompakt, da nicht hausdorffsch; [Serre 1955, 217] schreibt dazu: *"j'ignore si une telle [proposition] est possible pour des espaces non séparés"*[190]

Serre bringt bei [1955, 218] eine *ad-hoc*-Lösung des Problems: *"La suite exacte de cohomologie [...] vaut [...] chaque fois que l'on peut démontrer que* $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{C})$ *est bijectif (nous verrons au n°47 que c'est le cas lorsque* X *est une variété algébrique et que* $\mathcal{A}$ *est un faisceau algébrique cohérent)"*. Die Schlüsselidee bei Serre war also die Beschränkung auf sogenannte *kohärente* Garben. Die Eigenschaft einer Garbe, kohärent zu sein (ebd. S.208), beruht auf einer Endlichkeitseigenschaft: Es geht darum, ob die Garbe lokal von endlich vielen ihrer Schnitte erzeugt ist (und ob dasselbe für bestimmte aus ihr abgeleitete Garben gilt). Zur Geschichte der Kohärenz vgl. [Gray 1979, 16] und [Houzel 1998, 44]; das Konzept wurde von Cartan in einem analytischen Kontext entwickelt und von Serre auf den algebraischen Fall übertragen. Die Leistungen des Begriffs der Kohärenz im Zusammenhang mit der Zariski-Topologie grenzen Gelfand und Manin so ein:

> In the Zariski Topology [...] the nerve of any finite open covering has the combinatorial type of a simplex. The same is true for any irreducible algebraic variety. Therefore, purely topological invariants cannot distinguish these varieties. The consideration of cohomology with coefficients in coherent sheaves improves the situation, but this improvement appears to be unsufficient. For example, one still lacks a good Lefschetz type formula for the number of fixed points of a mapping. [Gelfand und Manin 1996, 99].

Auf diese Problematik der Lefschetz-Fixpunktformel komme ich in Abschnitt 4.2.3 zurück.

[190] Demgegenüber hat man beim Verfahren der derivierten Funktoren immer eine exakte Cohomologiesequenz. [Grothendieck 1957, 177f] bringt dann sogar ein Gegenbeispiel zu Serres Proposition im nicht parakompakten Fall.

3.3 Tohoku

Die für die Entwicklung der KT wohl wichtigste[191] Arbeit nach [Eilenberg und Mac Lane 1945] ist [Grothendieck 1957]. Es hat sich eingebürgert, sie kurz als “Tohoku” anzusprechen (es scheint mir auch für ihre Bedeutung zu sprechen, daß sie einen solchen “Kosenamen” bekommen hat, der von vielen Mathematikern verschiedener Disziplinen verstanden wird.) In den folgenden Abschnitten stelle ich die wichtigsten Entwicklungen in der KT, die mit der Arbeit in Zusammenhang stehen, dar. Einen guten Einblick in den Inhalt der Arbeit gibt Buchsbaums MR-*Review*, der auch aus historischer Sicht von Interesse ist.

Grothendieck gibt selbst eine Einordnung der Arbeit:

> Dans le Chapitre III nous redéveloppons la théorie de la cohomologie d’un espace à coéfficients dans un faisceau, y inclus les suites spectrales classiques de Leray. L’exposé donné ici représente un assouplissement par rapport à [SC 50/51, [Serre 1955]], en particulier en ce que tous les resultats essentiels sont obtenus sans faire, à presque aucun moment [...], d’hypothèse restrictive sur la nature des espaces envisagés ; de sorte que la théorie s’applique aussi aux espaces non séparés qui interviennent #38
> en Géométrie Algébrique abstraite ou en “Géométrie Arithmétique” [[Serre 1955], référence Cartier non parvenue] [S.119f]

Die Bezeichnung “Géométrie Arithmétique” stammt nach [Cartier 2000] Anm.7 von Erich Kähler (der 1958 eine Arbeit mit dem Titel *Geometria Arithmetica* veröffentlicht hat — in den *Annali di Matematica* 45); inhaltlich geht es um *analyse diophantienne*.

In [Grothendieck 1957] treffen die zwei bisher besprochenen Stränge zusammen: die Idee, garbentheoretische Methoden in der algebraischen Geometrie einzusetzen, und das systematische Verfahren zur Ermittlung von Cohomologiegruppen via derivierten Funktoren[192]. Grothendieck erreichte eine für die intendierten Methoden geeignete Garbencohomologie durch den Akzent auf der abelschen Variable; diesen Akzent setzte zwar auch schon Cartan mit seiner axiomatischen Methode (vgl. 3.2.2.3); allerdings hängt Cartans Existenzbeweis von der Parakompaktheit des zugrundeliegenden Raumes ab.

Der Titel *“Sur quelques points d’algèbre homologique”* könnte womöglich nicht nur zufällig an den von [Fréchet 1906] erinnern. Zwar ist es ein recht allgemein gehaltener Titel (was an und für sich eher ein Nachteil ist); aber es ist bekannt, daß Grothendieck von der Funktionalanalysis herkam. Wollte er andeuten, daß auch sein Text “eine Welt öffnet” — wie der von Fréchet, in dem der Gedanke aufkam, Funktionen (und ähnliche Gebilde) als Punkte in einem unendlichdimensionalen Raum[193] aufzufassen?

[191] Zu dieser Bewertung vgl. eingehend 3.4.3.1.

[192] Es ist u.U. irreführend, Tohoku allein auf die Hauptanwendung hin zu lesen: es sind manche Entwicklungen darin, die dafür nicht erforderlich wären; man kann dort fragen, wozu diese vorgenommen wurden. Auf solche Fragen gehe ich in 3.3.2.2 und 3.3.4.3 ein.

[193] Hierzu genauer [Krömer 1998, 94f]; vgl. auch 1.2.4.

3.3.1 Die Umstände der Entstehung

Für die historische Erforschung der Entstehung des mathematischen Werkes von Grothendieck spielen manche Züge seiner Persönlichkeit eine erhebliche Rolle. Den Grundstein einer wissenschaftlichen Biographie Grothendiecks hat [Cartier 2000; 2001] gelegt; eine weitere, insbesondere für das Verständnis der sehr individuellen Arbeitsweise Grothendiecks wertvolle Arbeit ist [Herreman 2000]. Ich habe daher davon abgesehen, hier eine eigene biographische Skizze zu versuchen.

3.3.1.1 Die Korrespondenz Grothendieck-Serre

Sehr wichtige Aufschlüsse über die Entstehung der Arbeit gibt die publizierte Korrespondenz von Grothendieck und Serre [Colmez und Serre 2001]; ich gebe im folgenden einige einschlägige Passagen wieder[194]. Diese Passagen sind nicht allein für die Rekonstruktion der Entstehung des Textes ergiebig, sondern auch für die Geschichte einiger Schlüsselideen; daher komme ich in späteren Abschnitten regelmäßig auf die hier zu findenden ausführlichen Zitate zurück (und kann deshalb hier weitgehend auf eine Besprechung dieser inhaltlichen Fragen verzichten).

Der Beginn der Auseinandersetzung G.s mit Fragen der Garbencohomologie markiert zugleich den Anfang der publizierten Korrespondenz. Am 26.02.1955 schreibt G. an S. aus Lawrence, Kansas:

> Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des caté-
> #39 gories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais en même temps la
> cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau : on prend la catégorie des
> #40 faisceaux sur l'espace donné X, on y considère le foncteur $\Gamma_\Phi(F)$ à valeurs dans les
> groupes abéliens, et on prend les foncteurs dérivés. L'existence résulte d'un critère
> #41 général, les faisceaux fins joueront le rôle des modules « injectifs ». On obtient aussi
> les suites spectrales fondamentales comme cas particuliers de délectables et utiles
> suites spectrales générales. Mais je ne suis pas encore sûr si tout marche aussi bien
> dans le cas d'un espace non séparé, et me rappelle tes doutes sur l'existence d'une
> #42 suite exacte en cohomologie en dimensions ≥ 2. D'ailleurs, probablement tout ça se
> trouve plus ou moins explicitement dans le bouquin Cartan-Eilenberg, que je n'ai
> #43 pas encore eu l'heur de voir encore [S.13f].

S. antwortet am 12.03.1955 aus Paris:

> Le fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés
> (au moins dans le cas paracompact) n'est pas dans le Cartan-Sammy. Cartan en
> #44 avait conscience, et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper, mais il ne semble pas
> que celui-ci l'ait fait. L'intérêt de ceci serait de voir quelles sont au juste les propriétés
> des faisceaux fins qu'il faut utiliser ; ainsi on pourrait peut-être se rendre compte si,
> #45 oui ou non, il y aura suffisamment de faisceaux fins dans le cas non séparé (je pense
> que la réponse est négative, mais je n'en suis nullement sûr !) [S.15].

G. schreibt an S. aus Lawrence am 04.06.1955:

[194] Ich verwende die offensichtlichen Abkürzungen G. und S. sowie E. für Eilenberg.

> Ci-joint le résultat de mes premières cogitations en forme sur les fondements d'algèbre
> homologique. [. . .] je vais regarder proprement la théorie de la suite spectrale dans
> les classes abéliennes [. . .] J'ai déjà la conviction que la façon bourbachique de faire #46
> de l'algèbre homologique, c'est de changer de classe abélienne à tout instant, comme
> on change le corps des scalaires, ou la topologie en Analyse Fonctionnelle [S.16f].

Mit dem *résultat de mes premières cogitations en forme sur les fondements d'algèbre homologique* meint G. zweifellos das *papier sur l'Algèbre homologique* für Bourbaki, das S. in seinem Brief an G. vom 13.07.1955 aus Paris erwähnt:

> [. . .] je viens juste de rentrer du congrès Bourbaki [. . .]
>
> Le congrès Bourbaki s'est fort agréablement passé. [. . .] En ce qui te concerne, voici ce qu'il y a à signaler :
>
> [. . .] Ton papier sur l'Algèbre homologique a été lu soigneusement, et a converti tout #47
> le monde (même Dieudonné, qui semble complètement fonctorisé !) à ton point de
> vue. Sammy a décidé de faire une rédaction dans ce sens (pour Bourbaki) avec pour #48
> chapitre I la théorie générale de l'homologie dans les classes abéliennes, Chapitre II #49
> l'application aux modules, Chapitre III l'application aux faisceaux. Il se mettra en
> rapport avec toi pour les questions de rédactions et de démonstrations. [. . .]
>
> Voilà pour Bourbaki. Mais ton papier sur l'algèbre homologique pose un autre pro- #50
> blème, absolument disjoint, celui de la publication dans un journal. Tu dois savoir
> que Buchsbaum avait envisagé dans sa thèse (à paraître aux Trans. Amer. Soc.)
> et dans son appendice au bouquin de Cartan-Sammy un système absolument sem-
> blable à celui de tes classes abéliennes (j'ignore si tu le savais quand tu as rédigé tes
> classes abéliennes — c'est d'ailleurs sans importance). Il avait pris des axiomes de
> base que j'ignore, mais que Sammy affirme être équivalents à C_1, C_2, C_3. Il avait fort
> bien vu (et dit) que l'existence de suffisamment d'injectifs entraîne l'existence d'une #51
> bonne théorie des foncteurs dérivés. Mais il avait été incapable de démontrer que les #52
> faisceaux possèdent assez d'injectifs, faute d'avoir une proposition comme celle de #53
> tes pages 7,8. Sammy te propose donc ceci : publier un papier aux Transactions où
> tu donnerais tes axiomes $C_{4,5,6}$, la notion de générateur pour une classe, l'existence #54
> d'injectifs quand il y a un générateur et que . . . [[195]], le fait que les faisceaux vérifient
> tes axiomes, et la comparaison entre la cohomologie traditionnelle des faisceaux et #55
> celle que l'on obtient par ton procédé. Comme tu pourrais t'appuyer sur Buchsbaum
> pour tout ce qui concerne les choses triviales sur les classes, tu n'aurais au fond qu'à #56
> rédiger la partie intéressante, et ce serait très bien. Tout ça doit pouvoir se rédiger
> brièvement, et sans trop de peine, et ça rendrait bien service aux gens. Qu'en dis-tu ?
> Bien entendu, Sammy pourrait s'arranger pour te fournir une copie de la thèse de
> Buchsbaum [S.17ff].

Es ist derzeit nicht leicht, die voranstehenden Bemerkungen zu dem Bourbaki-Kongreß aus den Quellen[196] zu ergänzen. Zunächst wäre festzustellen, welcher Kongreß eigentlich gemeint ist. Es geht zweifellos darum, daß G. S. gebeten hatte, ihm

[195] Diese Auslassung findet sich zumindest in der Druckfassung und höchstwahrscheinlich auch in Serres Originalbrief; Serre hatte vermutlich keine Muße, *AB 5* — vgl. 3.3.3.4 — ausführlich hier hinzuschreiben.

[196] Auf diese Quellen gehe ich in Kapitel 6 und im Anhang näher ein; dort findet man auch zusätzliche Informationen über die im folgenden besprochenen Texte und verwendeten Abkürzungen.

von einem Kongreß zu berichten, den er nicht besuchen konnte (weil er zu der Zeit in Amerika war). Ich kenne nicht die genauen Daten von Grothendiecks Zeit in Amerika; vgl. dazu 3.3.1.2. Jedoch ist offensichtlich, daß sich Serre am 13.07.1955 auf einen erst kürzlich beendeten Kongreß bezieht. Der Kongreß *35* liegt mit den Daten 27.02.–06.03.1955 zu weit zurück, und bei *Tribu 35bis* war Serre selbst nicht dabei (abgesehen davon, daß ich diese *Tribu* so interpretiere, als habe der Kongreß ohnehin in Amerika stattgefunden). Ausgerechnet *Tribu 36* — es ist anzunehmen, daß es sich bei Kongreß *36* um einen Sommerkongreß des Jahres 1955 handelt — fehlt aber in den *Archives Delsarte*. BKI 00 459 gibt zumindest an, daß der Kongreß im Juni 1955 stattfand; an dieser Stelle findet sich auch eine Liste der *rédactions*, die dort besprochen wurden — darunter ein *"Papier Grothendieck sur l'Algèbre Homologique (n°222)"*. Diesen Text habe ich nicht einsehen können, vgl. A.1.4. Insgesamt könnte es also gut sein, daß die Dinge, die S. berichtet, beim Kongreß *36* beschlossen wurden. Es gibt auch eine Stelle in den *Engagements du Congrès* von *Tribu 37*, an der G. beauftragt wird, E. etwas zu schicken: *"Grothendieck [. . .] envoye à Sammy les démonstrations relatives aux classes abéliennes"*. Sollten die betreffenden Texte irgendwann zugänglich werden, so wäre es interessant, die offensichtlichen[197] Vermutungen zu überprüfen darüber, was sich hinter den von S. erwähnten Axiomen C_1, C_2, C_3 und den *propositions* auf den *pages 7,8* verbirgt. Das Eilenberg-Manuskript unter ⟨#49 S.123⟩ scheint tatsächlich entstanden zu sein, vgl. 6.3.3.1.

Die nächsten in der publizierten Sammlung enthaltenen Briefe sprechen das Thema des *algèbre-homologique*-Textes nicht mehr an. Erst am 01.09.1956 greift G. in einem Brief an S. (ohne Ortsangabe) die Frage auf:

> J'ai passé le plus clair du mois passé à la rédaction de mon multiplodoque d'algèbre homologique ; j'ai essayé d'être concis, mais bien qu'il n'y ait pratiquement pas de démonstrations, il y en aura pour plus de 100 pages (dont 80 sont rédigées), grand format. As-tu une suggestion où le publier (pas en France, où je publie déjà ma longue « théorie de Fredholm » de malheur). Par ailleurs, il ne serait peut-être pas idiot de faire tirer ça pour Bourbaki, au même titre que la rédaction faisceaux Godement,
> #57 pour pouvoir en tenir compte dans la rédaction à venir d'Algèbre Homologique. Qu'en penses-tu ? [. . .] [S.43]

(Mit der *« théorie de Fredholm »* ist nach einer Anmerkung von Serre [Grothendieck 1956] gemeint). Der nächste Brief in der Sammlung ist wieder von G. (Paris, 19.09.1956); ein zugehöriger Brief von Serre ist nicht publiziert.

> Merci pour ta lettre. L'American Journal ne marche pas pour mon article, puisque j'y publie déjà les fibrés sur la sphère de Riemann ; et les Transactions non plus, car ne m'étant pas conformé aux tabous de rédaction très sévères de Sammy, il voudra me faire retaper le manuscrit, et je n'en ai pas l'intention. A moins que Bourbaki ne soit intéressé à avoir des copies (tu ne m'avais pas répondu sur ce point) et que
> #58 « Bastien »[198] fasse donc le nécessaire [S.45].

[197] Auch der Leser, der die Tohoku-Arbeit nicht gut kennt, wird nach der Lektüre des Abschnitts 3.3.3 in der Lage sein, solche Vermutungen zu äußern.

[198] In der Anmerkung 2 der Herausgeber liest man *"La première secrétaire de Bourbaki à Nancy*

S. scheint also in dem fehlenden Brief die genannten Zeitschriften vorgeschlagen zu haben, aber nicht auf G.s Frage wegen Bourbaki eingegangen zu sein. Der nächste Brief in der Sammlung ist von S. (Mexico, 23.09.1956); S.47:

> En ce qui concerne ton papier, je n'ai pas encore eu de réponse de Sammy. Je crains qu'il n'ait déjà quitté New-York pour l'Inde. Mais je trouve idiotes tes objections à publier dans les Transactions : Sammy exige seulement qu'un manuscrit soit *lisible* sans effort d'intelligence, et c'est bien le moins. Armé d'un peu de colle et de patience, il ne te faudrait sûrement pas plus d'une journée pour retaper les passages douteux, et avoir un manuscrit présentable : ne peux-tu vraiment essayer ? (A moins évidemment que tu ne trouves une autre solution).
>
> Quant à faire taper ça par néo-Bastien (whoever she is), je n'ai guère d'opinion ; bien sûr, cela me permettrait d'en avoir une copie assez tôt, ce qui serait bien sympathique ; mais n'a-t-elle pas déjà assez de travail avec les rédactions Bourbaki ? C'est une question que tu ferais mieux de discuter avec un type de Nancy, Delsarte ou à défaut Bruhat.

Es ist schwierig, den Zeitpunkt von E.s Indienreise genauer zu lokalisieren. Klar ist, daß er 1956-57 Gastprofessor des Tata Institute war[199]. Was allerdings den genauen Zeitraum betrifft, so geht aus der Personalakte der Columbia University nur hervor, daß am 18.04.1956 ein *leave of absence — 1956-1957 — without salary* genehmigt wurde; am 02.04.1957 wurde Eilenberg zum *Executive officer of the Dept. of Mathematics* ernannt (es liegt also nahe zu vermuten, daß er zu diesem Zeitpunkt wieder zurück war). Genaueres zum Abreisedatum könnte sich aus der umfangreichen privaten Korrespondenz ergeben, die in der Columbia University aufbewahrt wird. Ich kenne bisher keine Quelle, die Aufschluß darüber gibt, was mit den *"tabous de rédaction très sévères de Sammy"* genau gemeint ist; es scheint nicht nur an Dinge im Zusammenhang mit Buchsbaums Priorität gedacht zu sein (von denen Serre am 13.07.1955 geschrieben hatte, s.o.), da dies ja nicht die Lesbarkeit des Textes betrifft *("Sammy exige seulement qu'un manuscrit soit lisible")*. Es mag also zwischenzeitlich einen weiteren Kontakt zwischen G. und E. gegeben haben; auch entsteht der Eindruck, S. habe mit E. darüber gesprochen. G. antwortet am 13.11.1956 (ohne Ortsangabe; es gibt keine Anzeichen, daß dazwischen Briefe fehlen); S.49:

> [. . .] J'ai fini mon emmerdante rédaction d'algèbre homologique (mais c'est la seule façon que j'aie pour comprendre, à force d'insister, comment marchent les choses) que j'ai envoyée à Delsarte, qui justement manquait de rédactions pour la dactylo ; je l'ai proposée à Tannaka pour le Tôhoku, il paraît que les articles-fleuves ne les rebutent pas.

S. antwortet am 17.11.1956 (ohne Ortsangabe); S.52:

> [. . .] j'attends avec impatience que Bourbaki ait tiré ton diplodocus homologicus fonctoricus, et je plains les pauvres imprimeurs japonais qui vont devoir se battre avec tes corrections à la main. . .

s'appelait Bastien. Il s'agit ici de celle qui lui a succédé : Andrée Vigneron, devenue plus tard Andrée Aragnol".

[199] Das steht sogar im *Who's Who* von 2001.

3.3.1.2 Der Kansas-Aufenthalt

Grothendieck hat sich 1955 in Kansas aufgehalten und dort über seine Arbeiten zur Cohomologie vorgetragen. In [Grothendieck 1957, 119] klingt an, daß es hierbei durchaus um die später im *Tohoku Journal* veröffentlichten Untersuchungen ging; Cartier hat mir gegenüber allerdings erwähnt, daß der bereits in Kansas entstandene Text[200] [Grothendieck 1955a] inhaltlich *nicht* mit Tohoku deckungsgleich ist, sondern die *Cohomologie non-commutative* behandelt. Serre erinnert sich in [Colmez und Serre 2001, 255]: *"Grothendieck se trouvait à Lawrence (Kansas) où il avait été invité (par N.Aronszajn, je crois) à cause de ses travaux sur les E.V.T."*. [Mac Lane 1988a, 339] erinnert sich: *"[Grothendieck] came to Chicago in the spring of 1955 and lectured on this subject"*. Mac Lane wird sich darüber schwerlich irren, da er damals Professor in Chicago war. Grothendieck hat also wohl eine regelrechte Vortragsreise gemacht. In seinem Brief vom 04.06.1955 an Serre (aus Lawrence, Kansas) heißt es: *"Je ne bouge pas d'ici sauf en Août, où je serai à Chicago (si je ne suis pas déjà rentré en France à cause de ma mère)"*. [Colmez und Serre, 17]

Grob lassen sich die Eckdaten von Grothendiecks Zeit in Amerika aus der Korrespondenz mit Serre erschließen: Der erste Brief Grothendiecks aus Lawrence, Kansas (zugleich der erste publizierte Brief überhaupt) ist datiert 28.01.1955 und der letzte 04.06.1955.; der erste wieder in Frankreich (Bois-Colombes) abgeschickte Brief ist datiert 15.12.1955. Auf Serres Brief vom 13.07.1955 gibt es keine Antwort, was damit zusammenhängen könnte, daß Grothendieck da schon in Frankreich zurück war.

3.3.1.3 Die Vorbereitung des Manuskripts

Zur Entstehung und schließlichen Veröffentlichung[201] des Textes kann man im Blick auf die oben wiedergegebene Korrespondenz folgendes festhalten:

Grothendieck hatte 1955 in Kansas offenbar viel Muße für die Abfassung eines größeren Textes: *"J'ai ici pratiquement tout mon temps à moi"* [Colmez und Serre 2001, 1] (G. an S., Lawrence 28.1.1955). Grothendieck dachte zunächst an eine Publikation des Textes in den *Transactions of the AMS*; außerdem schickte er den Text an Bourbaki, offenbar um damit ein entsprechendes Kapitel ins Gespräch zu bringen ⟨#57 S.124⟩. Bei einem Bourbaki-Kongreß wies offenbar Eilenberg darauf hin, daß Grothendiecks Text sich inhaltlich teilweise mit Buchsbaums Dissertation überschneidet, was zumindest im Blick auf die Publikation in den *Transactions* geändert bzw. hervorgehoben werden müsse. Serre gab dies an Grothendieck weiter, der ja — selbst in Amerika — nicht an dem Kongreß teilgenommen hatte; Grothendieck konnte sich aber (trotz guten Zuredens von Serre) zu den entsprechenden Umarbeitungen nicht entschließen (Eilenberg hatte wohl außerdem Änderungswün-

[200] Dieser Text ist heutzutage nur schwer zugänglich; Cartier vermutet ein Exemplar in der ENS oder im IHP oder bei Serre. In Eilenbergs Handbibliothek ist ebenfalls ein Exemplar vorhanden.

[201] [Gelfand und Manin 1996] geben (offenbar irrtümlich) an, [Grothendieck 1957] sei mit dreijähriger Verspätung erschienen, vgl. ⟨#27 S.99⟩. Sie verwechseln dies vermutlich mit [Cartan und Eilenberg 1956] (vgl. hierzu Anm.157). Eine gewisse Verspätung geht allerdings aus [Colmez und Serre 2001] hervor.

sche die Lesbarkeit des Textes betreffend geäußert), sondern beschränkte sich auf eine Erwähnung von Buchsbaum im Vorwort und sah sich ansonsten nach einer anderen Zeitschrift um. Schließlich brachte er seinen Text beim *Tohoku Mathematical Journal* unter, das damals von Tannaka herausgegeben wurde.

Zumindest einige terminologische Korrekturen müssen schließlich doch angebracht worden sein. Daß Grothendieck ursprünglich eine andere Terminologie verwendete, kann man m.E. daran erkennen, daß die Terminologie an manchen Stellen nicht völlig einheitlich ist. An zwei Stellen in Tohoku sind anscheinend vergessene Korrekturen[202] so relevant, daß eine historische Diskussion sie nicht unkommentiert lassen kann[203]:

- Auf S.125 ist von *homomorphisme* die Rede, wo es offensichtlich um *isomorphisme* geht (vgl. dazu ausführlich 3.3.4.3);

- Auf S.138 ist von *"classe abélienne"* die Rede (vgl. dazu ausführlich 3.3.2.2).

Eine weitere Stelle auf S.140 ist zwar inhaltlich ohne Belang, da ein offensichtlicher Druckfehler vorliegt; andererseits mag dies die Hypothese unterstützen, daß auch in den anderen Fällen eine Korrektur versäumt wurde (also ein Versehen vorliegt und keine Absicht).

3.3.2 Grothendiecks Rezeption seiner Vorläufer in der homologischen Algebra

Aus der Korrespondenz mit Serre wird deutlich, daß sich Grothendieck nicht darüber im klaren war, daß seine Arbeit teilweise in der Dissertation von Buchsbaum vorweggenommen wurde. Es ist also sinnvoll, genauer zu untersuchen, wie weit Grothendiecks Rezeption seiner Vorläufer in der homologischen Algebra ging und welche Indizien es dafür gibt. [Herreman 2000] führt aus, daß Grothendieck praktisch nie Literatur zur Kenntnis genommen hat; im Falle Buchsbaums kann man ihm daraus nicht recht einen Vorwurf machen, da die veröffentlichten Fassungen erst nach seinem eigenen Einstieg in das Thema vorlagen.

3.3.2.1 Die Homologische Algebra Cartans und Eilenbergs

Obgleich [Cartan und Eilenberg 1956] zum Zeitpunkt von Grothendiecks Kansasaufenthalt noch nicht erschienen war[204], hatte Grothendieck bereits zu diesem Zeitpunkt eine gewisse Vorstellung vom Inhalt des Buchs[205]. Grothendieck muß seine

[202] Auch in der Korrespondenz Grothendieck-Serre ist von den Unbilden der Korrektur die Rede, vgl. den in 3.3.1.1 wiedergegebenen Auszug aus Serres Brief vom 17.11.1956.

[203] Für eine weitere Stelle vgl. 5.3.3.3.

[204] Vgl. Anm.157.

[205] So schreibt G. an S. am 18.02.1955 aus Lawrence, Kansas: *"J'ai l'intention de faire un cours d'algèbre homologique ici, suivant les lignes (supposées!) du bouquin de Cartan-Eilenberg [...]"*; ähnlich ⟨#43 S.122⟩.

Kenntnisse also aus anderer Quelle gehabt haben, möglicherweise aus dem *Séminaire Bourbaki*[206].

[Grothendieck 1957] enthält dann auf den Seiten 140, 142 und 143 substantielle Verweise auf [Cartan und Eilenberg 1956]; für die Endfassung hatte Grothendieck das Buch also zur Verfügung.

3.3.2.2 Der Begriff der abelschen Kategorie und die Rede von *classe abélienne*

[Mac Lane 1981, 25] *"In preparing [[Grothendieck 1957]], Grothendieck apparently rediscovered the notion of an abelian category".*

Grothendieck hat den Begriff der abelschen Kategorie unabhängig von Buchsbaum und Mac Lane erarbeitet; [Mac Lane 1988a, 339]: *"as I heard his lecture [in Chicago in the spring of 1955; vgl. 3.3.1.2], it was amply clear that he had no knowledge of earlier work by Mac Lane and Buchsbaum".* Kann angenommen werden, daß Mac Lane ihn anläßlich dieser Beobachtung persönlich darauf hinwies? Serre gab Grothendieck am 13.07.1955 (also, wenn Mac Lanes Erinnerung stimmt, *nach* dem Vortrag in Chicago; vgl. aber 3.3.1.2) die entsprechenden Hinweise von Eilenberg auf Buchsbaum weiter; diese wären kaum nötig gewesen, wenn Mac Lane ihm dies schon im Frühling gesagt hätte. Hatte Grothendieck da sein Manuskript für den Bourbaki-Kongress schon fertig? Aus [Colmez und Serre 2001] geht nur hervor, daß er es am 04.06.1955 an Serre schickte. Selbst Serre kannte Buchsbaum (wenn auch nicht genau seine Arbeiten) schon in seinem Brief vom 12.03.1955 ⟨#44 S.122⟩. [Grothendieck 1957, 119] bespricht zumindest die Überschneidungen und Unterschiede zu [Buchsbaum 1955], während [Mac Lane 1950] nur in der Literaturliste erwähnt wird; dies wirkt sehr wie eine lästige Pflichtübung.

Grothendieck scheint zunächst eine eigene Terminologie für ◁Abelsche Kategorie▷ in Betracht gezogen zu haben. Es gibt mehrere Stellen, an denen von *"classes abéliennes"* die Rede ist, wo Tohoku von *"catégories abéliennes"* spräche:

- in den *Engagements* von Kongreß *37* (1955.3), wo es heißt *"Grothendieck [. . .] envoye à Sammy les démonstrations relatives aux classes abéliennes"*;
- in der Grothendieck-Serre-Korrespondenz bei ⟨#46 S.123⟩, ⟨#49 S.123⟩ und in Serres Brief vom 22.12.1955, ja selbst noch in Grothendiecks Brief vom 01.09.1956.
- bei [Grothendieck 1957, 138] wird der Begriff der *sous-catégorie* eingeführt; erfüllt eine *sous-catégorie* $\mathbf{C}'$ einer *catégorie abélienne* $\mathbf{C}$ eine bestimmte Bedingung, so kann man zeigen *"qu'alors* $\mathbf{C}'$ *est elle-même une classe abélienne".* Für genaueres vgl. unten Anm.208.

Das letztgenannte Beispiel zählt also wahrscheinlich zu den verabsäumten Korrekturen in der Tohoku-Arbeit (vgl. 3.3.1.3).

[206] Vgl. *Exposé 46* (Mai 1951), Eilenberg, Foncteurs de modules et leurs satellites, [Eilenberg 1995].

Grothendieck war der Terminus Kategorie[207] durchaus vorher vertraut; siehe ⟨#39 S.122⟩. Warum sprach er dann weiterhin von *classe abélienne*? Serre war in jenen Jahren für Grothendieck ein wichtiger Gesprächspartner, wie schon die Existenz und die Natur der Korrespondenz belegen. Serre hatte in [1953b] selbst die Sprechweise *"classe"* für unter bestimmten Operationen abgeschlossene Gesamtheiten von Gruppen eingeführt:

> Une collection *non vide* $\mathcal{C}$ de groupes abéliens est dite une *classe* si elle vérifie l'axiome suivant :
>
> (I). *Si, dans une suite exacte* $L \to M \to N$*, les groupes* L *et* N *appartiennent à* $\mathcal{C}$*, alors* M *appartient à* $\mathcal{C}$. [S.172]

Serres Intention bei diesem Begriff war die folgende:

> [...] $\mathcal{C}$ est *stable* vis à vis des opérations de l'algèbre élémentaire : sous-groupe, groupe quotient, extension. La donnée d'une classe $\mathcal{C}$ permet d'introduire des "$\mathcal{C}$-notions" où l'on "néglige" les groupes de la classe $\mathcal{C}$ (par exemple, un $\mathcal{C}$-isomorphisme est un homomorphisme dont le noyau appartient à $\mathcal{C}$)." [S.171]

Ich nehme an, daß Grothendieck — seine Auseinandersetzung mit Problemen der Cohomologie im Austausch mit Serre entwickelnd — zunächst an ein Analogon solcher Klassen dachte[208].

Die genaue Bestimmung, wer letztlich bestimmte Begriffe chronologisch als erster angegeben hat, ist für eine Geschichte dieser Begriffe offensichtlich weniger wichtig als welche Anwendungen davon gemacht wurden; [Mac Lane 1988a, 339] sagt es im Blick auf den Begriff der abelschen Kategorie (und angesichts seines eigenen erfolglosen Anlaufs auf diesen Begriff in echter Bescheidenheit) folgendermaßen: *"the discovery which matters most is that which ties the concept to other parts of mathematics — in this case to sheaf cohomology"*.

3.3.3 Der Plan von Tohoku

In den vorangegangenen Abschnitten habe ich aufgezeigt, daß Grothendieck an vorhandene Arbeiten auf dem Gebiet der homologischen Algebra zumeist nicht explizit

[207] Auch in seiner Doktorarbeit zum Tensorprodukt von EVT ist durchweg von *"classe"* die Rede. Ist dort ◁Kategorie▷ gemeint? Bei [Serre 1989, 199] liest man, in [Grothendieck 1955b] werde eine *nouvelle catégorie d'espaces vectoriels topologiques* eingeführt; Serre meint aber wohl nicht *catégorie* im systematischen Sinn, sondern eher im umgangssprachlichen.

[208] Serres Classe-Begriff begegnet denn auch in [Grothendieck 1957, 137ff] wieder; Grothendieck überführt den Begriff in den allgemeineren Kontext der abelschen Kategorien, indem er den Begriff der vollen Unterkategorie (wie man heute sagen würde; es ist dies eine Unterkategorie, die allein durch die Klasse ihrer Objekte bestimmt ist) um Serres Bedingung (I) erweitert und so zu Begriff der *sous-catégorie épaisse* gelangt. Serres "$\mathcal{C}$-notions" erhält Grothendieck dann in der Quotientenkategorie nach einer solchen *sous-catégorie épaisse*. Bedeutsam scheint, daß diese Konstruktionen im weiteren Verlauf der Arbeit nicht vorkommen; Grothendieck schreibt hier also ein Stück (abelsche) Kategorientheorie um ihrer selbst willen (allerdings im Blick auf mögliche Anwendungen — wohl im Anschluß an Serre —; beispielsweise wird so eine Methode geliefert, Spektralsequenzen mit verschwindenden Gliedern zu erhalten).

anknüpfte. Vor diesem Hintergrund erscheint die naive Frage, welches Grothendiecks ureigene Innovationen in Tohoku sind, schlecht gestellt, da schwer zu überprüfen. In den folgenden Abschnitten geht es mir eher darum, die Eckpunkte der Arbeit zu schildern und insbesondere aufzuzeigen, welche Aufgabe kategorientheoretische Überlegungen darin übernehmen und wieso sie dies können. Dies ist also nicht so sehr eine historische als eine philosophische Untersuchung (i.S. von 1.2.1: "Wieso gerade diese Voraussetzungen?").

3.3.3.1 Garben als spezielle Funktoren über den offenen Mengen eines topologischen Raumes

Wie schon in der Propädeutik am Anfang von Abschnitt 3.2 notiert, wird in der heute üblichen Darstellung der Theorie (beginnend mit [Godement 1958]) eine Prägarbe aufgefaßt als ein Funktor auf der Kategorie $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ der offenen Mengen des topologischen Raumes X. Das genaue Vorgehen bei Grothendieck ist etwas komplizierter: Ein *système inductif* ist eine spezielle *catégorie définie par un schéma de diagrammes* (S.133; vgl. auch 3.3.4.2); ein *préfaisceau* ist ein spezielles *système inductif*, definiert auf der Menge der offenen nichtleeren Teilmengen des topologischen Raumes (S.133 bzw. 153).

An dieser Stelle ist die Diskussion über das Verhältnis der verschiedenen Garbendefinitionen aus 3.2.2.2 wieder aufzunehmen. Wie wir dort gesehen haben, zeigte Cartan in SC 50/51, daß (in Grothendiecks Bezeichnungen) zu jeder Prägarbe F ein *espace étalé* $(\tilde{F}, p)$ konstruiert werden kann; zu diesem *espace étalé* betrachtet man nun die lokalen Schnitte von p. Diese bilden wieder eine Prägarbe $\tilde{F}$[209]. Die Frage, unter welchen Bedingungen der Prägarbenhomomorphismus $F(U) \to \tilde{F}(U)$ ein Isomorphismus ist, blieb bei Cartan offen; bei [Serre 1955, 200] gibt es Bedingungen für Injektivität bzw. Surjektivität des fraglichen Morphismus *(proposition 1, 2)*. Bei Grothendieck werden solche Bedingungen zur neuen Definition von "Garbe" als Spezialfall von "Prägarbe" ("Garbenbedingungen")[210]:

> On dit que le préfaisceau F est un *faisceau* si pour tout recouvrement (U_i) d'un ouvert U de X par des ouverts non vides, et toute famille (f_i) d'éléments $f_i \in F(U_i)$ telle que $\phi_{U_{ij}U_i} f_i = \phi_{U_{ij}U_j} f_j$ pour tout couple (i, j) tel que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, il existe un $f \in F(U)$ et un seul tel que $\phi_{U_iU} f = f_i$ pour tout i. [Grothendieck 1957, 153]

Grothendieck wiederholt dann die Konstruktion des *faisceau associé* zu einem *préfaisceau* (S.154); er stellt den Sachverhalt fest, daß gerade dann ein Isomorphismus

[209] die sogar Garbe (i.S. Grothendiecks, s.u.) ist; man hat also in gewissem Sinne die ursprüngliche Prägarbe zu einer Garbe gemacht. Daher wurden für dieses Konstrukt zunächst die französischen Bezeichnungen *faisceau associé* oder *faisceau engendré* eingeführt; das Konstruktionsverfahren hat nachgerade im Englischen bzw. Deutschen den etwas gewöhnungsbedürftigen Namen *sheafification* (Garbifizierung) bekommen.

[210] Das folgende Zitat bringt nur eine Bedingung; in anderen Texten wird eine weitere Bedingung vorangestellt, die es erlaubt, die Eindeutigkeitsforderung in der nunmehr zweiten Bedingung *("et un seul")* wegzulassen; vgl. z.B. [Godement 1958, 109]. ϕ_{UV} bezeichnet bei Grothendieck den Pfeil $F(V) \to F(U)$ ("Restriktionsabbildung").

zwischen beiden vorliegt, wenn man es bei F mit einem *faisceau* i.S. der obigen Definition zu tun hat[211]; dies ergibt eine *équivalence de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, [...] avec la catégorie des espaces étalés dans X* (ich bezeichne die erstgenannte Kategorie als $\mathrm{Shv}(X)$, die zweitgenannte als E/X.) Schon Cartan war klar: es gibt zwei verschiedene *"modes de définition d'un faisceau"*; beide haben ihre Berechtigung. Serre klärte, daß beide *modes* gleichwertig sind. Grothendieck greift dies in Kategoriensprache auf, da er mit dem Nachweis bestimmter Eigenschaften für die eine Kategorie diese Eigenschaft auch für die andere Kategorie verwenden möchte. Grothendieck führt übrigens zu diesem Zweck den Begriff *équivalence de categories* erstmals ein, vgl. 3.3.4.3.

Man bezeichnet heutzutage die Elemente des Bildobjekts $F(U)$ als Schnitte der Garbe. Dies wäre mit der funktoriellen Definition allein nicht zu motivieren, denn es kommt natürlich von den *espaces étalés* her: Jede Garbe im funktoriellen Sinn kann ja vermöge der Garbifizierung aufgefaßt werden als Garbe der Schnitte des zugehörigen *espace étalé*. Es ist die oben angesprochene Äquivalenz von Kategorien, die es überhaupt erst legitimiert, den Funktor $\Gamma(U, -) : F \to F(U)$ auf $\mathrm{Shv}(X)$ als "Schnittfunktor" anzusprechen. Denn gezeigt wurde ja gerade, daß jede Garbe i.S. Grothendiecks eine Garbe i.S. Lazards ist, von deren Schnitten man sprechen kann, und daß die Menge der Schnitte tatsächlich übereinstimmt mit $F(U)$.

In diesem Stadium kann man nicht davon sprechen, die funktorielle Definition löse die topologische Definition ab. Vielmehr kommt es hier noch auf das *Zusammenspiel* der Definitionen an (entscheidend ist also die Einsicht, daß zwei Kategorien zur Verfügung stehen, die äquivalent sind). Denn die Konstruktion der Garbifizierung stellt in diesem Stadium die Verbindung her zwischen beiden Kategorien — und diese Konstruktion ist für den Nachweis, daß man es mit einer abelschen Kategorie zu tun hat, entscheidend (s.u. 3.3.3.2); außerdem ist Garbifizierung wichtig für Spektralsequenzen, z.B. die, welche die Čech-Cohomologie mit der "richtigen" Cohomologie vergleicht, oder die Spektralsequenz einer Abbildung (vgl. jeweils 3.3.3.5). Wir werden später sehen, wie die Situation schließlich zugunsten der funktoriellen Definition umschlug; vgl. 4.1.2.2.

3.3.3.2 Die Beobachtung, daß Garben eine abelsche Kategorie bilden

[Mac Lane 1981, 25] *"Grothendieck [...] recognized the crucial new example [of an abelian category], that of the category of sheaves (of modules) over a fixed topological space"*; ähnlich [Mac Lane 1988a, 339] *"David Buchsbaum [...] developed a [...] axiomatic description [of abelian categories]. Then Grothendieck [...] made the crucial geometric observation that sheaves of abelian groups or of modules on a*

[211] Die Darstellung der Garbenbedingungen als allein motiviert aus der Frage, unter welchen Bedingungen der Homomorphismus $F(U) \to \tilde{F}(U)$ bijektiv ist, ist einseitig. Wie bei [Houzel 1998, 42] und [Houzel 1990, 15] dargestellt, war K.Oka, offenbar in Zusammenarbeit mit Cartan, im Zusammenhang mit holomorphen Funktionen mit wechselnden Definitionsbereichen zu einem Begriff gekommen, der dem späteren Grothendieckschen Garbenbegriff (mit Garbenbedingungen) schon sehr ähnlich sieht. Houzel hebt diese Entwicklungen allerdings hervor unter dem Gesichtspunkt von Cartans Übergang zu offenen gegenüber Lerays abgeschlossenen Mengen.

space form an abelian category".

Wie Grothendiecks Nachweis aussieht, deute ich in 3.3.4.2 und 3.3.4.3 an. Hier sind noch einige Bemerkungen dazu erforderlich, inwieweit der Gedanke, Garben als ein Beispiel für abelsche Kategorien zu erkennen, als originärer Beitrag von [Grothendieck 1957] gelten kann. Es war auch Buchsbaum klar, daß die in [Cartan und Eilenberg 1956] entwickelten Verfahren auf Garben anwendbar sein müßten. ⟨#44 S.122⟩: *"Cartan [. . .] avait conscience [du fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés], et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper".* Buchsbaum weist in seinem Anhang zu [Cartan und Eilenberg 1956] nicht auf Garben als zweites Standardbeispiel für abelsche Kategorien (neben Moduln) hin. In [Buchsbaum 1955, 1] heißt es

> [. . .] Theorem 5.1 [. . .] is proved in its full generality so as to be applicable in the theory of sheaves.
>
> We desist from giving applications to theory of sheaves as these would be fragmentary.

Es ist also zwar an Anwendungen der in der Arbeit entwickelten Theorie in der Garbentheorie gedacht; auf deren Darstellung wird aber wegen ihrer Marginalität verzichtet. Es ergibt sich die Vermutung, daß Buchsbaum auf Cartans Vorschlag hin zu seiner Untersuchung gelangte, das ursprüngliche Ziel aber nicht verwirklichte (die wiedergegebene Stelle wäre dann eine Reminiszenz an dieses Ziel)[212].

3.3.3.3 Die Konzentration auf injektive Auflösungen

Allgemein gilt in der homologischen Algebra im Stil von [Cartan und Eilenberg 1956]: Ob man für die Derivation eines Funktors projektive oder injektive Auflösungen heranzieht, hängt von der Art der Nichtexaktheit und von der Varianz des Funktors ab, denn:

- will man einen linksexakten Funktor exakt machen, interessiert man sich für die Rechtsderivierten etc.;
- die Rechtsderivierten erhält man, wenn man für alle kovarianten Variablen des Funktors injektive Auflösungen und für alle kontravarianten Variablen projektive Auflösungen heranzieht; bei den Linksderivierten verhält es sich umgekehrt [Cartan und Eilenberg 1956, 84].

Grothendieck "mußte" sich also (im Blick auf die Eigenschaften von Γ) für injektive Objekte interessieren[213].

[212] Die Anwendungen auf Garben, die Buchsbaum im Sinn hatte, sind wohl die, die er später in [Buchsbaum 1959;1960] niedergelegt hat; seine Ergebnisse und Methoden sind verwandt mit, aber doch verschieden von denen Grothendiecks. Vgl. auch 3.4.2.

[213] "Injektiv" ist bei [Grothendieck 1957, 135] genauso definiert wie bei [Godement 1958, 6]: M ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Hom}(A, M)$ exakt ist (und nicht nur linksexakt). Bei Godement wird gezeigt, daß diese Definition äquivalent ist zu der von [Cartan und Eilenberg 1956]; vgl. hier Anm.161.

Zugleich hielt Pierre Cartier mir gegenüber folgende Einschätzung fest: der Begriff des injektiven Moduls spielte im Rahmen von [Cartan und Eilenberg 1956] eigentlich keine große Rolle, wurde gewissermaßen nur "der Dualität halber" eingeführt, während der Begriff des projektiven Moduls und die aus solchen Moduln zusammengesetzten projektiven Resolutionen von großer Bedeutung waren. Dies mag erstaunen, wenn man bedenkt, daß es auch Cartan-Eilenberg um Funktoren verschiedener Varianz und Exaktheit ging. Und doch: In [1956] wird der projektive Fall ausführlich behandelt und der injektive nur angedeutet (ebd. S.78).

Nun erlaubt es Buchsbaums Dualitätstheorie (vgl. 3.1.5.2), sich bei der *Entwicklung des Kalküls der derivierten Funktoren in seiner allgemeinen Form* auf Linksderivierte und projektive Auflösungen zu beschränken. Durch einen Dualisierungsprozeß läßt sich die Forderung nach genügend injektiven Objekten in einer vorgelegten Kategorie transformieren in die Forderung nach genügend projektiven Objekten in ihrer dualen Kategorie.

Für den *Nachweis* einer der beiden Aussagen aber trägt dies offensichtlich noch nichts ein (zumindest eine muß schon nachgewiesen sein, damit das Dualitätsprinzip irgendetwas hilft). Auch bedeutet das Dualitätsprinzip ja nicht, daß man sich für *ein und denselben* Funktor aussuchen kann, ob man mit injektiven oder projektiven Auflösungen arbeitet (dies geht nur für *balanced functors*, s.u.); man kann sich lediglich aussuchen, ob man mit dem Funktor selbst oder dem entsprechenden dualen Funktor arbeitet. Wahrscheinlich setzte Buchsbaum auf seine Dualitätstheorie, weil in Kategorien von Moduln, die er und Cartan-Eilenberg ja vornehmlich betrachten, stets *beide* Sorten von Auflösungen möglich sind (also auch in der dualen Kategorie).

Zusammengefaßt: Es kann also durchaus von den Anwendungsabsichten abhängen, für wie intuitiv ein Konzept (hier: injektive Auflösungen) gilt. Bei der Darstellung des Kalküls der derivierten Funktoren in seiner allgemeinen Form ist das Konzept der injektiven Auflösung prinzipiell verzichtbar, wie Buchsbaum darlegt; bei der Auseinandersetzung mit Garbencohomologie ist es das nicht (außer man hat die Muße, sich mit der dualen Kategorie zu einer Garbenkategorie zu befassen — also einer Kategorie, über die man vermutlich noch weniger weiß als über die Garbenkategorie selbst). Zudem ging es Cartan und Eilenberg um die tatsächliche Berechnung von derivierten Funktoren; hier leisten projektive Auflösungen viel bessere Dienste als injektive, weil injektive Objekte kaum zugänglich sind. Die Diskussion bei [Cartan und Eilenberg 1956, 96] der *balancedness* von Funktoren mit mehreren Variablen gehört hierher, denn diese Eigenschaft erlaubt es, beim Berechnen der Derivierten gewisse Variablen wegzulassen und sich entsprechend die Möglichkeit zu verschaffen, mit projektiven Auflösungen arbeiten zu können. Ein solches Verfahren kommt aber bei Γ wegen der Zahl der abelschen Variablen (1) nicht in Frage. Grothendieck war auch an der algorithmischen Seite gar nicht interessiert, er wollte nur einen Existenzbeweis und keine Berechnungsmethode für die Garbencohomologie erreichen.

Aus Grothendiecks Brief vom 26.02.1955 an Serre ⟨#41 S.122⟩ geht hervor, daß bei Grothendieck zunächst feine Garben die Rolle der injektiven spielen sollten[214].

[214]Die Verwendung feiner Auflösungen war schon im Cartan-Seminar üblich, vgl. 3.2.2.3; allerdings kommt wohl bei Grothendieck das *"faisceau fondamental"* nicht in der Form vor wie bei

Es gab allerdings ein Problem mit feinen Garben: solche Auflösungen hängen von der Parakompaktheit ab (vgl. 3.2.2.3). Die für die Interpretation von Grothendiecks Vorgehen bedeutsame Gegenüberstellung ist demnach nicht projektiv vs. injektiv, sondern fein vs. injektiv. Feine Garben sollten die Rolle spielen, die die injektiven Garben bei [Cartan und Eilenberg 1956] spielen (daß man injektive braucht, ergibt sich aus der Nichtexaktheit und der Varianz des Funktors); feine Garben wurden deshalb erkoren, weil es a) im parakompakten Fall geeignete Auflösungen in feine Garben gibt und b) diese die intendierte Anwendung der Cohomologie erlauben (man erinnere sich an Grays Diktum: es geht um die Auflösung gegebener Garben in homologisch triviale Garben).

3.3.3.4 Der *Nachweis*, daß es genügend injektive Garben gibt

Grothendieck interessiert sich für abelsche Kategorien mit einer Reihe zusätzlicher Eigenschaften, die er mit *AB 3* – *AB 6* abkürzt[215]; hier relevant sind *AB 3* und *AB 5*. *AB 3* ist die Forderung, alle unendlichen direkten Summen sollen existieren; S.128. Es wäre einige terminologische Vorarbeit erforderlich, wollte man *AB 5*, wie es auf S.129 formuliert ist, hier wiedergeben; da gleichzeitig eine genauere Diskussion dieses Axioms für das folgende nichts eintrüge, nehme ich von einer solchen Wiedergabe Abstand. *AB 5* umfaßt jedenfalls *AB 3*.

Grothendieck beweist, daß eine Kategorie von Garben "genügend" injektive Objekte hat[216]. Grothendieck führt den Beweis in zwei Schritten:

- er zeigt, daß in einer abelschen Kategorie mit *générateur* (s.u.) und *AB 5* jedes Objekt eine injektive Auflösung hat (*théorème* 1.10.1);
- er zeigt, daß eine Kategorie von Garben abelscher Gruppen über einem beliebigen[217] topologischen Raum und ähnliche Kategorien von Garben solche Kategorien sind (*proposition* 3.1.1).

Ist dies gezeigt, erhält man den Cohomologiefunktor mit Koeffizienten in einer Garbe als Derivierten von $\Gamma_\Phi(F)$ (globale Schnitte mit *support* aus Φ). Grothendiecks Definition von *générateur* lautet:

> Soit **C** une catégorie, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de **C**. On dit que c'est une *famille de générateurs* de **C** si pour tout objet $A \in$ **C** et tout sous-truc $B \neq A$,

Cartan. Immerhin meldet Serre bei ⟨#42 S.122⟩ Zweifel an der Existenz einer exakten Cohomologiesequenz für Grothendiecks Fein-Ansatz an — und Cartans Theorie hat natürlich eine solche Sequenz. Was Grothendieck hier vorhatte, ist also wohl eine Zwischenstufe zwischen Cartan und Tohoku.

[215] Grothendieck schreibt z.B. ⌜AB 3)⌝ anstelle von ⌜*AB 3*⌝ (entsprechend für die übrigen AB-Axiome); ich habe dies um der besseren Lesbarkeit willen geändert.

[216] Daß Kategorien von *Moduln* in der Tat "genügend" injektive Objekte haben, steht bei [Cartan und Eilenberg 1956], vgl. 3.1.4.

[217] Eine von speziellen Voraussetzungen an den topologischen Raum unabhängige Garbencohomologie ist übrigens nicht nur auf Grothendiecks Weg zu erhalten, vgl. Godements Einsatz welker Garben in [1958]. Allerdings ist der Rahmen der abelschen Kategorien für alle Vorgehensweisen entscheidend.

> on peut trouver un $i \in I$ et un morphisme $u : U_i \to A$ qui ne provienne pas d'un morphisme de U_i dans B. Alors pour tout $A \in \mathbf{C}$, les sous-trucs de A forment un *ensemble* : en effet, un sous-truc B de A est complètement déterminé par l'ensemble #59
> des morphismes d'objets U_i dans A qui proviennent d'un morphisme de U_i dans B. On dit qu'un objet $U \in \mathbf{C}$ est un *générateur* de $\mathbf{C}$ si la famille $\{U\}$ est une famille #60
> de générateurs. [S.134]

(Zum Begriff des *sous-truc* vgl. 3.3.4.1.) Grothendieck gibt als äquivalente Charakterisierung des Begriffs *générateur* die Möglichkeit, jedes Objekt als Quotient einer direkten Summe von lauter identischen Kopien von U, indiziert nach $\mathrm{Hom}(U, A)$, aufzufassen. Wie Grothendieck selbst hervorhebt, sind diese Definitionen und Aussagen auf der Ebene der allgemeinen (nicht notwendig abelschen) KT möglich, wenn man nur *AB 3* hat. Das zentrale Resultat schreibt Grothendieck so hin:

> Théorème 1.10.1. *Si* $\mathbf{C}$ *satisfait à axiome* AB *5) [...] et admet un générateur [...] alors pour tout* $A \in \mathbf{C}$*, il existe un monomorphisme de* A *dans un objet injectif* M*.* #61
> [S.135]

Der Beweis dieses Satzes verläuft folgendermaßen:

> On va [...] construire un foncteur $M : A \to M(A)$ [...] de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ et un homomorphisme f du foncteur identique dans M, tels que pour tout $A \in \mathbf{C}$, $M(A)$ soit injectif et $f(A)$ soit un monomorphisme de A dans $M(A)$. La démonstration étant essentiellement connue, nous esquisserons seulement les points principaux. #62

(Die Äußerung bei ⟨#62 S.135⟩ ist unklar, da es Grothendieck war, der diesen Satz erstmals aufgestellt hat[218]. Es stellt sich die Frage, an welchen Leser er sich hier richtet; ich gehe darauf nicht näher ein.) Zunächst gibt er ein Lemma eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Injektivität des (noch zu konstruierenden) Objekts $M(A)$ an: *pour tout sous-truc* V *du générateur* U*, et tout morphisme* v *de* V *dans* M*,* v *se prolonge en un morphisme de* U *dans* M*.* In den Beweis dieses Lemmas geht nun ein, daß in einer Kategorie mit *générateur* die *sous-trucs* eines Objektes A eine Menge bilden ⟨#59 S.135⟩, und zwar wird dies benutzt, um zu zeigen, daß eine Kollektion von gewissen *prolongements* (das sind insbesondere Morphismen) ebenfalls eine Menge ist. Diese andere Menge wird nach der Relation, *prolongement* zu sein, geordnet und mit *AB 5* als induktiv erkannt, hat also ein maximales Element; der Beweis des Lemmas gipfelt dann darin, einige Überlegungen über dieses maximale Element anzustellen.

Schließlich ist noch die Konstruktion für M anzugeben und nachzuweisen, daß das so konstruierte M die notwendige und hinreichende Bedingung des Lemmas erfüllt. Hierzu wird zunächst eine weitere Menge von Morphismen (die wieder dank der

---

[218] Ähnliches gilt für die Proposition 1.8. auf S.133; diese besagt, daß in einer abelschen Kategorie mit *AB 3* jedes induktive System einen induktiven Limes hat, und spielt im Beweis des *théorème* 1.10.1 eine gewisse Rolle. Grothendiecks Begründung dafür, daß er nur einen Teil der Proposition beweist, lautet: *"nous laissons au lecteur la démonstration des autres assertions de la proposition 1.8., démonstration évidemment bien connue"*.

Tatsache, daß die *sous-trucs* eine Menge bilden, als Menge erkannt wird) als Indexmenge für gewisse direkte Summen eingesetzt (die dank *AB 3* existieren). Der Cokern eines bestimmten Morphismus zwischen diesen direkten Summen soll dann $M_1(A)$ heißen; außerdem wird $f(A)$ gesetzt als ein gewisser Morphismus $M_0(A) \to M_1(A)$ mit $M_0(A) := A$. Davon ausgehend wird via transfiniter Induktion für jede Ordinalzahl i ein $M_i(A)$ definiert, das mit $M_{i+1}(A)$ in bestimmter Weise durch einen Morphismus $f(M_i(A))$ verbunden ist. Für den Fall, daß i eine Limitordinalzahl ist, wird $M_i(A) := \varinjlim_{j<i} M_j(A)$ gesetzt und für die Morphismen entsprechend verfahren. Dieser Prozeß soll nun bis zur kleinsten Ordinalzahl k durchgeführt werden, die echt größer als die Mächtigkeit der Menge der *sous-trucs* des *générateur* ist; es läßt sich dann (unter Zuhilfenahme von *AB 5* und Mächtigkeitserwägungen) zeigen, daß $M_k(A) =: M(A)$ der Bedingung des Lemmas genügt. Die Verwendung von Kardinal- und Ordinalzahlenarithmetik ist natürlich nur deshalb möglich, weil es sich immer um *Mengen* handelt.

Ich habe in dieser Zusammenfassung gerade keinen Akzent auf die jeweilige Definition der immer als "in bestimmter Weise konstruierten" bezeichneten Objekte und Morphismen gelegt — obwohl darin natürlich entscheidende Beweisideen, "auf die man kommen muß", enthalten sind. Was ich dagegen hervorhebe, ist, daß der Beweis methodisch völlig der Mengenlehre verpflichtet ist (und nicht etwa mit elementaren Argumenten über Pfeile auskommt).

Keineswegs erschöpft sich die Aufgabe der KT darin, den Satz 1.10.1 beweisen zu können: Auch beim Beweis, daß Garben die Voraussetzungen des Satzes erfüllen (und also injektive Auflösungen haben), spielen kategorientheoretische Begriffe eine entscheidende Rolle. Darauf gehe ich in Abschnitt 3.3.4.3 näher ein; hier sei noch festgehalten, daß Grothendieck gegenüber Buchsbaum neue Konzepte ins Spiel bringt[219].

3.3.3.5 Bereitstellung von Spektralsequenzen durch injektive Auflösungen und der Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck

Bei [Serre 1955] blieben Probleme mit der Zariski-Topologie zu lösen; unter anderem konnten bestimmte Spektralsequenzen nicht aufgestellt werden (dies meinte Serre mit den *"méthodes utilisées par [[Leray 1950]] ou [SC 51/52]"*, vgl. 3.2.3.1). [Leray 1950] entwickelt seine Spektralsequenz-Theorie nur für separierte Räume, denn Lerays Räume sind lokalkompakt i.S. Bourbakis (ebd. S.41), d.h. stets Hausdorffsch. Der Fortschritt von Tohoku liegt darin, daß nun bestimmte Spektralsequenzen auch bezüglich der Zariski-Topologie aufgestellt werden können.

[219] Grothendiecks Begriff des *générateur* oder das Konzept von *AB 5* sind in [Buchsbaum 1955] nicht enthalten. Dies gilt wohl auch für die unpublizierte Fassung von Buchsbaums Dissertation: einmal aus inhaltlichen Gründen (vgl. etwa die Frage der unendlichen Summen, besprochen in 3.3.4.1); zum anderen schlägt Eilenberg Grothendieck vor, den Begriff des *générateur* und seine Axiome $C_{4,5,6}$ zu publizieren ⟨#54 S.123⟩ — und diesen Vorschlag hätte Eilenberg, dem es gerade darum ging, Überschneidungen zu Buchsbaum zu vermeiden, sicher nicht gemacht, wenn diese Dinge in Buchsbaums Dissertation vorhanden wären. Es ist wohl anzunehmen, daß das spätere *AB 5* unter $C_{4,5,6}$ zu finden ist, wenn nicht sogar mit C_5 übereinstimmt.

Aus der Intention der Spektralsequenzen als Werkzeug zum Berechnen von derivierten Funktoren zusammengesetzter Funktoren ergibt sich zunächst eine Anwendung des Konzepts innerhalb von Tohoku, nämlich die (bei ⟨#55 S.123⟩ vorgeschlagene) *comparaison entre la cohomologie traditionelle des faisceaux et celle que l'on obtient par* [le] *procédé* [de Grothendieck]. Vgl. in Tohoku den Abschnitt 3.8 (ebd. S.174ff). Grothendieck[220] erreicht eine Konstruktion parallel zu der, die Leray bereits in seinen Arbeiten von 1946 (vgl. dazu 3.2.1) angegeben hatte:

> [. . .] la suite spectrale reliant la cohomologie de Čech d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ à la vraie cohomologie est une application de la suite spectrale des foncteurs composés ; son terme E_2^{pq} vaut $H^p(\mathcal{U}, H^q(F))$ où $H^q(F)$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^q(V, F)$ (c'est le q-ième dérivé droit du foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux). [Houzel 1990, 19]

Das Konzept der Spektralsequenz ist aber auch ein Werkzeug für die Behandlung relativer Probleme (in Form der "Spektralsequenz einer Abbildung" im Anschluß an Lerays Studium von Abbildungen von 1946); dies führt zur ersten großen Anwendung der Resultate von Tohoku auf ein Problem der algebraischen Geometrie, zum Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck.

Der Satz von Riemann-Roch[221] war bis hin zu Hirzebruch ein Satz, der die Invarianten *einer* algebraischen Kurve miteinander verknüpft; dieser Satz wurde zunächst auf Flächen und schließlich von Hirzebruch auf beliebige algebraische Varietäten verallgemeinert [1956], bezog sich aber weiterhin auf eine feste Varietät. Grothendieck stellte den Satz in *relativer* Form auf, also nicht mehr für eine feste Varietät, sondern für einen *Morphismus von Varietäten* $X \to Y$ (die vorherige Fassung erhält man, wenn man für Y einen Punkt einsetzt). Die Vorteile dieser Vorgehensweise sind: 1) der Beweis ist flexibler, denn Morphismen kann man immer zerlegen, z.B. in Stücke der Dimensionsdifferenz 1 (so erhält man den klassischen Satz); 2) der Satz ist viel universeller anwendbar: man gelangt zu Aussagen über Scharen von Kurven. Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen den vorangegangenen Untersuchungen und dem von Grothendieck Erreichten ist, daß Grothendieck seinen Satz ausschließlich mit algebraischen Mitteln beweist[222].

Die Quelle für diesen Beitrag Grothendiecks ist [Borel und Serre 1958]; eine Zusammenfassung der wichtigsten Beweisideen bringt [Dieudonné 1990, 3ff]. Ich befasse mich hier nicht eingehend mit dieser Arbeit, möchte jedoch hervorheben, an welchen Stellen Tohoku von Belang ist. Es geht hier nicht mehr um eine Derivation

[220] Teilergebnisse in dieser Richtung scheinen von Cartan zu stammen; so schreibt Grothendieck an Serre am 16.01.1956: *"Cartan vient de trouver une suite spectrale (d'ailleurs celle de Leray) qui éclaircit bien les choses pour les relations entre la cohomologie fonctorielle, et celle calculée par recouvrements"*.

[221] Zur allgemeinen Geschichte des Satzes von Riemann-Roch verweise ich auf [Hulek 1997] sowie auf [Mumford 1971]. Außerdem sei auf die Dissertation von Jessica Carter hingewiesen [2002], in der anhand der Wandlungen des Satzes von Riemann-Roch (darunter auch Grothendiecks Beitrag) die verschiedenen derzeit kursierenden Vorschläge einer strukturalistischen Ontologie für die Mathematik (Maddy, Shapiro etc.) geprüft werden.

[222] [Mumford 1971, 88] gibt an, daß ein anderer algebraischer Beweis bei [Washnitzer 1959] zu finden sei.

von Γ, sondern von Funktoren f_*, $f_!$ etc.; dies sind Verallgemeinerungen von Γ, Konstruktionen auf Garben. Tohoku ist (vermöge der Spektralsequenz einer Abbildung) entscheidend für den "relativen" Akzent:

> Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'une variété Y, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau [...] algébrique
> #63 cohérent [...] sur X. On définit, par le procédé classique de Leray, des faisceaux $R^q f(\mathcal{F})$ sur Y en posant
>
> $$R^q f(\mathcal{F})_U = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \text{ pour tout ouvert } U \text{ de } Y.$$
>
> Pour $q = 0$, on trouve le faisceau associé au préfaisceau des $H^0(f^{-1}(U), \mathcal{F})$; c'est *l'image directe* du faisceau $\mathcal{F}$. On peut montrer (*cf.* Tohoku) que les $R^q f$ sont les *foncteurs dérivés* du foncteur $\mathcal{F} \mapsto R^0 f(\mathcal{F})$ (lorsque $\mathcal{F}$ parcourt la catégorie de tous les faisceaux sur X, cohérents ou pas).
>
> [...]
>
> #64 Signalons que la théorie de Leray se laisse transposer sans changements (cf. Tohoku) ; il y a une suite spectrale aboutissant à $H^*(X, \mathcal{F})$ et de terme $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f(\mathcal{F}))$ [...] [Borel und Serre 1958, 102].

Mit der *théorie de Leray* sind hier Spektralsequenzen gemeint. Eine solche von Tohoku gelieferte Spektralsequenz ist laut [Borel und Serre 1958, 111] auch erforderlich, um zu zeigen, daß $f_!$ (wie dort definiert) ein Funktor ist. An diesen Stellen wird deutlich, daß in [Serre 1955] Desiderata offenblieben: kohärente Garben lösen das Problem der Cohomologiesequenz, und doch ist bei Riemann-Roch (wo alle Garben als kohärent gedacht sind und wo gezeigt wird, daß dies dort keine Einschränkung ist) Tohoku erforderlich[223].

3.3.4 Grothendiecks KT und ihre beweistechnischen Aufgaben

3.3.4.1 Die Grundbegriffe: infinitäre Pfeilsprache

Grothendieck unterstreicht mit seinen Begriffsdefinitionen und Beweisstrategien einerseits die Bedeutung kategorientheoretischer Konzepte, scheint aber gleichzeitig dem herrschenden Paradigma treu zu bleiben, wonach alle mathematischen Objekte ontologisch letztlich Mengen bzw. Elemente von Mengen sind und insofern mit entsprechenden Methoden behandelt werden können[224]. Insbesondere ist es, wie wir

[223] Ein weiteres Problem relativer Natur, das im Fall der Zariski-Topologie auch durch die Beschränkung auf kohärente Garben nicht zu lösen ist, wird uns in Kapitel 4 begegnen: *One still lacks a good Lefschetz type formula for the number of fixed points of a mapping* [Gelfand und Manin 1996, 99]. Hier wird es erforderlich sein, einen anderen Topologiebegriff als den üblichen zu betrachten; trotzdem stehen die Errungenschaften von Tohoku weiter zur Verfügung. Dies ist eben die Stärke der großen Allgemeinheit der Resultate.

[224] Ich stelle dies oben am Beispiel des Beweises des Schlüsselresultats *théorème* 1.10.1. dar; die wesentliche Beobachtung ist, daß es ihm *deshalb* darum geht, bestimmte Konstrukte als Mengen ansprechen zu können, weil man auf diesem Wege Argumentationen über Mächtigkeiten zur Verfügung hat oder die Konstrukte zum Indizieren direkter Summen benutzen kann usw. Es geht ihm also mehr um die methodische als um die ontologische Seite des Paradigmas.

gesehen haben bzw. in 3.3.4.3 noch sehen werden, für seine Argumentation entscheidend, auf den betrachteten Kategorien unendliche Summen und ähnliche infinitäre Konstrukte zur Verfügung zu haben; seine Resultate hängen also von der Mengenlehre ab, sind nichtelementar.

Hier seien zunächst exemplarisch einige seiner zentralen Begriffsdefinitionen im Blick auf ihre Verwendung von KT- und Mengensprache besprochen.

> Soit donné une catégorie $\mathbf{C}$ et un morphisme $u : A \to B$ dans $\mathbf{C}$. Pour tout $C \in \mathbf{C}$, on définit une application $v \to vu : \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$ et une application $w \to uw : \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$. On dit que u est un *monomorphisme* ou que u est *injectif* (resp. que u est un *épimorphisme* ou que u est *surjectif*) si la première (resp. la seconde) des deux applications précédentes est toujours injective [S.122]

Da sich diese Definitionen von Mono- und Epimorphismus damit behelfen, daß eine Abbildung zwischen bestimmten Hom-Mengen injektiv im mengentheoretischen Sinne ist, machen sie auf den ersten Blick keinen diagrammatischen Eindruck. Diese Bewertung ist aber nicht fair, denn die Mono-Definition besagt: Für alle C gilt für $v, v' \in \mathrm{Hom}(C, A)$ mit $uv = uv'$ auch $v = v'$; ähnlich die Epi-Definition. Dies sind genau die üblichen diagrammatischen Charakterisierungen; vgl. etwa [Arbib und Manes 1975]! Insbesondere spielt die Gruppenstruktur der Hom-Mengen keine Rolle, sondern alles ist auf der Ebene der allgemeinen KT ausdrückbar, wenn nur die $\mathrm{Hom}(A, B)$ Mengen sind. Grothendieck verwendet lediglich eine recht umständliche Sprechweise, um rein kategorielle Dinge zu sagen: er spricht über zugehörige mengentheoretische Eigenschaften von passenden Mengenabbildungen (hier: der Rechts- bzw. Linksmultiplikation mit u) zwischen Hom-Mengen, wo er einfach die Gleichung hinschreiben könnte.

Im Blick auf spätere Untersuchungen ist zu dieser Beobachtung zweierlei festzuhalten:

- was ausgedrückt werden soll, kann prinzipiell in der Mengenlehre ausgedrückt werden (man faßt die Kategorieoperation als Abbildung zwischen Mengen auf und formuliert Eigenschaften dieser Operation als mengentheoretische Eigenschaften dieser Abbildung);

- ein solches Ausdrücken in der Mengenlehre wirkt artifiziell. Den Grund für dieses Gefühl, man mache hier einen "Umweg", kann man in der Sprache der mathematischen Logik so angeben: Es geht eigentlich um eine Sprache erster Stufe mit einem primitiven Prädikatszeichen Γ (*à la* Lawvere, vgl. 8.1.1), also um eine schwächere Sprache als ZFC.

Es macht den Eindruck, als sei Grothendieck irgendwie der Sichtweise "verhaftet", eine Zurückführbarkeit auf die Mengenlehre sei notwendig. Diese Einstellung liegt insofern nahe, als ihm, wie gesagt, an infinitären Konstruktionen in Kategorien gelegen ist; auch war ja der Text unter anderem als Beitrag zu Bourbakis *Éléments* angelegt, wodurch eine gewisse Bindung an mengentheoretische Ausdrucksmittel vorgegeben ist. Eine strikte Unterscheidung, was noch im elementaren Rahmen ausgedrückt werden kann und was tatsächlich höherer Ausdrucksmittel bedarf, ist aus Grothendiecks

Perspektive, wo es nicht um metamathematische Analyse geht, weniger relevant. Ein weiteres Beispiel:

> Considérons deux monomorphismes $u : B \to A$ et $u' : B' \to A$, on dit que u' *majore* ou *contient* u et on écrit $u \leq u'$, si on peut factoriser u en $u'v$, où v est un morphisme de B dans B' [...] On dira que deux monomorphismes u, u' sont *équivalents* si chacun majore l'autre, alors les morphismes correspondants $B \to B'$ et $B' \to B$ sont inverses l'un de l'autre. [...] Choisissons (par exemple au moyen du symbole à tout faire τ de Hilbert) [[225]] un monomorphisme dans toute classe de monomorphismes équivalents : les monomorphismes choisis seront appelés les *sous-trucs* de A. Ainsi, un sous-truc de A est, non un simple objet de $\mathbf{C}$, mais un objet B muni d'un monomorphisme $u : B \to A$. [...] La relation de la majoration définit une relation d'*ordre* (et non seulement de préordre) sur la classe des sous-trucs de A [S.123]

Auch die Faktorisierbarkeit ist eine rein kategorielle Sache[226]. Der Sinn der Äquivalenzrelation ist offensichtlich der, durch Identifikation von u, u' mit $u \leq u'$ und $u' \leq u$ eine Ordnungsrelation herzustellen (Erzwingen der Antisymmetrie). Beim Übergang zu infinitären Konstruktionen tritt dann naturgemäß der mengentheoretische Aspekt in den Vordergrund:

> Soient $A \in \mathbf{C}$, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de morphismes $u_i : A \to A_i$. Alors pour tout $B \in \mathbf{C}$, les applications $v \to u_i v$ de $\mathrm{Hom}(B, A)$ dans $\mathrm{Hom}(B, A_i)$ définissent une application naturelle
>
> $$\mathrm{Hom}(B, A) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(B, A_i)$$
>
> On dit que les u_i définissent une *représentation de A comme produit direct des A_i*, si quel que soit B, l'application précédente est bijective. [S.123]

Hier ist bijektiv im mengentheoretischen Sinn gemeint, da es um eine *application* (und nicht um einen *morphisme*) geht. Darüberhinaus hat man es hier tatsächlich mit einer mengentheoretischen und nicht mit einer kategoriellen Charakterisierung des Produkts zu tun, denn es geht nicht um Gleichungen zwischen (Kompositionen von) Morphismen. Vielmehr geht wesentlich ein, daß die Hom-Kollektionen Mengen sind, deren mengentheoretisches cartesisches Produkt definiert ist. Allerdings schließt sich die übliche diagrammatische Charakterisierung als Folgerung an; die direkte Summe ist dual definiert. Die Auswahl "des" direkten Produkts aus den verschiedenen isomorphen solchen Darstellungen nimmt man via τ vor. τ ist also dazu

[225] Zur Bezeichnung $\ulcorner\tau\urcorner$ ist eine Bemerkung angebracht. Bei Hilbert hieß der Auswahloperator $\ulcorner\epsilon\urcorner$; zur Wahl von $\ulcorner\tau\urcorner$ anstelle von $\ulcorner\epsilon\urcorner$ vgl. *Tribu 26* (1951.3) S.4 *"τ [...] remplacera ϵ pour raisons typographiques"*. Grothendieck kennt also Hilberts Formalisierung der Auswahl überhaupt nur durch die Bourbaki-Brille. In 6.4.3 komme ich auf die Diskussion Bourbakis über eine Ausdehnung des Auswahloperators auf echte Klassen zu sprechen.

[226] *"Alors les morphismes correspondants $B \to B'$ et $B' \to B$ sont inverses l'un de l'autre"* ist übrigens nicht mehr Bestandteil der Definition der ÄR, sondern bereits eine Folgerung, denn *"chacun majore l'autre"* heißt $u = u'v$ und $u' = uv'$, also $u = uv'v$ und $u' = u'vv'$, also, da u, u' beide mono sind, auch $v'v = \mathrm{Id}_B$ und $vv' = \mathrm{Id}_{B'}$.

da, auch mengentheoretisch die Identifikation der vielen bis auf Isomorphie gleichen Dinge vornehmen zu können. Dies ist sozusagen ein Stadium, das dem Wechsel des Identifikationskriteriums (5.3) vorangeht.

Man sollte hier klar festhalten: der historische Wurf besteht darin, mit einer infinitären KT etwas zu erreichen, anstelle mit einer finitären zu stagnieren. Dies wird besonders deutlich, wenn man einen Vergleich zieht zu den Definitionen, die Buchsbaum macht. Hervorzuheben sind zwei Kennzeichen:

- Buchsbaum verwendet von Anfang an die additiv-abelsche Struktur der exakten Kategorien in vollem Umfang; er zeigt also nicht auf, was sich auch in einem allgemeineren Rahmen definieren ließe.

- Buchsbaum verzichtet auf infinitäre Konstruktionen (d.h. auf einen Rekurs auf Mengenlehre[227].)

Z.B. definiert Buchsbaum Mono und Epi über exakte Sequenzen, charakterisiert also diese Begriffe auf der Ebene der *abelschen* KT und nicht auf der der allgemeinen KT. Außerdem hat er offenbar Probleme mit dem Begriff des unendlichen direkten Produkts bzw. der unendlichen direkten Summe[228]:

> As yet, we have found no efficient way of defining infinite direct sums and products in an arbitrary exact category $\mathcal{A}$.
>
> **Definition**. A family of maps
>
> $$A_\alpha \overset{l_\alpha}{\to} A \overset{p_\alpha}{\to} A_\alpha$$
>
> where α belongs to a finite set of indices, is a *direct sum representation* of A if
>
> $$p_\alpha l_\alpha = e_{A_\alpha}, p_\beta l_\alpha = 0 \text{ for } \beta \neq \alpha, \sum_\alpha l_\alpha p_\alpha = e_A.$$
>
> [Buchsbaum 1955, 21].

Dies ist einfach eine Übertragung der Charakterisierung für zwei Glieder auf n Glieder. Buchsbaum versucht offenbar, in Pfeilsprache (also nur über die *beiden* — im abelschen Fall — verfügbaren Pfeilverknüpfungen) auszudrücken, daß bestimmte Pfeile sich wie die Einbettungen und Projektionen einer direkten Summe verhalten. Dieses Vorgehen kann bei einer unendlichen Indexmenge natürlich nicht angewandt werden (vgl. die dritte der angegebenen Gleichungen). Auch geht die additive Struktur der Kategorie wesentlich ein, während Grothendieck seine Definition bereits im Fall allgemeiner Kategorien gibt (man würde hier sagen, Grothendieck findet den "richtigen Rahmen" für die Begriffe direkte Summe und direktes Produkt).

[227] Es fällt auf, daß Buchsbaum in seiner Arbeit nie anspricht, ob die Gruppen $H(A,B)$ *Mengen* sind (und dies augenscheinlich auch nie ausnutzt); da Buchsbaum sich auf [Mac Lane 1950] bezog, liegt es allerdings nahe, daß er diese Einschränkung gleichwohl hat machen wollen, denn dort ist sie Standard.

[228] [Grothendieck 1957, 127] verweist auf [Buchsbaum 1955] für Details der Theorie der abelschen Kategorien ohne beliebige direkte Produkte und Summen.

3.3.4.2 *schémas de diagrammes* und die Thematisierung von $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$

Wichtig für Grothendiecks Argumentation ist eine bestimmte Methode der Konstruktion neuer Kategorien aus gegebenen Kategorien; er spricht von *catégories définies par des schémas de diagrammes*; S.130ff). Ein *Diagrammschema* ist (in der Terminologie der Graphentheorie) ein (endlicher oder unendlicher) gerichteter Multigraph mit Schleifen; man kann dann die Ecken und Kanten dieses Graphen in naheliegender Weise den Objekten und Pfeilen einer gegebenen Kategorie $\mathbf{C}$ zuordnen und so in $\mathbf{C}$ Diagramme auszeichnen, die diesem Schema entsprechen; die Gesamtheit dieser Diagramme faßt man als eine Kategorie $\mathbf{C}^S$ auf (die formal wie eine Funktorkategorie aussieht). Allgemeiner kann man noch zusätzliche *relations de commutation* festlegen und gelangt zu einer Unterkatorie $\mathbf{C}^\Sigma$ von $\mathbf{C}^S$. Grothendieck behauptet die *proposition* 1.6.1, wonach für eine additive Kategorie $\mathbf{C}$ sich die ihn interessierenden wichtigen Eigenschaften auf $\mathbf{C}^\Sigma$ übertragen: Ist $\mathbf{C}$ abelsch, so auch $\mathbf{C}^\Sigma$; ähnlich für *AB 3* bis *AB 6*. Grothendieck gibt für diese Proposition keinen Beweis, zeigt aber für einige Beispielkategorien auf, daß sie als solch ein $\mathbf{C}^\Sigma$ aufgefaßt werden können — unter anderem ist dies für Prägarben der Fall (das System der offenen Mengen des Raumes wird als Diagrammschema aufgefaßt; S.133). Des weiteren zeigt die *proposition* 1.9.2 auf, wie man aus einem *générateur* für $\mathbf{C}$ einen für $\mathbf{C}^\Sigma$ erhält; hier wird der Beweis kurz angedeutet mit der Bemerkung *la vérification est immédiate* (S.135).

Grothendiecks Theorie der *catégories définies par schémas de diagrammes* entspricht bis zu einem gewissen Punkt Kans Vorgang bei dessen allgemeiner Limesdefinition (vgl. 2.6.2.3). Grothendiecks Stoßrichtung ist allerdings eine andere, nämlich die Bildung neuer Kategorien aus vorgegebenen entlang eines Schemas; es geht nicht um die Auszeichnung einer Konstruktion mit einer universellen Eigenschaft. Ihn interessiert, unter welchen Konstruktionen auf *Kategorien* Eigenschaften invariant bleiben, die die Existenz von genügend injektiven Objekten implizieren. Vgl. hier die Akzentuierung der Operation des Wechselns der Kategorie, die Grothendieck bei ⟨#46 S.123⟩ vornimmt.

Wie schon angedeutet (3.3.3.1), verwendet Grothendieck diese Begriffe in der funktoriellen Garbendefinition — selbstverständlich, um genau diese Ergebnisse über die Invarianz der für genügend Injektive garantierenden Eigenschaften nutzen zu können (s.u.). Zunächst erscheint eine solche funktorielle Garbendefinition allerdings als umständlich gegenüber der Verwendung von $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ als Urbildkategorie der Prägarben; wir werden aber in 4.1.2.2 sehen, daß Grothendieck später in der Tat Anlaß hatte, diese Wahl der Urbildkategorie als eine spezielle Wahl unter vielen möglichen (und sinnvollen) zu erkennen — $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ also zu *thematisieren*, nicht mehr intuitiv zu verwenden (vgl. Kapitel 1); Grothendieck führt dann den allgemeinen Begriff des *Situs* ein, welcher einen Typ von Kategorien bezeichnet, die als Urbildkategorien von Prägarben in Frage kommen. Womöglich besteht rückblickend ein Vorteil der Arbeit mit den *schémas de diagrammes* darin, daß man gerade deshalb für Garben, die auf einem solchen Situs definiert sind, eine Cohomologietheorie hat, weil ein Situs unter den Begriff der *catégorie définie par un schéma de dia-*

grammes fällt. Ich habe dies nicht geprüft; jedenfalls ist es nicht anzunehmen, daß Grothendieck bei der Abfassung der Tohoku-Arbeit diese Verallgemeinerung schon im Blick hatte.

3.3.4.3 Die Äquivalenz von Kategorien und ihre Rolle beim Nachweis, daß es genügend Injektive gibt

Wir haben gesehen, daß der Begriff der Äquivalenz zweier Kategorien von Bedeutung für Grothendiecks Arbeit war. Er definiert diesen Begriff folgendermaßen:

> Une *équivalence* d'une catégorie $\mathbf{C}$ avec une catégorie $\mathbf{C}'$ est un système (F, G, ϕ, ψ) formé de foncteurs covariants :
>
> $$F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}' \qquad G : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$$
>
> et d'homomorphismes de foncteurs
>
> $$\phi : 1_{\mathbf{C}} \to GF \qquad \psi : 1_{\mathbf{C}'} \to FG$$
>
> [. . .] tels que pour tout $A \in \mathbf{C}, A' \in \mathbf{C}'$, les composés
>
> $$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(\phi(A))} & FGF(A) & \xrightarrow{\psi^{-1}(F(A))} & F(A) \\ G(A') & \xrightarrow{G(\psi(A'))} & GFG(A') & \xrightarrow{\phi^{-1}(G(A'))} & G(A') \end{array}$$
>
> soient l'identité dans $F(A)$ resp. $G(A')$. [. . .] Deux catégories sont dites *équivalentes* s'il existe une équivalence entre ces catégories. On se permet alors couramment, dans le langage, de ne pas distinguer entre l'une et l'autre. Il importe cependant d'observer la différence de cette notion avec la notion beaucoup plus stricte d'isomorphisme (qui s'applique si on veut comparer des catégories qui sont des ensembles) [. . .] Aucune des équivalences de catégories qu'on rencontre en pratique n'est un isomorphisme. [Grothendieck 1957, 125]

(Grothendieck schreibt in der zweiten Folge fälschlich $G(\psi(A)), \phi^{-1}(G(A))$ über die Pfeile.)
Exkurs: In dieser Definition der Äquivalenz von Kategorien kommt offenbar die Definitionsgleichung einer Adjunktion vor[229]. Festzuhalten:

1) Grothendiecks Präsentation des Konzepts der Äquivalenz von Kategorien ist nicht zufriedenstellend[230], da er nicht klar sagt, daß ϕ und ψ Isomorphismen sein sollen (und nicht einfach nur funktorielle Morphismen). Gleichwohl scheint es mir sicher, daß er genau dies sagen wollte. Denn: Er spricht zwar von *"homomorphismes de foncteurs"* ϕ und ψ, behandelt sie aber so, als wären sie invertierbar, und er spricht

[229] Jean-Pierre Marquis, der mich auf diese Beobachtung aufmerksam gemacht hat, hat sie mehreren Forschern mitgeteilt und immer nur Erstaunen hervorgerufen; dies deutet darauf hin, daß Tohoku zumindest in manchen als weniger zentral eingestuften Abschnitten nicht sehr aufmerksam gelesen wurde. In 7.4.1 diskutiere ich Mac Lanes sehr lose Anknüpfung an Tohoku in seiner Diskussion der mengentheoretischen Grundlegung der KT.

[230] Er merkt dies später (SGA 1 Exp.VI S.3) auch an: *"la notion d'équivalence de catégories [. . .] n'est pas exposée de façon satisfaisante dans [[Grothendieck 1957]]"*.

explizit (hier im Zitat ausgelassen) über die aus ϕ hervorgehenden *"isomorphismes"* $\phi(A)$ und $\phi(B)$. Überdies: Hätte er tatsächlich versucht, das zu definieren, was man nachgerade Adjunktion zu nennen gelernt hat, und nicht das, was man nachgerade Äquivalenz zu nennen gelernt hat (er hätte dann eben nur eine Namensgebung vorgenommen, die nachgerade nicht beibehalten wurde), so könnte er nicht sagen: *"on se permet [. . .] de ne pas distinguer entre [les deux catégories équivalentes]"* — denn es gibt ja Adjunktionen zwischen Kategorien, die keineswegs äquivalent im heutigen Sinn sind und die offensichtlich zu unterscheiden sind (z.B. **Set** und **Grp**). Man müßte dann also annehmen, Grothendieck habe dies nicht bemerkt, und das erscheint mir doch etwas unwahrscheinlich. Im übrigen scheint mir seine Rede von *"homomorphismes de foncteurs"* bemerkenswert, direkt nachdem er bereits eine andere Sprechweise für dieselbe Sache eingeführt hat (nämlich *"morphismes fonctoriels"*, S.124). Dies scheint mir auf einen Druckfehler hinzuweisen; wie in 3.3.1.3 erläutert, hatte G. zunächst ein Manuskript vorbereitet, dessen Terminologie in manchen Punkten vom mittlerweile üblichen Gebrauch abweicht (ich habe in 3.3.2.2 das Beispiel *"classes abéliennes"* anstelle von *"catégories abéliennes"* diskutiert); später wurden diese Dinge geändert. Allerdings findet man noch in der publizierten Version Stellen, die der Korrektur entgangen sind; so eine Stelle könnte auch hier vorliegen. Insofern ist man also keineswegs gezwungen anzunehmen, Grothendieck habe hier tatsächlich *"homomorphismes de foncteurs"* sagen wollen.

2) Was Grothendieck demnach dort tut, wo es so aussieht, als definiere er Adjunktion, ist folgendes: er definiert Äquivalenz als einen Spezialfall dessen, was man nachgerade Adjunktion nennen wird; hierbei sind ψ (genauer gesagt ψ^{-1}) und ϕ das, was man später *"units of adjunction"* nennen wird — diese sind allerdings im allgemeinen Fall nicht notwendig Isomorphismen. Eigentlich sollten die (als Sequenzen geschriebenen) Gleichungen über ϕ und ψ nicht mehr Bestandteil der Definition selbst sein, da sie für *Iso*morphismen ϕ und ψ (und an solche scheint mir gedacht zu sein, vgl. 1)) automatisch wahr sind (also eine *Folgerung* aus der heute üblichen Definition von Äquivalenz, die vor dem *"tels que"* enden würde). Dies ist nicht schwer zu zeigen, vgl. etwa eine Übung bei [Barr und Wells 1985, 59]. Sollte Grothendieck dies nicht bemerkt haben, so glaubte er irrtümlich, nicht eine Folgerung aus seiner Definition zu ziehen, sondern sie um einen zusätzlichen Punkt zu ergänzen; gleichviel: bedeutsam wäre es herauszufinden, ob und wo er diese Eigenschaft benötigt hat *(Ende des Exkurses)*.

Die einzige (allerdings zentrale) Anwendung, die Grothendieck vom Begriff der Äquivalenz macht, ist die Äquivalenz der Kategorien E/X und $\mathrm{Shv}(X)$ (vgl. 3.3.3.1). Da der Nachweis dieser Äquivalenz und ihre Nutzung in anderen Nachweisen weitgehend implizit bleiben (also in der Tohoku-Arbeit nicht weiter ausgeführt werden), ist es schwer zu sagen, welche Rolle die darin enthaltene Adjunktion spielt[231]. Ich befasse mich hier noch kurz mit der Frage, wieso man zwischen diesen Kategorien

[231] Die Äquivalenz führt auf eine weitere Adjunktion (eine "echte", bei der die *units of adjunction* gerade keine Isomorphismen sind), nämlich die zwischen der Garbifizierung und dem Inklusionsfunktor der Garben in die Prägarben. Im *setting* von [Gelfand und Manin 1996, 114] wird diese Adjunktion für den Nachweis, daß Garben eine abelsche Kategorie bilden, genutzt.

wechseln dürfen möchte. Im SC scheinen wesentliche Teile des Nachweises, daß E/X abelsche Kategorie ist, enthalten; Grothendieck zeigt ein Problem mit Kokernen auf. Wesentlich ist die Möglichkeit des Wechsels zwischen $\text{Shv}(X)$ und E/X jedenfalls beim Nachweis der Existenz genügend injektiver Objekte: *"Les conditions du théorème [1.10.1] sont stables par passage à certaines catégories de diagrammes (cf. prop. 1.6.1 et 1.9.2), où l'existence de suffisamment d'objets injectifs n'est pas toujours visible à l'œil nu"* (S.137). Somit kann man also das Faktum, daß Prägarben von abelschen Gruppen *AB 5* erfüllen und einen *générateur* haben, daraus schließen, daß dies für abelsche Gruppen der Fall ist (und das ist so, vgl. S.134 für *générateur* bei Moduln, S.129 für *AB 5* bei Gruppen).

Um diese Resultate für *Garben* zu haben, geht Grothendieck so vor (S.155): eine direkte Summe erhält er via Garbifizierung; eine *famille de générateurs* wird direkt angegeben — also *nicht* unter Verwendung der Proposition 1.9.2 postuliert. Der *générateur* wird als die direkte Summe der *famille* genommen; man benutzt also *AB 3* für Prägarben. Und hier ist nun die entscheidende Stelle, an der die kategorielle Definition von Prägarben zum Tragen kommt: daß die Prägarben *AB 3* erfüllen, hat man aus der oben angesprochenen *proposition* 1.6.1. Wie sagt doch Buchsbaum: Er sieht bislang keine Möglichkeit, unendliche Summen allgemein für eine exakte Kategorie zu definieren (3.3.4.1). Grothendieck gibt eine Möglichkeit der Übertragung von einer abelschen Kategorie, von der man schon weiß, daß sie *AB 3* erfüllt, auf eine andere abelsche Kategorie *("schéma de diagrammes")*, z.B. von abelschen Gruppen auf Prägarben von abelschen Gruppen. Buchsbaum sucht eine "Definition" im folgenden Sinn: eine Angabe darüber, wie man aus vorgegebenen Objekten einer exakten Kategorie ein solches Objekt *bilden* kann. Dies kann man natürlich gar nicht notwendigerweise; Grothendieck grenzt Situationen ab, in denen man es kann (hinreichende Existenzbedingungen).

Zusammenfassend sind die jeweiligen spezifischen Leistungen der beiden Garbendefinitionen die folgenden:

- mit der funktoriellen Definition kann man leicht nachweisen, daß Prägarben *AB 3* erfüllen, und somit letztlich, daß es genügend injektive Objekte gibt;

- die topologische Definition ist bereits entscheidend, um den Funktor Γ überhaupt definieren zu können (hierin steckt die ganze Motivation des Garbenkonzepts); der Nachweis, daß die Garben *AB 3* erfüllen, kann dank Garbifizierung aus dem zugehörigen Nachweis für Prägarben abgeleitet werden.

Dieses Zusammenspiel ist die Ausbeutung der *analogie formelle* und findet seinen konkreten Ausdruck in der Äquivalenz der Kategorien.

Hier ist nochmals zu unterstreichen, daß die KT keineswegs nur im Zusammenhang der "rein kategorientheoretischen" Aussage 1.10.1 eine Rolle spielt; auch zum Nachweis der Aussage über Garben wird sie benötigt — und steht dank funktorieller Garbendefinition und kategorieller Äquivalenz der beiden Definitionen zur Verfügung.

3.3.4.4 Exkurs: *diagram chasing* und das *full embedding theorem*

Mit dem Übergang von Kategorien von Moduln zu abelschen Kategorien im allgemeinen stellt sich natürlich nicht nur die Frage, welche Sätze gültig bleiben, sondern auch die, welche Beweisverfahren anwendbar bleiben; diese letztere Frage sollte im Zusammenhang der beweistechnischen Aufgaben der KT in der homologischen Algebra Grothendiecks angesprochen werden. Hartshorne schildert die Problematik und ihre Bearbeitung so:

> [The] basic results of homological algebra [can be stated] in the context of an arbitrary abelian category. However, in most books, these results are proved only for the category of modules over a ring, and proofs are often done by "diagram chasing": you pick an element and chase its images and pre-images through a diagram. [...] diagram chasing doesn't make sense in an arbitrary abelian category [...]. There are at least three ways to handle this difficulty. (1) Provide intrinsic proofs for all the results, starting from the axioms of an abelian category, and without even mentioning an element. [[Freyd 1964]] Or (2), note that in each of the categories [used in [Hartshorne 1977]], one can in fact carry out proofs by diagram chasing. Or (3), [...] the "full embedding theorem" [[Freyd 1964, Kapitel 7]] states roughly that any abelian category is equivalent to a subcategory of [the category of abelian groups]. This implies that any category-theoretic statement [...] which can be proved in [the category of abelian groups] (e.g., by diagram-chasing) also holds in any abelian category. [Hartshorne 1977, 203]

Die Situation ist die folgende: Bezieht man sich nur auf die Definition des Begriffs ◁abelsche Kategorie▷, hat man keine Elemente zur Verfügung; dies meint Hartshorne, wenn er sagt: *"diagram chasing doesn't make sense in an arbitrary abelian category"*. Genau so ist gemäß Freyds Vorwort[232] die Abwesenheit von Elementen (die dazu führt, daß die Beweise *"painfully difficult"* werden; S.9) zu verstehen: in der allgemeinen Definition von ◁abelsche Kategorie▷ wird eben nicht angenommen, die Objekte mögen Elemente haben *(we throw away the elements [...] we will use the words "object" and "map" as primitives*; S.4)[233]. Es handelt sich also um ein beweistechnisches Problem; keinesfalls wird behauptet, es gäbe konkrete abelsche Kategorien, deren Objekte keine Elemente haben. Im Gegenteil sagt das schließlich gefundene *full embedding theorem* (im Folgenden kurz fet) gerade aus, daß jede abelsche Kategorie "Elemente hat" (nämlich die Elemente des Bildobjekts unter der Einbettung; [Lubkin 1960, 410]). Es ist also keinesfalls der Clou von Tohoku, Ergebnisse für eine abelsche Kategorie erhalten zu haben, für die man nicht mit *diagram chasing* auskommt; es ist ja gerade der Inhalt des fet, daß es solche Kategorien gar

[232] Eine weitere Originalarbeit zum Thema ist [Lubkin 1960]; vgl. auch [Weibel 1999, 816].

[233] Wie wir in 5.3.1.2 sehen werden, hat man aus dem Umstand, daß "Objekt" in der KT ein undefiniertes Prädikat ist (insbesondere daß nicht zwingend angenommen wird, man habe es mit Mengen zu tun) noch weitergehende Ideen abgeleitet: Man hat der Redeweise "Elemente haben" einen Sinn innerhalb der KT gegeben, abweichend vom üblichen mengentheoretischen Sinn, und aufgezeigt, daß es tatsächlich Kategorien gibt, in denen manche Objekte in diesem neuen Sinn keine Elemente haben.

nicht gibt. Grothendiecks Behandlung der von dieser Problematik betroffenen Ergebnisse über abelsche Kategorien sieht weitgehend so aus, daß er angibt, alles ginge "so ähnlich wie in [Cartan und Eilenberg 1956]"; das fet erfüllt also eine wichtige Aufgabe bei der Ergänzung der Beweise in Tohoku.

Der (Freydsche) Beweis des fet läuft so, daß zunächst erklärt wird, was der *representation functor* in eine Funktorkategorie ist; dann wird die Kategorie der linksexakten Funktoren von einer kleinen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ in die Kategorie der abelschen Gruppen betrachtet; es wird gezeigt, daß der *representation functor* die Urbildkategorie $\mathcal{A}$ in diese Funktorkategorie in der gewünschten Weise einbettet; zusätzlich wird gezeigt, daß diese Funktorkategorie zu einem Typ von Kategorien gehört, für den allgemein das fet richtig ist, so daß man die insgesamt gesuchte Einbettung durch Zusammensetzen erhält. Hierfür sind also Funktorkategorien von Bedeutung!

3.4 Zwischenergebnisse

3.4.1 Transformation des Begriffs Homologietheorie: Der Akzent auf der abelschen Variable

Den hauptsächlichen Unterschied zwischen den Homologie- und Cohomologietheorien i.S. Eilenberg-Steenrods und den im vorliegenden Kapitel untersuchten Cohomologietheorien heben Gelfand-Manin hervor:

> The break with the axiomatic homology and cohomology theory of Eilenberg and Steenrod is in that now an abelian object (a sheaf) rather than a non-abelian one (a space), serves as a variable argument in a cohomology theory [Gelfand und Manin 1996, vi].

Diese Umstellung ist von entscheidender Bedeutung für die im vorliegenden Kapitel dargestellten Unternehmungen. Ich möchte sie hier in einigen Punkten noch einmal nachzeichnen.

Bereits in der Perspektive von [Eilenberg und Mac Lane 1942a] lag ein Schwerpunkt auf dem Variieren von Koeffizientengruppen, nicht auf dem von Räumen. Daher schließt in [1945] an die Wiedergabe des (i.d.v.A. bei 2.2.4 zitierten) uct für Komplexe K und Koeffizientengruppen G (mit den Isomorphismen $Q^q(K,G) \cong \mathrm{Ext}(H_{q+1}(K,\mathbb{Z}),G)$, $H^q(K,G)/Q^q(K,G) \cong \mathrm{Hom}(H_q(K,\mathbb{Z}),G)$) die Bemerkung an:

> Both [...] isomorphisms [...] can be interpreted as equivalences of functors. The naturality of these equivalences with respect to K has been explicitly verified [*Originalverweis auf* [1942a, 815]], while the naturality with respect to G can be verified without difficulty. [1945, 290]

Hier wird also bereits prinzipiell anerkannt, daß man es mit zwei Variablen zu tun hat, für die man jeweils mit gleichem Recht gewisse dem Kalkül entspringende Fragen stellen kann. Allerdings war die Natürlichkeit der Isomorphismen im Blick auf die erstgenannte, "nichtabelsche" Variable noch von größerer Bedeutung für die Ergebnisse von Eilenberg-Mac Lane, da es um die Stabilität der Isomorphismen beim Übergang von einem Komplex zu einer Verfeinerung ging.

Der Gedanke der Akzentverschiebung von der nichtabelschen auf die abelsche Variable kommt in der Ummünzung der exakten Cohomologiesequenz zum Ausdruck. Eine exakte Cohomologiesequenz für Garbencohomologie hätte im Stil von Eilenberg-Steenrod wohl Abschnitte der Form

$$H^n(X,F) \to H^n(A,F) \to H^n(X \setminus A, F) \to H^{n+1}(X,F) \cdots$$

(die Garbe F dient als "lokales Koeffizientensystem"; in der Sequenz variieren die topologischen Räume $X \supset A, X \setminus A$), während die Cartan-Grothendiecksche Garbencohomologie Sequenzen mit Abschnitten der Form

$$H^n(X,F') \to H^n(X,F) \to H^n(X,F'') \to H^{n+1}(X,F') \cdots$$

kennt, wobei $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben ist. Hierbei steht die Exaktheit von $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ mit der "alten" Situation so in Beziehung, daß die Situation $X \supset A, X \setminus A$ zunächst zu einem entsprechenden kurzen exakten Kettenkomplex führt — wobei die Gruppen dieses Komplexes ursprünglich Gruppen von Ketten im geometrischen Sinn sind. Dies scheint bei [Kelley und Pitcher 1947, 687] der Ursprungskontext des Begriffs der exakten Sequenz zu sein[234]. Diese kurze exakte Sequenz ist dann die Ausgangssequenz für die lange exakte Cohomologiesequenz. Bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 11] wird keine exakte Ausgangssequenz hingeschrieben, nur die Situation $X \supset A, X \setminus A$, weil die exakte Sequenz von Komplexen nur mehr ein Zwischenschritt ist, der nicht in der Axiomatisierung sichtbar wird, sondern in den Existenzbeweisen.

Gleichzeitig kommt der Akzent auf der abelschen Variable natürlich von solchen Theorien wie Gruppencohomologie her, wo es einfach keine nichtabelsche Variable gibt. Insofern entspricht die Gegenüberstellung von nichtabelscher und abelscher Variable auch der Gegenüberstellung von algebraischer Topologie und homologischer Algebra. Z.B. ist bei Leray die Spektralsequenz ein Werkzeug für algebraische Topologie (Cohomologie von Faserräumen); ähnlich Borels *espace classifiant* (vgl. 5.3.2.1). Die *analogie formelle* bzw. die Äquivalenz von Kategorien stellt die Verbindung her (erlaubt die Betonung der abelschen Variable dank der Definierbarkeit von Γ). $\Gamma_\Phi(F)$ ist Abkürzung für $\Gamma_\Phi(X,F)$ (SC 50/51 (15-03), [Grothendieck 1957, 157]); ein nichtabelscher Parameter erscheint gar nicht (er ist im Falle globaler Schnitte auch keine Variable von Γ; wohl aber könnte X prinzipiell in der entstehenden Cohomologietheorie als Variable behandelt werden — und dies wäre auch die klassische Sicht einer Cohomologietheorie).

3.4.2 Zwei weitgehend getrennte *communities*

Man kann aus dem im Kapitel zusammengetragenen Material den Schluß ziehen, daß die Beschäftigung mit KT in den USA und in Frankreich zunächst weitge-

[234][Dold 1980, 32] erklärt den Zusammenhang für die singuläre Theorie.

hend unabhängig nebeneinander herliefen. Dies ist in den Zeiten kurz nach dem Krieg leicht zu erklären; beispielsweise war Leray während seiner Gefangenschaft bis Kriegsende zweifellos nicht in der Lage, sich mit den neuesten Entwicklungen in Amerika vertraut zu machen[235]. In späteren Jahren fallen äußere Erschwernisse der Kommunikation als Erklärung weg (im Gegenteil bestand ja über Eilenbergs Bourbaki-Mitgliedschaft und insbesondere seine Zusammenarbeit mit Cartan eine direkte Verbindung, die auch gepflegt wurde); in dieser Phase scheint das Getrenntsein der *communities* eher auf divergierenden Hauptinteressen zu beruhen[236].

Die in Eilenbergs Nachlaß in der *Columbia University* zu findenden an Eilenberg gerichteten Briefe geben einigen Aufschluß über die Situation in den späten fünfziger Jahren. Alex Heller, einer von Eilenbergs Doktoranden, hielt sich offenbar Anfang 1958 am IHP in Paris auf (dies exemplifiziert das Funktionieren der Eilenberg-Cartan-Verbindung); von dort schrieb er am 04.03.1958 an Eilenberg: *"Everybody does algebraic geometry here, topology is unheard of [...] I wonder what sort of market there would be for abstract homological algebra here"*. Eine solche Frage ist kurz nach dem Erscheinen von [Grothendieck 1957] erstaunlich; allerdings ist es tatsächlich so, daß Grothendieck sich für homologische Algebra nur im Blick auf die algebraische Geometrie interessierte. Wenn Heller von *abstract homological algebra* spricht, so denkt er zweifellos an die von Buchsbaum und ihm selbst unternommenen Arbeiten zu Verallgemeinerungen des Begriffs der abelschen Kategorie, insbesondere zu den Versuchen, etwas über das Derivieren von Funktoren zu sagen in Situationen, wo es nicht genügend Injektive gibt[237]. Die *communities* sind nicht einfach nur "getrennt"; man kann hier etwas feiner unterscheiden. Buchsbaum und Heller bemühen sich stets, die Anwendbarkeit ihrer abstrakten Methoden für die Problemstellungen der algebraischen Geometrie aufzuzeigen; allein von französischer Seite bleibt das Echo aus.

Eilenberg selbst bemühte sich offenbar, frühzeitig [Grothendieck 1957] und [Godement 1958] zu Gesicht zu bekommen, und hatte damit zunächst wenig Erfolg. In dieser Sache schrieb am 11.07.1957 Jean-Pierre Serre an Eilenberg, ohne ihm viel Hoffnung machen zu können. Godement entschuldigte sich in einem Brief an Eilenberg vom 07.09.1957 dafür, daß er Eilenberg kein Exemplar der *épreuves* von [Godement 1958] schicken könne, da er selbst zu diesem Zeitpunkt nur ein einziges habe.

Hat man im Falle Grothendiecks Anlaß, ein zu geringes Interesse an der Arbeit der anderen *community* zu beklagen (3.3.2), so fällt bei Eilenberg und Mac Lane auf, daß es ihnen zumindest in frühen Jahren sozusagen an missionarischem Eifer mangelt: Sie lassen zahlreiche Gelegenheiten ungenutzt, in den von ihnen verfaßten *Reviews* der Arbeiten der anderen *community* auf latente Bezüge zur KT hinzu-

[235] Ähnlich hat Samuel, ohne einen Bezug zur KT herzustellen, den Begriff des universellen Problems untersucht, vgl. 6.3.2.1.

[236] Es gab andere Kontakte, z.B. Grothendiecks Kansas-Aufenthalt. Aber Grothendieck wird nicht von der KT-*community* in die Vereinigten Staaten eingeladen (sondern, wie Serre sich zu erinnern glaubt, von Aronszajn wegen EVT, vgl. 3.3.1.2); ähnlich steht es um andere Kontakte.

[237] [Buchsbaum 1959;1960], [Heller 1958], [Heller und Rowe 1962].

weisen. Dabei hätten solche Hinweise offenbar sowohl helfen können, die KT besser bekannt zu machen, als auch, die *communities* einander näher zu bringen. Eilenbergs *Review* zu Leray, wie dargestellt in 3.2.1.2, steht da nicht allein: der *Review* zu [Samuel 1948] stammt von Mac Lane; dieser erwähnt nicht die "Nähe" von Samuels Gegenstand und Methode zur Kategorientheorie. Auch der *Review* zur ersten Auflage von Bourbakis multilinearer Algebra ist von Mac Lane (MR 10,231d); dort findet der Anhang zu universellen Problemen nur in dem lapidaren Satz *"Appendices treat [. . .] the 'universal mapping' question"* Erwähnung; vgl. 6.3.2.1. Nicht einmal als sich Eilenberg die Gelegenheit bietet, in einem *Review* zu einer Arbeit Steenrods (also eines Mitglieds der eigenen *community*) die latente Verwendung von KT-Konzepten aufzuzeigen, ergreift er diese; vgl. Anm. 315. Man könnte nun anmerken: Von dem Referenten wird erwartet, der Versuchung, auf Bezüge des referierten Textes zu seiner eigenen Arbeit hinzuweisen, jedenfalls dort zu widerstehen, wo ein solcher Hinweis nicht aus Gründen der Feststellung von Priorität o.ä. erforderlich ist. Denn ein *Review* hat nicht die Aufgabe, solche Hinweise zu geben (oder er hat sie jedenfalls nicht primär, während er primär möglichst kurz zu sein hat und sich auf das Wesentliche des referierten Textes konzentrieren sollte; daß es Bezüge zwischen der Arbeit des Autors und der des Referenten gibt, ist dem Leser des *Reviews* letztlich ja schon dadurch klar, daß der jeweilige Referent überhaupt ausgewählt wurde). Andererseits sind solche Hinweise im allgemeinen häufig anzutreffen (insbesondere auch in späteren *Reviews* von Mac Lane), so daß es schon erstaunt, daß sie hier durchweg fehlen — zumal die inhaltlichen Berührungspunkte so offensichtlich sind.

3.4.3 Urteile über die Bedeutung von Grothendiecks Beitrag

Man findet in der Geschichtsschreibung der Protagonisten zahlreiche Bemerkungen zur herausragenden Bedeutung Grothendiecks, insbesondere seiner Tohoku-Arbeit, für die historische Entwicklung der KT. Stellvertretend gebe ich hier drei Einschätzungen wieder:

> [The] first papers on categories had no immediate sequels, because for this period they provided just a language. The notion of category theory as a subject of study in its own right appears only in the third phase of the abstract algebra movement [*mit der "third phase" ist hierbei* "1957-1974, [a period] under the influence of Grothendieck, algebraic geometry, and category theory" *gemeint (ebd. S.4)*]. [Mac Lane 1981, 24]

> [Grothendieck and Buchsbaum extended] a mathematical theory [the homological algebra of [Cartan und Eilenberg 1956]] beyond its original domain and made [it] available in new contexts which turned out to be very significant.
>
> Category theory then began to develop as an autonomous discipline. Some mathematicians [. . .] came to describe themselves as category-theorists or categorists. Conferences were devoted to category theory [. . .] [Hilton 1981, 81]

> [[Grothendieck 1957]] demonstrated that categories could be a tool for actually *doing* mathematics and from then on the development was rapid. [Barr und Wells 1985, 62]

Diese drei Zitate enthalten einige interessante Behauptungen über die Geschichte der KT und die Rolle dieser Theorie vor und nach Grothendieck. Auf einen Teil dieser Behauptungen gehe ich in den nächsten Abschnitten ein: In 3.4.3.1 beschäftige ich mich zunächst mit dem Akzent auf der besonderen Bedeutung Grothendiecks und seiner Innovationen für die Entwicklung der KT zu einer selbständigen Forschungsdisziplin (Mac Lane, Hilton); in 3.4.3.2 geht es um die Gegenüberstellung von "Sprache" *(language;* Mac Lane) und "Werkzeug" *(tool;* Barr & Wells).

3.4.3.1 Grothendieck als Urheber einer selbständigen Forschungsdisziplin KT?

Es war offenbar keineswegs Grothendiecks erklärte Absicht, eine selbständige Forschungsdisziplin "Kategorientheorie" zu schaffen; er suchte nach konzeptuellen Werkzeugen für anderweitig gegebene Probleme bzw. nach Konzepten für den begrifflichen Aufbau einer anderen Disziplin (der algebraischen Geometrie; vgl. auch Kapitel 4). Daß die selbständige Forschungsdisziplin gleichwohl in gewissem Maße tatsächlich entstand, mag man als halb zufälliges Nebenprodukt von Grothendiecks Aktivität beschreiben. Man hat sich also zu fragen: Welche Funktion hat es, die Entstehung der selbständigen Forschungsdisziplin KT mit Grothendieck in Verbindung zu bringen? In solchen Fällen, wo eine engere Verbindung zwischen einer Forschungsrichtung und einem Forscher(kreis) behauptet wird, als sich tatsächlich verifizieren läßt, ist es meist eine fruchtbare Hypothese, daß es in irgendeiner Form um Relevanz geht; im vorliegenden Fall gäbe es also zwei mögliche Funktionen: die Bedeutung Grothendiecks zu unterstreichen, und die Bedeutung der KT zu unterstreichen, jeweils unter Bezug auf die jeweils andere Bedeutung.

Im ersten Fall wäre die Aussage: "Seht ihr, Grothendieck muß ein bedeutender Mathematiker sein; er war es, der — neben seinen übrigen Leistungen — die bedeutende KT zur eigenständigen Forschungsdisziplin erhoben hat"; im zweiten Fall: "Seht ihr, die KT muß wichtig sein, denn niemand anderer als der große Grothendieck hat sich ihrer als Methode bedient und sie sogar noch ausgebaut". Da über die Bedeutung Grothendiecks wohl eher Konsens besteht als über die Wichtigkeit der KT[238], und da die wiedergegebenen Aussagen jeweils aus Würdigungen der KT stammen, ist wohl eher an zweitere Aussage gedacht.

Wie steht es nun allgemein aus methodischer Sicht um Urteile der Art "dort und dort ereignete sich ein sprunghafter Fortschritt"? [Grosholz 1992, 117] erkennt: *"The term revolutionary has* [...] *a honorific sense in the philosophy of science"*; zeichnet man jemandes Beiträge zu einer Wissenschaft als revolutionär aus, so will man seine

---

[238] Wegen der KT vgl. 0.1.

Bedeutung für den Fortgang der Wissenschaft hervorheben (im Falle Grothendiecks gehe ich auf diese "hagiographischen" Tendenzen am Anfang von Kapitel 4 nochmals ein). Methodisch bedeutet die Hervorhebung von Innovation, Sprunghaftigkeit allerdings, einen besonderen Akzent auf diskontinuierliche Aspekte der Geschichte der Disziplinen zu legen. Für ein umfassendes Verständnis der historischen Vorgänge sind aber zugleich die eher kontinuierlichen Aspekte von Interesse (zumal es ja diese sind, anhand derer die Disziplin "vorher" mit der Disziplin "nachher" überhaupt identifiziert werden kann). Kontinuierliche Aspekte der Begriffsbildungsprozesse, die Disziplinabgrenzungen intern zugrundeliegen, sind z.B. die "Theoriekopie" (vgl. S.199) und das Übertragen von Intuitionen (vgl. Abschnitt 1.2.4). Diskontinuierliche Aspekte sind die Phänomene der Verselbständigung, vgl. 1.1.1. Insgesamt halte ich es für geboten, nicht bei einem Akzent auf Diskontinuierlichem stehen zu bleiben.

Im Zusammenhang mit Grothendieck gibt es auch Äußerungen, die gleichzeitig kontinuierliches und diskontinuierliches an diesen Ereignissen hervorheben: [Mac Lane 1981, 25] *"Grothendieck's work was a direct sequel to the influence of Bourbaki. Bourbaki had organized the exposition of mathematics by putting the right general concepts first. Grothendieck turned this systematic use of generality into an explicit tool for research"*.

3.4.3.2 Von der "Sprache" zum "Werkzeug"?

Die Rede bei Barr und Wells bzw. Mac Lane vom *tool for actually doing mathematics* bzw. *explicit tool for research* steht im Zusammenhang der KT nicht allein. Zu einem anderen Feld kategorientheoretischer Forschung äußert sich [Corry 1996, 381] so: *"Ehresmann's theory was not just a language allowing a better reformulation of existing results, but also an effective research tool leading to the discovery and proof of new results"*. Hier wird also eine Opposition hergestellt zwischen *language* als Sprache für Bekanntes und *tool* als Hervorbringungsmittel für Neues. Mac Lane kommt an verschiedenen Stellen auf den Gedanken zurück, die KT sei zunächst nur eine solche "Sprache" gewesen[239]. Genauer war die KT in jener Frühzeit nicht nur einfach Sprache, sondern *langage précis* [Eckmann 1998, 33]. Im Blick auf die Überlegungen des Abschnitts 1.3.4 zum Sinn des Worts "präzise" liegt folgende Interpretation der Rede von *langage précis* nahe: Der Fortschritt, der durch die Verwendung als Sprache erreicht wird, betrifft den Kommunikationsanteil (man hat nun ein Mittel, dies oder jenes präzise auszudrücken); die ausschließlich als Spra-

[239] *"Initially, categories were used chiefly as a language, notably and effectively in the Eilenberg–Steenrod axioms for homology and cohomology theories"* [1971b, 29f]; ähnlich [1989, 3]. Im deutschen Titel von [1971b] "Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie" sind beide Seiten enthalten. (Daß die Prägung des deutschen Titels, der von dem Originaltitel so stark abweicht, zumindest in Abstimmung mit Mac Lane erfolgt ist, wenn nicht sogar überhaupt von ihm stammt, ist sehr wahrscheinlich, schon wegen der Gepflogenheiten im Verlagswesen, aber auch, weil Mac Lane ja selbst Deutsch spricht. Einen Beleg dafür habe ich nicht. Während der Originaltitel eine offensichtliche Anlehnung an [Bourbaki 1949] ist, könnte man es hier mit einer Anlehnung an Freges "Begriffsschrift" zu tun haben.)

che verwendeten mathematischen Objekte dringen jedoch nicht auf die Ebene der selbständigen Signifikationen vor, kurz: sie haben keine eigenständige Bedeutung.

Die Gegenüberstellung Sprache-Werkzeug[240] geht im Fall Grothendiecks auf den Unterschied zwischen deskriptiven und deduktiven Beiträgen eines Sprachrahmens, zwischen Ausdrucksmittel und Deduktionsmittel. In der Zeit vor Grothendieck dienen kategorientheoretische Konzepte ausdrücklich meist der Erleichterung der Diskussion, als deskriptiv-organisatorischer Sprachrahmen: Bei [Eilenberg und Steenrod 1952] war dies so, wie wir in 2.5.3 gesehen haben; ähnlich heißt es bei [Cartan und Eilenberg 1956, vi] *"to facilitate the discussion of this behaviour [of tensor product in relation to monomorphisms, submodules, quotient modules etc.] we adopt diagrammatic methods".* Hingegen geht es Grothendieck nicht mehr nur um eine *Beschreibung* der *analogie formelle* — sondern diese soll *ausgebeutet* werden ⟨#37 S.108⟩; es geht um deduktive Ausschöpfung der Begriffsinhalte (durch tiefliegende Resultate wie z.B. solche, daß mit gewissen Kategorien auch gewisse aus diesen konstruierte Kategorien gewisse Eigenschaften haben). Anstelle des Ausdruckspotentials wird nun das Deduktionspotential der KT untersucht. Ein Beispiel ist Grothendiecks Erkennen der Möglichkeiten des vermeintlich artifiziellen Konzepts ◁injektives Objekt▷ (vgl. 3.3.3.3). Zur Formulierung bekannter Resultate war dieses Konzept nicht dringend erforderlich, zur Erarbeitung der neuen Resultate sehr wohl.

Ein Zusammenhang der Eliminierbarkeit im systematischen Sinn[241] zur Unterscheidung von Ausdruckspotential und Deduktionspotential besteht nur scheinbar, denn zwar ist Eliminierbares deduktiv neutral — es ist allerdings auch expressiv neutral (man kann strenggenommen damit auch nicht mehr ausdrücken als ohne). Die Unterscheidung geht eben nicht darauf, was mit der KT prinzipiell getan werden *kann* (da ändert sich trivialerweise nichts mit Grothendieck gegenüber vorher), sondern was tatsächlich damit getan *wird*. Es handelt sich also um eine historische Fragestellung, keine systematische. Daß "die KT" systematisch vorher und nachher "die gleiche" ist, soll einfach heißen, daß Grothendieck inhaltlich keine andere Definition der Grundbegriffe gegeben hat als Eilenberg und Mac Lane. Was sich ändert, ist der Umgang mit diesen Grundbegriffen, die Verwendungsperspektive. Dies ist m.E. ein erstes Anzeichen einer Verschiebung des *common sense*: War die Rede von Kategorien zuvor zumeist Mittel zum Ausdruck von auf anderer Ebene ermittelten Sachverhalten, so werden bei Grothendieck Kategorien in stärkerem Maße selbst Gegenstand der Untersuchung und Basis von Konstruktionen. Die "systematische" Perspektive tut sich hier schwer, ihre erkenntnistheoretische Aufgabe wahrzunehmen, denn die Bemerkung, daß die Dinge vorher und nachher "eigentlich" dasselbe sind, ist eher hinderlich als hilfreich bei der Analyse des unleugbar vorhandenen Wandels in den Zugangsweisen zu den "selben" Gegenständen. Diese Bemerkung ist zwar notwendige Voraussetzung für die Debatte: wären die Dinge nicht über den Wandel hinweg "systematisch" identifizierbar, so hätte man keinen Ansatzpunkt, überhaupt über eine Veränderung des Zugangs zu sprechen. Aber die Bemerkung

[240] Über die Verwendung des Wortes *"tool"* durch Mathematiker habe ich in [Krömer 2001a] einiges gesagt.

[241] Vgl. ⟨#112 S.299⟩; Stichwort explizite Definitionen.

erklärt nichts. Die philosophische Frage, welche konzeptuellen Rahmenbedingungen eingegangen sind, kann ja nicht mit "die gleichen" beantwortet werden — *etwas* muß sich geändert haben.

Man kann die philosophische Frage natürlich auch wie folgt akzentuieren: Wieso wird gerade das Deduktionspotential *der Kategorientheorie* untersucht? Wieso geht man von den Postulaten der KT als Voraussetzungen der Deduktion aus und von keinen anderen? Die Situation, um die es geht, exemplifiziert die KT, aber sie exemplifiziert auch andere Konzepte. Die Antwort aus pragmatischer Sicht lautet: Es etabliert sich ein neuer *common sense* auf technischer Ebene. Diese Antwort scheint das Problem zunächst zu vertagen, denn man kann ja jetzt fragen: wieso gerade dieser neue *common sense* und kein anderer? Ich hoffe, im weiteren Verlauf der Arbeit genügend Elemente zur Beantwortung der letztgenannten Frage zusammenzutragen.

Kapitel 4

Algebraische Geometrie

Gegenstand dieses Kapitels ist die Rolle der Kategorientheorie in Grothendiecks Umgestaltung der algebraischen Geometrie 1958-1970. Es kann hier allerdings keine erschöpfende Analyse dieser Rolle erwartet werden, schon da das betreffende Korpus mathematischer Veröffentlichung wohl einzig dasteht an Umfang und inhaltlicher Komplexität[242]. Ich gehe in diesem Kapitel weniger ins (mathematische) Detail als in den beiden vorangegangenen — denn die Früchte, die von einer detaillierten Darstellung zu erwarten sind, rechtfertigen nicht den Aufwand an Notation, Terminologie und Erklärung des Kontextes, der für eine solche Darstellung erforderlich wäre. Aus den konzeptuellen Neuerungen Grothendiecks, die mit der KT zusammenhängen, greife ich nur einige wenige heraus; was ich zu erreichen hoffe, ist nicht eine abschließende historisch-philosophische Analyse des Geleisteten, sondern ein Entwurf für eine solche Analyse, der an wenigen Beispielen dargestellt wird und an vielen weiteren geprüft werden sollte.

Die hauptsächliche Beobachtung scheint mir die zu sein, daß Grothendieck an vielen Stellen ein neues Paradigma artikuliert, also neue Setzungen vornimmt, was die Gegenstände der Disziplin sind und was die Methoden — und diese Setzungen sind von einer konsequenten Verwendung der Kategorientheorie bestimmt ("Toposes sind die eigentlichen Gegenstände" etc.). Es geht also um eine konzeptuelle Umgestaltung, Transformation der algebraischen Geometrie. Man hat hierbei grob zwei Phasen zu unterscheiden; deren erste ist in etwa mit SGA 1-3 abgedeckt. Dort werden genuin geometrische Probleme behandelt (Stichworte Fundamentalgruppe, Modulproblem); die Bedeutung der KT liegt dort insbesondere im Begriff der Repräsentierbarkeit von Funktoren. In einer zweiten Phase ab SGA 4 tritt der Blickwinkel der Zahlentheorie, insbesondere der Weil-Vermutungen, in den Vordergrund, der sich schon in [Grothendieck 1960a] andeutete. Bereits in der ersten Phase, nicht erst bei der Auseinandersetzung mit den Weil-Vermutungen, gelingen durch die Einführung des Begriffs ⊲Schema⊳ tiefgreifende Innovationen. Man kann dort deutlich aufzeigen, daß neue Objekte in Bezug auf einen technischen *common sense* konstruiert werden; ich suche denn auch die Motivation dieser Innovationen nicht so sehr in den

[242]Einen recht vollständigen bibliographischen Überblick über dieses Korpus gibt [Gray 1979], insbesondere S.40f.

"Anwendungen" als vielmehr in der Suche nach den *methodes vraiment naturelles* (vgl. 4.1.1.2).

Wenn ich gleichwohl der Auseinandersetzung mit den Weil-Vermutungen in meiner Darstellung besonderen Raum gebe, so soll mit dieser redaktionellen Entscheidung nicht suggeriert werden, Grothendiecks Aktivität in der algebraischen Geometrie sei letztlich als ein Zuarbeiten auf den Beweis der Weil-Vermutungen zu verstehen; dies wäre sehr irreführend. Grothendieck wollte eine mächtige Theorie für algebraische Geometrie formulieren, nicht ein spezielles Problem lösen[243] — dessen Lösung wäre höchstens Ausdruck der Mächtigkeit der Theorie; [Cartier 2000, 21f] *"pour Grothendieck, les conjectures de Weil ne sont pas tant intéressantes en elles-mêmes que comme test de la solidité de ses conceptions générales"*. Aber gerade diese *solidité* ist es ja, die ein neues Paradigma legitimiert (als neuen *common sense* auf technischer Ebene[244]), und daher macht es auch Sinn, sich mit dem Soliditätstest (und seiner Rolle in der Akzeptanz des Paradigmas) auseinanderzusetzen[245].

Die vorhandene Sekundärliteratur[246] ist weitgehend eine Geschichtsschreibung der Protagonisten[247]; während allerdings Mac Lane die Geschichte seiner eigenen Arbeiten schreibt, stammen die bisherigen historischen Publikationen zu Grothendiecks Arbeiten (wie auch viele der schriftlichen Ausarbeitungen dieser Arbeiten selbst) von Freunden, Schülern und Mitarbeitern[248]. Die Motive solcher Darstellungen scheinen nicht so sehr die historischer Forschung zu sein, sondern es scheint darum zu gehen, für Grothendiecks Mathematik zu werben. Dies führt auf die allgemeinere Frage, wie Grothendiecks Texte aufgenommen werden. Da ist zunächst einmal der Umstand, daß es in MR keine substantiellen *Reviews* von SGA gibt. Diese Texte scheinen also im Rahmen einer üblichen Referententätigkeit nicht zu bewältigen gewesen zu sein. [Dieudonné 1990] und [Deligne 1998] scheinen davon auszugehen, eine erklärende Darstellung von Grothendiecks Mathematik könne für die Einschätzung ihrer Bedeutung von Nutzen sein. Grothendiecks Begriffsbildungen werden offenbar so wahrgenommen, als seien sie für den uninitiierten Leser nicht motiviert, als entzögen sie sich. Kann man sagen, Grothendiecks Arbeiten seien eng an die seiner Vorgänger (auf den jeweiligen Problemfeldern) angelehnt? Zumeist erbaut er die jeweiligen Theorien von Grund auf neu. Von einer "guten" historischen Darstellung scheint allerdings erwartet zu werden, daß sie das Anknüpfen an beste-

[243] Grothendieck wollte den Beweis der Weil-Vermutungen nach der Methode, die Nuß ins Meer zu legen und sie von dessen Wellen öffnen zu lassen; vgl. die Wiedergabe dieses Vergleichs aus *Recoltes et semailles* bei [Deligne 1998, 11f].

[244] Kuhn geht davon aus, daß Paradigmen durch ihren Erfolg in der Behandlung von Problemen *(anomalies)* legitimiert werden.

[245] Weitere bedeutende Früchte dieser mächtigen Theorie neben Delignes Beweis der Weil-Vermutungen sind Faltings' Arbeiten zur Mordell-Vermutung — [Mac Lane 1988a, 357] *Faltings' famous solution of the Mordell conjecture made use of the full panoply of techniques of arithmetic algebraic geometry, including many ideas due to Grothendieck* — und letztlich auch Wiles' Beweis der Fermatschen Vermutung in konsequenter Verwendung des gesamten Grothendieckschen Programms.

[246] Ich hatte noch nicht Gelegenheit, das kürzlich erschienene Buch [Houzel 2002b] einzusehen.

[247] Eine Ausnahme bildet die Arbeit [Herreman 2000], auf die ich noch zurückkommen werde.

[248] Abgesehen von *Recoltes et semailles*.

hende mathematische Begriffsapparate und Problemkontexte hervorhebt. Es geht also um ein Unterstreichen kontinuierlicher Aspekte. Ich fände es aber voreilig, davon zu sprechen, durch solche Vergleiche würde ein "Verständnis" der Begriffsbildungen erschlossen; dazu gehören auch diskontinuierliche Aspekte (deren "Vermittlung" dann üblicherweise in einer Hervorkehrung der "Erleuchtetheit" des Protagonisten geschieht); vgl. 3.4.3.1.

Während Grothendiecks Programm an vielen Stellen[249] gepriesen wird, gibt es auch kritische Stimmen: z.B. schrieb Serge Lang bereits in den 60er Jahren einen *Review* zu EGA in diesem Sinne; Abhyankar macht ähnliche Bemerkungen in [1975] bzw. [1976]. Die divergierenden Einschätzungen der Relevanz dieses Programms sind hier nicht entscheidend, da ich nicht so sehr auf diese Relevanz abstelle, sondern eher auf die relative Relevanz der KT für die Unternehmung.

4.1 Begriffliche Innovationen Grothendiecks

4.1.1 Von ◁Varietät▷ zu ◁Schema▷

4.1.1.1 Vorformen bei Chevalley und Serre

Pierre Cartier schildert in seiner Würdigung Grothendiecks den Stand der konzeptuellen Entwicklung vor Grothendiecks Einführung seines Begriffes "Schema".

> André Weil, dans [[1946]], avait étendu à la géométrie algébrique abstraite (c'est-à-dire sur un corps quelconque [...]) la méthode de recollement par cartes locales que son maître Élie Cartan avait utilisée en géométrie différentielle [...] Mais la méthode de Weil n'était guère intrinsèque, et Chevalley s'était demandé ce qui était invariant dans une variété au sens de Weil [...]. La reponse, inspirée des travaux antérieurs de Zariski, était simple et élégante : le schéma de la variété algébrique est la collection des anneaux locaux des sous-variétés, à l'intérieur du corps des fonctions rationnelles. Pas de topologie explicite, à l'opposé de Serre qui à peu près au même moment introduit ses variétés algébriques au moyen de la topologie de Zariski et des faisceaux. Chacune des deux approches avait ses avantages, mais aussi ses limitations :
> — corps de base algébriquement clos chez Serre ;
> — variétés irréductibles chez Chevalley.
> Dans les deux cas, les deux problèmes fondamentaux du produit des variétés, et du changement du corps de base, ne s'abordaient que de manière indirecte. [2000, 24f]

Cartier teilt uns also zunächst mit, daß vor Grothendieck bereits Chevalley die *Bezeichnung "schéma"* benutzt hat[250], und aus Cartiers Text ergibt sich auch eine plausible Vermutung, wie Chevalley zu dieser Bezeichnung gekommen ist: Das

[249] Neben den in der Folge verwendeten Texten von Cartier, Deligne, Dieudonné und Hartshorne sei noch auf den Text von Manin, wiedergegeben in 5.3, verwiesen.

[250] Cartier gibt zu Chevalley keine Quelle an. [Grothendieck 1957, 161] zitiert das Cartan-(Chevalley)-Seminar an der ENS 1955/56.

"schéma de la variété" bezeichnet *"ce qui [est] invariant dans une variété"*. Allerdings (wie auch Cartiers Auflistung der Mängel der einzelnen Konzepte nahelegt) stimmt Chevalleys Konzept inhaltlich nicht mit Grothendiecks Konzept überein; laut [Dieudonné 1990, 7f] ist es in mancher Hinsicht allgemeiner, in anderer Hinsicht aber auch spezieller als Weils Konzept der abstrakten Varietät. Insgesamt scheint mir Chevalleys Unternehmung für die kategorientheoretische Seite der Sache wenig eingetragen zu haben, weshalb ich hier auf eine genaue Untersuchung verzichte[251]. Erst Grothendiecks Weiterentwicklung des Begriffs[252], die zu einer Identifikation von algebraischer Geometrie und kommutativer Algebra führt, benutzt ausdrücklich kategorientheoretische Begriffe und gelangt auf diesem Weg zur Lösung der beiden von Cartier benannten *problèmes fondamentaux*[253].

4.1.1.2 Grothendiecks Entwurf und das Zurücktreten des Paradigmas "Menge mit Struktur"

Im Folgenden bezeichnet Spec(A) das Spektrum eines kommutativen Ringes A (d.h. die Menge seiner Primideale); zur historischen Einführung dieses Begriffs vgl. [Cartier 2001, 398]. Auf diesem Spektrum hat man eine Zariski-Topologie[254].

Grothendieck hielt im *Séminaire Bourbaki* einen Vortrag über den Übergang von Varietät zu Schema (SB 182); in diesem Vortrag begründet er, wieso der Übergang zu beliebigen kommutativen Ringen "natürlich" ist: Zunächst ist die affine Varietät über k durch ihre affine Algebra (den Ring der regulären Funktionen definiert auf k) bestimmt. Klassisch habe zwar eine solche Algebra keine nilpotenten Elemente; es sei aber bekannt, daß man nach Übersetzung in die kommutative Algebra (Grothendieck spricht von *dictionnaire*) auch mit weniger starken Voraussetzungen Resultate erhält: noethersch genügt; es darf auch nilpotente Elemente geben (man hat nirgends Veranlassung, dies explizit auszuschließen). Sich trotzdem auf den klassischen Fall zu beschränken war nach Ansicht Grothendiecks ein *"obstacle sérieux au développement des méthodes vraiment naturelles en Géométrie algébrique"*. Der Übergang ist also nicht motiviert von irgendwelchen Explikationsabsichten her, sondern aus methodischen Gesichtspunkten.

In Grothendiecks Vortrag folgt eine Entwicklung der konzeptuellen Neuerungen: Bezeichnet A einen kommutativen Ring, so wird zunächst auf $X = \mathrm{Spec}(A)$ eine Garbe kommutativer Ringe $\mathcal{O}_X$ definiert; die Faser bei $\mathfrak{p} \in X$ ist $A_\mathfrak{p}$ (lokalisiert). Mit dieser Garbe wird Spec zu einem kontravarianten Funktor von der Kategorie der kommutativen Ringe in die Kategorie der *espaces annelés* (zu dieser

[251] Zu Cartiers Gegenüberstellung Serre-Chevalley ausführlicher [Cartier 2001, 397f]; insbesondere Anm.29 für die diversen Zwischenschritte bis zu Grothendieck.

[252] Diese Weiterentwicklung war wohl zum Zeitpunkt der Verfassung von [Grothendieck 1957] noch nicht abgeschlossen, da dort auf S.161 noch vom *"schéma de variété" au sens de* [Chevalley] die Rede ist; auch in der Darstellung von [Godement 1958, 124f] scheint die Identifikation kommutativer Algebra mit algebraischer Geometrie noch nicht erfolgt zu sein.

[253] Beispielsweise im Kontext der Weil-Vermutungen ist es natürlich wichtig, zu wissen, was ein Produkt ist, vgl. Weils Definition der Poincaré-Charakteristik, wiedergegeben in 4.2.2.

[254] Einen Vergleich dieser Topologie mit der Topologie gleichen Namens für affine Varietäten findet man beispielsweise bei [Kunz 1980, 23].

Kategorie sage ich unten näheres; hier ist zunächst wichtig, daß ihre Objekte die Form $(X, \mathcal{O}_X)$ haben); hierbei gehen die durch den Funktor Spec induzierten Morphismen $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) \to (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})$ zu einem Ringhomomorphismus $f : B \to A$ aus der Zuordnung $f' : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B), \mathfrak{p} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{p})$ hervor und sind derart bestimmt, daß $\mathcal{O}_{f'(y)} \to \mathcal{O}_y$ lokal ist (d.h. *l'image inverse de l'idéal maximal est l'idéal maximal*).

Grothendieck erklärt nun die folgenden Begriffe:

- *schéma affine*: *espace annelé isomorphe à un* Spec(A);
- *schéma*[255]: *espace annelé localement affine*;
- *S-schéma*: Fixiere ein *schéma S*; die *S-schémata* sind die *schéma*-Morphismen $X \to S$ (hierbei spielt S die Rolle eines Grundkörpers oder Grundrings oder besser eines Basisraumes bei einer *fibration*).

Es ist offensichtlich, daß für all diese Begriffsbildungen die KT sehr wichtig als Sprachrahmen ist.

Ich versuche im folgenden, einige der Grundgedanken des Umbaus der algebraischen Geometrie von der Sprache der Varietäten zur Sprache der Schemata darzustellen. Ich beziehe mich im wesentlichen auf [Gelfand und Manin 1996; Dieudonné 1990; Deligne 1998].

1) Die Entwicklung nimmt ihren Ausgang mit der Idee, anstelle von Räumen X Räume mit Garben $(X, \mathcal{O}_X)$ zu betrachten. Die Betrachtung solcher Objekte ist von großer Bedeutung für die Theorie, unter anderem, da auf diesem Wege cohomologische Methoden verfügbar werden. Ein klassisches (transzendentes) Beispiel ist die Kategorie der komplex analytischen Mannigfaltigkeiten mit ihrer Strukturgarbe; in solchen Fällen hat man es mit Garben von komplexwertigen Funktionen zu tun (und daher mit Garben von Ringen) [Gelfand und Manin, 93]. Wegen dieser angenehmen Eigenschaft der Schnitte der Strukturgarbe hat man mit einem Pfeil zwischen zwei Mannigfaltigkeiten zugleich einen zwischen den zugehörigen Strukturgarben (ebd. S.94); die Objekte der Form $(X, \mathcal{O}_X)$ bilden eine Kategorie.

2) In der Zariski-Topologie auf Spec(A) jedoch sind die Schnitte der Strukturgarbe natürlich keine solchen Funktionen; die Morphismen zwischen Objekten der Form $(X, \mathcal{O}_X)$ können hier nicht, wie in den klassischen Beispielen, aus den stetigen Abbildungen zwischen den Räumen abgeleitet werden[256] [Gelfand und Manin, 95], [Deligne, 12]. Abhilfe für diese Problem schafft das Vorgehen, Morphismen von Räumen

[255] In diesem ersten Vortrag Grothendiecks zum Thema ist hier von *préschéma* die Rede; die Bezeichnung *schéma* ist für ein noethersches *préschéma séparé au-dessus de Z* (bei dem die Diagonale von $X \times_Z X$ abgeschlossen ist) reserviert. Für ein *schéma* in diesem Sinne ist $\mathcal{O}_X$ kohärent im Sinne von [Serre 1955]. In späteren Texten bezeichnet *schéma* das, was hier noch *préschéma* heißt, vgl. [Dieudonné 1990, 8].

[256] Das Problem ist, daß die Schnitte der Strukturgarbe auf einer offenen Menge $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ Funktionen von U nach $\coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ sind [Hartshorne 1977, 70], also weder global in denselben Ring gehen noch für Spektren verschiedener Ringe irgendwie zueinander passen; daher definiert eine stetige Funktion zwischen zwei Spektren nicht automatisch einen “Schnitt-Transfer”.

und von Garben je separat zu definieren unter Beachtung gewisser Kompatibilitätsbedingungen [Gelfand und Manin, 96]. Dies führt auf die Kategorie von “beringten Räumen” (*espaces annelés*; so bezeichnet, da $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von *Ringen* ist).

3) Die Zariski-Topologie als die einzige Topologie, die auf Spec(A) für die Konstruktion der zugehörigen Garben zur Verfügung steht, bringt nicht nur das bereits diskutierte Problem der Morphismen mit sich; überdies fehlt eine direkte geometrische Interpretation[257] [Deligne, 12], und es kommt zu nilpotenten Elementen [Dieudonné, 10]. Es bleibt also zu bestimmen, welche Vorteile der Übergang zu beliebigen kommutativen Ringen hatte, die es wert waren, die genannten Nachteile in Kauf zu nehmen (s.u.).

4) Es ist noch ein weiterer Gedanke zu nennen, der in eine etwas andere Richtung geht: der Gedanke der Relativierung (ausgedrückt im Begriff des S-Schema): Man betrachtet nicht bloß Schemata X (genauer $(X, \mathcal{O}_X)$), sondern Morphismen beringter Räume $f : X \to S$ für ein festes S. Es entsteht eine Kategorie der S-Schemata mit Objekten der Form (X, f); ist (Y, g) ein weiteres Objekt (ist also $g : Y \to S$ ein Morphismus beringter Räume), so ist ein Morphismus dieser neuen Kategorie gegeben durch einen Morphismus beringter Räume $h : X \to Y$ mit $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

In diesem Stadium des Begriffsbildungsprozesses beginnen sich nun Früchte einzustellen. Man stellt nämlich fest: In der Kategorie der S-Schemata *gibt es Produkte* (d.h. zu gegebenen Objekten $(X, f), (Y, g)$ gibt es ein Objekt (Z, h), das als ihr (Faser-)Produkt im Sinne der KT angesprochen werden kann — vgl. 5.1.3; man schreibt $X \times_S Y$). Der *Beweis* dieser Aussage geht nicht rein kategorientheoretisch (also auf der Ebene allgemeiner *slice categories*[258]), sondern verwendet die Definition dieser speziellen Kategorie (s.u.). Der Anteil der KT ist hier eher ein konzeptueller: Man kann eben gerade zeigen, daß ein Produkt *im Sinne der KT* vorhanden ist; die KT stellt erst einen geeigneten Produktbegriff bereit, der in der Situation der S-Schemata exemplifiziert werden kann.

Hier wird insgesamt deutlich, daß Grothendiecks Theorie der Schemata und S-Schemata nicht dazu angelegt ist, einer mengentheoretisch geprägten Strukturmathematik unterworfen zu werden, in der die Grundoperation das “Versehen einer

[257]Zu einer Varietät gehört ein Ideal eines Polynomrings, zu einer irreduziblen Varietät (z.B. zu einem Punkt) ein Primideal. Betrachtet man nun anstelle der Primideale eines Polynomrings die Primideale eines beliebigen kommutativen Rings, gibt man die anschaulich geometrische Bedeutung des Begriffs Punkt auf.

[258]In der Kategorientheorie spricht man bei Kategorien, deren Objekte Morphismen mit festem Ziel sind, von der Konstruktion der *slice category* zu einer gegebenen Kategorie und einem in ihr fest gegebenen Objekt [Barr und Wells 1985, 3]; neben der Kategorie der S-Schemata entspricht auch die Kategorie der *espaces étalés* oder allgemeiner der Räume über X für einen topologischen Raum X (vgl. hierzu 3.2.2.2) diesem Muster.

Menge mit Struktur" ist. Der in einer solchen Perspektive bereitgestellte Produktbegriff sähe so aus, daß man die den Faktoren unterliegenden Mengen aufsucht, das kartesische Produkt dieser Mengen (i.S. der Mengenlehre) bildet und die so entstehende Menge mit der fraglichen Struktur versieht. Zwar hat auch ein S-Schema einen unterliegenden topologischen Raum [Hartshorne 1977, 74], doch das Produkt zweier S-Schemata, das man auf dem kategorientheoretischen Weg erhält, hat als unterliegende Menge nicht die Produktmenge aus den unterliegenden Mengen der Faktoren und trägt dementsprechend auch nicht die Produkttopologie (ebd. S.91). Die Perspektive der Mengenlehre (Abstreifen der Struktur, Übergang zur Produktmenge, Wiederüberstreifen der Struktur) erscheint hier artifiziell[259]; die tatsächliche Strategie macht vielmehr davon Gebrauch, daß man es mit Funktoren zu tun hat. Denn die Grundidee des Beweises ist, zuerst für affine Schemata als Produkt das Spektrum des Tensorprodukts der jeweils zugehörigen Ringe zu nehmen (hier nutzt man die Äquivalenz der Kategorie der affinen Schemata zur dualen Kategorie der Kategorie der kommutativen unitären Ringe aus) und sich dann im allgemeinen Fall zu überlegen, wie man "zusammenkleben" kann (ebd. S.87).

Das Produkt, das man in der Perspektive der KT gewinnt (wo ein Produkt ein Objekt ist, für das bestimmte Diagramme kommutieren), erfüllt zudem die ihm zugedachten Aufgaben. Zu diesen Aufgaben gehört, daß man mit Hilfe des Produkts einen "Basiswechsel" (einen Wechsel des fixen Schemas S) definieren kann [Dieudonné, 9]. Man studiert, welche Eigenschaften eines Pfeils $f : X \to S$ sich auf einen Pfeil $f' : X' \to S'$ übertragen mit $X' = X \times_S S'$.

Damit sind die beiden von Cartier benannten *problèmes fondamentaux* gelöst. Man studiert nun das Verhalten eines gegebenen beringten Raumes unter solchen Basiswechseln; seine "geometrischen" Eigenschaften sind dann die, die unter bestimmten Basiswechseln invariant sind [Deligne, 13]. Somit wird eine tragfähige geometrische Interpretation erreicht — und also einer der Nachteile des Verfahrens überwunden[260]. Der andere Nachteil, das Problem der nilpotenten Elemente, stellt sich wohl vor allem als Nachteil dar von der Warte der klassischen Manipulationsstrategien; diesen kann Grothendieck in seinem neuen *setting* eine mindestens vergleichbare Manipulierbarkeit auf anderer Ebene gegenüberstellen[261].

Cartier sieht beim Übergang von Chevalleys zu Grothendiecks Schema-Begriff ein *"Glissement épistémologique caractéristique"*:

> pour Chevalley [...] il s'agit du "schéma" ou "squelette" d'une variété algébrique, qui reste l'objet central. Pour Grothendieck, le "schéma" est le point focal, source de

[259] Eine ähnliche Künstlichkeit der Mengenperspektive ist in 3.3.4.1 zur Sprache gekommen; in der dort beschriebenen Situation hatte Grothendieck sich allerdings dieser Perspektive gerne anvertraut, da sie dort lediglich aus metamathematischer Sicht artifiziell wirkt; hier hingegen tut sie es aus der Sicht der beabsichtigten Anwendungen.

[260] "geometrische Interpretation" ist hier allerdings nicht zu verwechseln mit "Veranschaulichung"!

[261] In Grothendiecks nächstem Vortrag im Séminaire Bourbaki (SB 190 S.299) wird klarer, daß man durch das Vorhandensein nilpotenter Elemente sogar etwas gewinnt; nach Grothendiecks Bericht haben Weil und Cartier in einem bestimmten Zusammenhang von zwei auf den ersten Blick verschiedenen Situationen gesprochen, deren Identität Cartier mangels der Sprache der Schemata, insbesondere mangels nilpotenter Elemente, nicht habe formulieren können.

toutes les projections et de toutes les incarnations [2000, Anm.8].

In der Terminologie von Kapitel 1 etabliert sich hier also ein neuer *common sense* auf technischer Stufe. Dieser Übergang gelingt, so scheint es, durch das konsequente Akzentuieren des funktoriellen Aspekts: ein Schema ist keine Menge mit Struktur, sondern ein Funktor von den kommutativen Ringen in die Mengen. Denn in jedem kommutativen Ring hat die die Varietät definierende Gleichung einen Sinn — doch eine solche "Realisierung" wäre nur mehr eine *incarnation* des eigentlichen Grundobjekts (des Funktors). Man sieht ein Schema "richtig", wenn man es als Funktor sieht [Deligne 1998, 14]. Ein solches Akzentuieren des funktoriellen Aspekts läßt sich keineswegs nur im Zusammenhang des Problems der Produkte feststellen. Da die Zariski-Topologie nicht Hausdorffsch ist und da der einem Schema unterliegende topologische Raum nicht akkurat die Eigenschaften des Schemas wiedergibt, definiert man bestimmte Eigenschaften von Morphismen über ihr funktorielles Verhalten, etwa die Separiertheit sowie die Eigenschaft, daß das Urbild einer kompakten Teilmenge kompakt ist [Hartshorne 1977, 95ff].

Für Gelfand und Manin gehört ◁affines Schema▷ zu den (Struktur-)Begriffen, die eingeführt wurden, um zu einem Paar aus einer algebraischen und einer geometrischen Kategorie zu gelangen, so daß diese Kategorien (dual) äquivalent sind[262]. Nun ist auch die Kategorie der affinen Varietäten "äquivalent zu einer algebraischen Kategorie", vgl. [Hartshorne 1977, 20]. Der Witz ist nicht, daß man Varietäten nicht kategorientheoretisch sehen könnte; natürlich kann man das (ebd. S.15, 20). Der Witz ist, daß man Schemata in gewisser Weise nicht (sinnvoll) mengentheoretisch sehen kann; die *mathematische* Grundlage für Schemata ist die KT. Diese Perspektive läßt sich auf die Varietäten zurückübertragen und löst dort konzeptuelle Probleme, die die Mengenperspektive nicht lösen konnte (Hartshorne äußert sich entsprechend zum Produkt von Varietäten; S.22). Man hat historisch auf der Ebene der Varietäten zunächst keine Kategorienperspektive angewandt, weil dies dort nicht die einzige Option war. Erst bei den Schemata erwies sich eine solche Perspektive als unumgänglich — suggerierte aber zugleich das Neuaufrollen der Varietäten nach einer ähnlichen Perspektive. Mit einem Produkt von Varietäten mußte man Probleme haben, solange man auf die Produkttopologie fixiert war.

Die duale Äquivalenz zwischen der Kategorie der affinen Schemata und der Kategorie der kommutativen unitären Ringe bewirkt die Verlegung geometrischer Probleme auf algebraische. Algebraische Geometrie "ist" kommutative Algebra. Zugleich fühlt man sich — im Blick auf die Unvereinbarkeit der Schemata mit dem Paradigma "Menge mit Struktur" — an Buchsbaums Hinweis auf den "Nonstandardcharakter" mancher Ergebnisse von Dualisierungen erinnert (vgl. 3.1.5.2). Zur Bedeutung des Dualisierungsprozesses für den gesamten ideengeschichtlichen Kontext dieser Entwicklungen vgl. [Cartier 2001, 396-399]; der Akzent auf dem Zusammenhang Algebra-Geometrie (Varietät-Ideal) geht laut [Cartier 2001, 397] auf Dedekind zurück.

[262] *"The formal inversion of arrows furnished in the definition of dual category in concrete examples often produce [. . .] some relations of the type* geometry vs algebra *(when categories are not alike, e.g., rings and their spectra)"* [Gelfand und Manin 1996, 76].

4.1.1.3 Das Modulproblem und der Begriff des repräsentierbaren Funktors

Seit Max Noether, Gordan und Clebsch beschäftigte man sich im Zusammenhang mit der Klassifikation algebraischer Kurven mit dem "Modulproblem". "Moduli" sind kontinuierliche Parameter, die eine feinere Klassifizierung erlauben als das sogenannte Geschlecht der Kurven. Die Moduli-Mannigfaltigkeiten sind selbst Varietäten; jeder Punkt einer solchen Varietät entspricht einer Kurve. Wenn ein Punkt auf der Moduli-Mannigfaltigkeit besondere Eigenschaften hat, dann auch die im zugehörige Kurve. Diese Beziehung ist intuitiv klar, wird aber präzise dank des Begriffs ⊲Schema⊳; die Lösung dieses "Modulproblems" ist ein Funktor, der sogar Garbe und darstellbar ist (von einem Objekt herkommt). Vgl. z.B. [Hartshorne 1977, 56]. Man kann hier also sagen, daß Grothendieck mit dem von ihm eingeführten Begriffsapparat die Lösung eines prominenten konzeptuellen Problems gelang.

Im vorliegenden Zusammenhang ist noch die Geschichte des Begriffs der *Darstellbarkeit* (oder *Repräsentierbarkeit*) eines Funktors interessant. Diesen Begriff hat offenbar Grothendieck eingeführt — möglicherweise zu genau dem Zweck, das Modulproblem zu lösen. Ich verzichte hier gegenwärtig auf eigene Untersuchungen, referiere aber eine Reihe von Angaben, die Mac Lane dazu macht: *"The important notion of a representable functor is due to Grothendieck"* [1965, 52]; Mac Lane nennt als Quellen für seine Behauptung [Grothendieck 1960c, 1962] und die weiteren Vorträge Grothendiecks in diesem Seminarband sowie [Grothendieck 1961] und verweist außerdem auf *notes* von Dold. Laut [Mac Lane 1971b, 103] nahm Bourbaki implizit den Begriff vorweg; vgl. 6.3.2.2. Mac Lane hält noch fest, daß bereits vor der Einführung des Begriffs *Beispiele* von repräsentierbaren Funktoren untersucht wurden; *"Representable functors probably first appeared in topology in the form of "universal examples", such as the universal examples of cohomology operations (for instance, in [[Serre 1953a]] [in] calculations of the cohomology, modulo 2, of Eilenberg-Mac Lane spaces)"* [1971b, 76].

4.1.1.4 Der Begriff des geometrischen Punktes

Wie gesagt: Die in der klassischen Situation (wo zu einer Varietät ein Ideal eines Polynomrings und zu einer irreduziblen Varietät — z.B. zu einem Punkt — ein Primideal gehört) gegebene anschauliche geometrische Bedeutung des Begriffs Punkt gibt man auf, wenn man anstelle der Primideale eines Polynomrings die Primideale eines beliebigen kommutativen Rings betrachtet. Dieses Fehlen einer direkten geometrischen Interpretation haben wir zunächst als Nachteil von Grothendiecks Neuentwurf dargestellt; eine tragfähige geometrische Interpretation konnte allerdings anderweitig erarbeitet werden. Zugleich eröffnete sich in dieser Situation für Grothendieck die Möglichkeit, den Begriff des geometrischen Punktes neu zu definieren, und zwar seinen Bedürfnissen entsprechend.

Eine solche Definition steht in einem weiteren Vortrag vor dem *Séminaire Bour-*

baki (SB 195 Abschnitt 8): Ein geometrischer Punkt eines Schemas[263] ist ein Pfeil vom Spektrum eines algebraisch abgeschlossenen Körpers in das Schema (also ein Pfeil von einem Endobjekt der Kategorie in das fragliche Objekt). Eine ausgezeichnete Einführung in diese Ideen und ihren ideengeschichtlichen Kontext gibt [Cartier 2001, 396-400]; vgl. auch 5.3.1.2.

Es ist interessant, daß — aufgrund der Leistungen dieses neuen Konzeptes von "Punkt" — dieses Konzept als das "richtige" Konzept angesehen wird, ganz so als ginge es bei der Konzeptualisierung um eine Explikation dessen, was man unter einem Punkt versteht, um eine Explikation, die mehr oder weniger erfolgreich sein kann. Der entscheidende Gedanke Hilberts war gewesen, den Begriff Punkt von inhaltlichen Bestimmungen zu befreien; hier wirkt es so, als sei diese gewonnene Freiheit nun dazu genutzt worden, eben zu anderen inhaltlichen Bestimmungen übergehen zu können. Das dabei wirksame Auswahlkriterium ist nicht mehr die Übereinstimmung mit einer anschaulichen Vorstellung, sondern die weitgehende Zugänglichkeit der wichtigen Probleme, die sich im Zusammenhang mit dem Begriff stellen, mit den vorhandenen Untersuchungswerkzeugen.

4.1.2 Von der Zariski-Topologie zu den Grothendieck-Topologien

4.1.2.1 Probleme mit der Zariski-Topologie

Schon in der Darstellung von Grothendiecks Auseinandersetzung mit homologischer Algebra (Kapitel 3) war die Rede von der Zariski-Topologie und ihrer Schlüsselrolle für die Entstehung des Tohoku-Artikels. Hier soll nun diese Topologie ausführlicher diskutiert werden, insofern sie sich als Ausgangspunkt für bestimmte Untersuchungen als ungeeignet erwies[264] und somit einen Impuls zu begrifflichen Neuerungen gab.

Wir haben uns bereits mit denjenigen Eigenschaften der Zariski-Topologie befaßt, deretwegen es vor Tohoku keine "gute" Garbencohomologie für Zariski-Garben gab (vgl. 3.2.3.2). Mit der Lösung dieses Problems durch Grothendieck gab es natürlich keine Notwendigkeit mehr, die betreffenden Eigenschaften der Zariski-Topologie als Nachteile anzusehen. Es gibt aber weitere Perspektiven, unter der manche dieser Eigenschaften nachteilig scheinen. Das erste der beiden folgenden Zitate benennt solche Perspektiven; beide machen Andeutungen zu Grothendiecks Abhilfe[265]:

> The only topology available on an abstract algebraic variety or scheme, the Zariski topology, did not have "enough open sets" to provide a good geometric notion of localization. In his work on descent techniques [[Grothendieck 1960c]] and the étale fundamental group [SGA 1], A.Grothendieck observed that to replace "Zariski-open inclusion" by "étale morphism" was a step in the right direction; but unfortunately

[263] i.S. von SB 195, vgl. Anm.255.

[264] Wie wir noch sehen werden, ist dies insbesondere der Fall, was die Untersuchung der Weil-Vermutungen betrifft: die Zariski-Topologie liefert nicht die *Weil cohomology* (vgl. 4.2.3).

[265] Zum Begriff *étale* vgl. Abschnitt 4.2.3.

> the schemes which are étale over a given scheme do not in general form a partially ordered set. It was thus necessary to invent the notion of “Grothendieck topology” [...] [Johnstone 1977, xi]

> The Grothendieck idea to overcome [the] insufficiency [of the Zariski topology] was to extend the notion of topology: he suggested to consider as “open sets” not just open imbeddings but certain more general mappings $f : U \to X$ such as, for example, [...] flat morphisms (in the category of schemes), etc. In such [a] generalization open sets become objects of some category. [...] The essential point is that the notion of [...] covering is not deduced from some structures in the category, but instead forms a part of the definition [Gelfand und Manin 1996, 99].

Bevor nun Grothendiecks (kategorientheoretisch inspirierte) Abhilfe genauer besprochen wird, möchte ich hier noch einige Beobachtungen über die Rolle der Zariski-Topologie für die Intuitivität der späteren Konzepte festhalten. Zunächst ist klar: Die Idee, von der Zariski-Topologie wegzukommen, kam erst auf, nachdem Serre vergeblich versucht hatte, mit ihr auszukommen [Grothendieck 1960a, 103]. Dies deutet darauf hin, daß die Zariski-Topologie als das eigentlich gegebene, intuitive Werkzeug wahrgenommen wurde. Selbst in Texten der “reifen” Disziplin[266] wird die Zariski-Topologie immer noch erwähnt — zum einen, da diese Topologie in bestimmten Zusammenhängen weiterhin eine wichtige Rolle spielt, zum anderen aber eben auch, weil ihr Studium zumindest teilweise zur Motivation dafür dient, die anderen Konzepte zu entwickeln. Eine solche Motivation scheint als unverzichtbar wahrgenommen zu werden, da jene Konzepte sonst allzusehr “vom Himmel fielen”. Die Legitimation der Konzepte erfolgt also von den Fortschritten her, die sie in der Manipulation der Gegenstände gegenüber dem eigentlich intuitiven Konzept zu machen erlauben. Die Zariski-Topologie gehört keineswegs einem zurückgelassenen Stadium der Begriffsbildung an, sondern dient als Schlüssel zu dem “richtigen” Stadium.

4.1.2.2 Der Begriff der Grothendieck-Topologie

Wir hatten in 3.3.3.1 gesehen, daß Grothendieck in Tohoku das System der offenen Mengen eines topologischen Raumes mit den Inklusionen als Kategorie aufgefaßt hat. Der Begriff des “Situs” ergibt sich aus einer Verallgemeinerung dieser Sichtweise. Die Grundidee ist, daß die Operationen auf offenen Mengen, die für die Definition von Garben wesentlich sind, also endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen, nicht nur mengentheoretisch charakterisiert werden können, sondern auch diagrammatisch als bestimmte Objekte von $\mathrm{Off}(X)$ mit einer universellen Abbildungseigenschaft: Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ist das Produkt i.S. der Kategorientheorie in $\mathrm{Off}(X)$ (denn für jedes V mit $V \subset U_1$ und $V \subset U_2$ existiert der gestrichelte Pfeil im folgenden Diagramm

[266] SGA $4\frac{1}{2}$ I-4, [Gelfand und Manin 1996].

eindeutig[267] und macht das Diagramm kommutativ).

$$\begin{tikzcd}
& U_1 \cap U_2 \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
U_1 & & U_2 \\
& V \arrow[ul, "\phi'"] \arrow[ur, "\psi'"'] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Ähnlich kann man $\bigcup_i U_i$ als die kategorientheoretische Summe der U_i auffassen: für eine zweielementige Indexmenge ergibt sich das zum obigen duale Diagramm. Eine Überdeckung ist eine Familie von Inklusionen $U_i \to U$, für die der offensichtliche Pfeil $\bigcup_i U_i \to U$ invertierbar ist. Behält man von diesen ursprünglich mengentheoretischen Konstruktionen nur die diagrammatischen Charakteristika bei, kann man in anderen Kategorien als $\mathrm{Off}(X)$ bzw. $\mathrm{Off}(X)/X$[268] Dinge als Schnitte, Vereinigungen, Überdeckungen ansprechen; man muß dann jeweils noch zeigen, daß in diesen Kategorien die entsprechenden Produkte etc. existieren. Als (Grothendieck-)"Topologie" auf solch einer Kategorie kann man dann jede Familie von "Überdeckungen" (Familien von Pfeilen) ansprechen, die bestimmte Eigenschaften hat. So gelangte Grothendieck zum Begriff des Situs (einer Kategorie mit solch einer Grothendieck-Topologie)[269]. Hierbei gibt es nicht mehr zwingend zwischen zwei Objekten nur höchstens einen Pfeil. Grothendieck zeigte, daß die Kategorie der S-Schemata mit den étalen Morphismen[270] ein Situs ist.

Man kann auf einem Situs Garben definieren, weil die in den Garbenbedingungen vorkommenden Schnitte, Vereinigungen und Überdeckungen substituiert werden können. Die alternative Garbendefinition (Versehen einer Menge mit Struktur: *espace étalé*) ist hier nicht mehr gangbar, weil kein topologischer Raum im klassischen Sinne mehr zugrundeliegt. Was bleibt, ist die universelle Charakterisierung dieser Alternative (Stichwort Garbifizierung):

> One aspect of sheaves on a topological space, which does not generalize to sheaves on a site, is their alternative representation [...] as local homeomorphisms. Nevertheless, the equivalent of [the theorem that the inclusion functor $\mathrm{Shv}(X) \to \mathcal{S}^{\mathbf{T}^{\mathrm{op}}}$ has a left adjoint] remains true; i.e., we have an associated sheaf functor $L : \mathcal{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Shv}(\mathbf{C}, J)$ which is left adjoint to the inclusion functor[[271]] [Johnstone 1977, 15].

Lediglich die *Konstruktion* von L beruht im allgemeinen Fall natürlich nicht mehr auf dem lokalen Homöomorphismus.

[267] Man bedenke, daß die Pfeile von $\mathrm{Off}(X)$ die Inklusionen sind; die Eindeutigkeitsforderung ist also automatisch erfüllt, da es höchstens einen Pfeil zwischen zwei Objekten gibt.

[268] Man kann ebensogut die Kategorie $\mathrm{Off}(X)/X$ betrachten, deren Objekte die Pfeile $U \to X$ in $\mathrm{Off}(X)$ sind, und erhält dort ein Faserprodukt und eine amalgamierte Summe.

[269] Wegen einer genauen Definition vgl. z.B. SGA $4\frac{1}{2}$ 15ff oder [Gelfand und Manin 1996, 100].

[270] Vgl. Abschnitt 4.2.3.

[271] Johnstone verwendet hier folgende Bezeichnungen: $\mathcal{S}$ bezeichnet **Set**, T bezeichnet $\mathrm{Off}(X)$, $(\mathbf{C}, J)$ ist ein Situs. Wegen der Adjunktion im "klassischen" Fall vgl. 3.3.4.3.

An dieser Stelle wird die Kategorientheorie für den Garbenbegriff in einer neuen Weise bedeutsam, über die Bedeutung, die sie für ihn in Tohoku hatte, hinausgehend. Denn die Verallgemeinerung, die hier vorgenommen wird, führt auf Konstruktionen, die eindeutig unter den Begriff Kategorie fallen und nicht mehr, wie noch die Algebra der offenen Mengen eines topologischen Raumes, "ebensogut" als Verband oder dergleichen gesehen werden könnten (denn es geht gerade darum, eine Kategorie zu haben, die nicht mehr notwendig Verband ist, also auch mehrere Pfeile zwischen zwei gegebenen Objekten haben kann). Hier ist Grothendieck erstmals *gezwungen*, Garben als bestimmte Funktoren zu definieren.

4.1.2.3 Der Topos ist wichtiger als der Situs

Grothendieck blieb beim Begriff des Situs nicht stehen, sondern fokussierte erwartungsgemäß bald auch die auf dem Situs definierten Garben als Objekte einer Kategorie. Die Definition eines solchen "Grothendieck-Topos" steht (wohl erstmals) im *exposé IV* von SGA 4 auf S.4 (U bezeichnet ein Universum[272]):

> On appelle U-topos, ou simplement topos si aucune confusion n'est à craindre, une catégorie E telle qu'il existe un site $C \in U$ tel que E soit équivalente à la catégorie $C^{\sim}$ des U-faisceaux d'ensembles sur C. #65

Als Absicht bei der Einführung des Begriffs wird zunächst (auf S.VI am Beginn des Bandes) angegeben:

> Notre principe directeur a été de développer un langage et des notations qui soient ceux qui servent déjà effectivement dans les diverses applications, de sorte à ne pas perdre contact avec le contenu "géométrique" (ou "topologique") des divers foncteurs qu'on est amené à considérer entre sites. Pour ceci, les notions de topos et de morphisme de topos semblent être le fil conducteur indispensable, et il convient de leur donner la place centrale, la notion de site devenant une notion technique auxiliaire.

Der Topos gilt Grothendieck also als wichtiger als der Situs. Dies erklärt die *introduction* von *exposé IV*, die die Intention dieser Begriffsbildung so darstellt:

> Nous avons vu dans [l'exposé] II diverses propriétés d'exactitude de catégories de la forme [...] catégorie des faisceaux d'ensembles sur [...] un petit site, propriétés qu'on peut exprimer en disant qu'à beaucoup d'égards, ces catégories (que nous appelerons des *topos*) héritent des propriétés familières de la catégorie [...] des (petits) ensembles. D'un autre coté, l'expérience a enseigné qu'il y a lieu de considérer diverses situations en Mathématique *surtout comme un moyen technique pour construire les catégories de faisceaux* (d'ensembles) *correspondantes*, i.e. *les "topos" correspondants.* [S.299]
>
> On peut donc dire que la notion de topos, dérivé naturel du *point de vue faisceautique* en Topologie, constitue à son tour un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique [*originale Anmerkung* : Cf. [[Hakim 1972]], ou 4.1 et 4.2 plus bas, pour les relations précises entre la notion de topos et celle d'espace topologique], englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant

> de l'intuition topologique. Le trait caractéristique de telles situations est qu'on y #66
> #67 dispose d'une notion de "localisation", notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos (via le topos associé au site). Comme le terme de "topos" lui-même est censé précisément le suggérer, il semble
> #68 raisonnable et légitime aux auteurs du présent Séminaire de considérer que l'objet de la Topologie est l'étude des *topos* (et non des seuls espaces topologiques). [S.301]

Wieso eignet sich dieser neue Begriff für die ihm zugedachte große Aufgabe? Die Literatur geizt nicht mit hilfreichen Kommentaren:

> The key to Grothendieck's claim that toposes are the proper objects of topology is that the topological notion of cohomology generalizes very nicely to toposes [McLarty 1990, 357].

> Since the cohomological properties of a space are completely determined by the category of sheaves over it, it is these categories that should be the primary objects of study in topology, rather than topological spaces themselves. After a suitable axiomatization of the properties of such categories we arrive at the notion of a topos [Gelfand und Manin 1996, vii].

> Grothendieck [, i]nspired by Riemann's idea of a surface stacked over the plane, [...] replaced the open sets of a space X by spaces stacked over it. The same thing can be expressed by considering the category [...] of sheaves over X. The constructions over topological spaces translate into (and are replaced by) constructions on categories of sheaves. [Cartier 2001, 395]

Hinter diesen Dingen steht ein großangelegtes Projekt. Grothendieck skizzierte[273] seine Vision einer "Geometrie ohne Punkte", einer Geometrie, in der stattdessen Garben im Mittelpunkt des Interesses stehen. Ein Punkt wird hier zum Halm der Garbe, behält also nur Information über die unmittelbare Umgebung — so ist es nicht verwunderlich, daß der Fokus auf die Garben statt die Punkte zu weitreichenderen Resultaten führt. Was Grothendieck hier mithilfe der Kategorientheorie tut, ist nicht mehr eine Systematisierung dessen, was sich vorher wildwüchsig in der Mathematik ergeben hatte (auch Funktorkategorien waren letztlich eine Analogiebildung), sondern Nichtdagewesenes. Die typische Methode dieses Ansatzes ist der Übergang zu einer größeren (Garben-)Kategorie (z.B. von Varietäten zu Schemata oder von komplexen Mannigfaltigkeiten zu algebraischen Räumen), wo erst sinnvolles Operieren möglich ist (weil es erst dort geeignete Objekte gibt); nachträglich steigt man wieder ab *(descente)* und hat die Lösung des Problems. Durch diese Methode werden viele

[272] Vgl. 7.3.

[273] Die folgende Skizze hat er vermutlich auch schriftlich niedergelegt; ich kenne sie allerdings nur aus einem Gespräch mit Ernst-Ulrich Gekeler.

intuitiv klare Konzepte erst verfügbar. Die wichtige Konstruktion bei diesem Ansatz ist die des Topos; man hat glücklicherweise das Resultat, daß “alles” in eine geeignete Garbenkategorie (einen Topos) eingebettet werden kann. Dieser Theorie kommt fundamentaler Charakter zu insofern, als man jede herkömmliche Geometrie darin wiederfinden kann. Man kann dies letztlich als Fortsetzung des Erlanger Programms auffassen — mit größerem Recht als [Eilenberg und Mac Lane 1945][274].

Doch steigen auch wir wieder hinab — in die Niederungen der Begriffsgeschichte, wo sich die Mühle der konzeptuellen Differentiation unbeeindruckt weiterdreht. Der Gedanke, daß ◁Situs▷ nur ein Hilfsbegriff ist und der Begriff, auf den es eigentlich ankommt, der des (Grothendieck-)Topos, führt natürlich zu der Idee, ◁Situs▷ aus der Definition von ◁Grothendieck-Topos▷ zu eliminieren. Girauds Forschungen[275] bestehen nach [Johnstone 1977, 15ff] darin, den Begriff des Grothendieck-Topos entsprechend äquivalent zu charakterisieren, indem er die Existenz bestimmter Limites fordert. [Johnstone 1977, 23] spricht dies als *“important advance”* an:

> [. . .] the definition of a Grothendieck topos may be reduced to a set of axioms which refer [. . .] not to any site of definition for it. This is an important advance, since it is clear that the same topos [. . .] can be defined by many different sites.

Giraud eröffnet hier ein neues Niveau der Verallgemeinerung, das in der Theorie der elementaren Toposes weiter ausgeschöpft wird (vgl. 4.4; dort ergibt sich allerdings kein äquivalentes Konzept mehr, da das neue Konzept ein Konzept 1.Stufe ist).

4.2 Die Weil-Vermutungen

Hier geht es hauptsächlich um eine Würdigung des Eingreifens kategorientheoretischer Methoden in die “Abwicklung” der Weil-Vermutungen. Zwar ist eine relativ detaillierte Beschreibung der Vermutungen unabkömmlich für eine Interpretation der Rolle der KT darin; gleichwohl können und sollen die folgenden Abschnitte nicht als vollgültige Geschichte dieser Vermutungen stehen. Beispielsweise kommt Delignes Beweis der letzten noch offenen Vermutung in [1974] nur sehr am Rande zur Sprache — was in einer Darstellung mit ernsthaftem Anspruch auf Vollständigkeit wohl nicht zu dulden wäre.

---

[274] Die Passage

> [Our theory] may be regarded as a continuation of the Klein Erlanger Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformations is generalized to a category with its algebra of mappings. [Eilenberg und Mac Lane 1945, 237]

wird Jean-Pierre Marquis ausführlich in einer Veröffentlichung untersuchen. Zu “Grothendiecks Erlanger Programm” siehe auch 4.2.4 und Anm.298.

[275] Girauds Ergebnisse sind in SGA 4 IV 1.2 zu finden. Zur Geschichte der verschiedenen Formen von Grothendieck-Topologie vgl. [Gray 1979, 61f].

4.2.1 Propädeutik

Die übersichtlichste[276] Zusammenstellung der Vermutungen liefert [Katz 1975]:

> Recall that for any variety X over a finite field $\mathbb{F}_q$, its zeta function $Z(X/\mathbb{F}_q, T)$ is defined as the formal power series $\exp(\sum_{n\geq 1} N_n T^n/n)$, where N_n is the number of points of X with coordinates in the field $\mathbb{F}_{q^n}$. Thus the zeta-function of X provides a sort of Diophantine summary of X.
>
> In [[1949]], Weil [...] made his famous conjectures about the zeta-function of a projective, non-singular n-dimensional variety X over $\mathbb{F}_q$ [...]
>
> (1) $Z(X/\mathbb{F}_q, T)$ is a rational function of T.
>
> (2) Moreover, $Z(X/\mathbb{F}_q, T) = P_1(T)P_3(T)\cdots P_{2n-1}(T)/P_0(T)P_2(T)\cdots P_{2n}(T)$, where $P_i(T) = \prod_{j=1}^{b_i}(1-\alpha_{ij}T), |\alpha_{ij}| = q^{i/2}$, the last equality being the "Riemann hypothesis" for varieties over finite fields.
>
> (3) Under $\alpha \mapsto q^n/\alpha$, the $\alpha_{i,j}$ are carried bijectively to the $\alpha_{2n-i,j}$. This is a functional equation for $T \mapsto 1/q^nT$ [[277]].
>
> (4) In case X is the "reduction modulo p" of a nonsingular projective variety $\mathbf{X}$ in characteristic zero, then b_i is the ith topological Betti number of $\mathbf{X}$ as a complex manifold.
>
> The moral is that the topology of the complex points of $\mathbf{X}$, expressed through the classical cohomology groups $H^i(\mathbf{X}, \mathbb{C})$, determines the form of the zeta-function of X, i.e., determines the Diophantine shape of X.

Der erkenntnistheoretische Blickwinkel der vorliegenden Arbeit interessiert sich genau für solche Interpretationen, solche "Moral" — also für informale, heuristische Vorstellungen darüber, welche "Art von Information" eine Aussage liefert, welche Manipulationsstrategien sich mit ihr eröffnen.

4.2.2 Weils Originaltext

Die Vermutungen finden sich in André Weils Arbeit *Numbers of solutions of equations in finite fields* [1949], die folgendermaßen beginnt:

> The equations to be considered here are those of the type
>
> (1) $$a_0x_0^{n_0} + a_1x_1^{n_1} + \cdots + a_rx_r^{n_r} = b.$$

[276] Eine etwas ausführlichere Darstellung der Vermutungen und ihrer Geschichte findet sich bei [Hartshorne 1977, 449ff].

[277] Hier ist eine Funktionalgleichung der Zetafunktion (unter der Variablentransformation $T \mapsto 1/q^nT$) gemeint; in diese Funktionalgleichung geht bereits eine zur Varietät X gehörige topologische Größe ein, nämlich die *self-intersection number E of the diagonal of $X \times X$*. Es gilt dann $E = \sum(-1)^i b_i$ (unabhängig von der Vermutung (4), diese aber letztlich unterstützend; Weil spricht in seinem Originaltext sogleich von "Euler-Poincaré-Charakteristik").

Wie der Titel der Arbeit nahelegt, denkt Weil an Gleichungen über endlichen Körpern. Er fährt fort mit einem kurzen geschichtlichen Überblick über die bisherigen Arbeiten zur Anzahl von Lösungen von Gleichungen dieses Typs, beginnend mit einigen von Gauss behandelten Spezialfällen — Verbindungen aufzeigend zur Riemannschen Hypothese für bestimmte durch solche Gleichungen definierten Funktionenkörper — und bis zu Weils Gegenwart aufsteigend. An diese Darstellung schließen sich die folgenden Bemerkungen an:

> As equations of type (1) have again recently been the subject of some discussion [...], it may therefore serve a useful purpose to give here a brief but complete exposition of the topic. This will contain nothing new, except perhaps in the mode of presentation of the final results, which will lead to the statement of some conjectures concerning the number of solutions of equations over finite fields and their relation to the topological properties of the varieties defined by the corresponding equation over the field of complex numbers [1949, 497f].

Dieses *statement of some conjectures* findet sich auf S.507; Weil gibt zunächst das Poincaré-Polynom *in the sense of combinatorial topology* einer bestimmten komplexen Varietät an, das, so Weil, von Dolbeault berechnet wurde.

> This, and other examples which we cannot discuss here, seem to lend some support to the following conjectural statements, which are known to be true for curves, but which I have not so far been able to prove for varieties of higher dimension.

Die Rede von *statements [...] which are known to be true for curves* bezieht sich auf Weils Beweis der Vermutungen für den Fall, daß man es mit einer Kurve zu tun hat, in [1948][278]. Die anschließende Aufstellung der Vermutungen entspricht (bei kleineren Abweichungen in der Notation, der Reihenfolge und manchen Akzentsetzungen) inhaltlich genau der oben wiedergegebenen Fassung von Katz. An die Darstellung der Vermutungen schließt sich bei Weil eine kurze Diskussion einer Varietät an, für die eine sich aus den Vermutungen ergebende Folgerung in der Tat zutrifft.

Weil gab an anderer Stelle ein heuristisches Argument für das Zutreffen seiner Verallgemeinerung der Riemannschen Hypothese, indem er diese als eine Hypothese über die Fixpunkte eines Frobenius-Automorphismus formulierte, deren Richtigkeit in bestimmten Fällen aus dem klassischen Lefschetzschen Fixpunktsatz[279] folgt [1956, 555f].

Nachträglich hat sich die Auffassung bewährt, dieses heuristische Argument könne durch eine Cohomologietheorie für Varietäten über endlichen Körpern gerechtfertigt werden; vgl. z.B. [Katz 1975, 927]. Bei diesem Ansatz ist entscheidend, daß

[278][Hartshorne 1977, 451] führt dazu aus, daß Weil hier den Satz von Riemann-Roch benutzt (für Rationalität und Funktionalgleichung) und eine Ungleichung von Castelnuovo und Severi (für die Riemannsche Hypothese); näheres ebd. S.368. [Katz 1975] deutet an, daß Weil später noch andere Spezialfälle der Vermutungen hat zeigen können. Der Beweisansatz von [Weil 1948] war übrigens für Grothendiecks Ansatz der Standardvermutungen nicht unerheblich, wie wir noch sehen werden (4.2.4).

[279]Vgl. dazu 2.1.2.1.

in jener Cohomologietheorie ein Analogon zur klassischen Lefschetzschen Fixpunktformel gilt. Die Aufgabe dieser Fixpunktformel (die ja allgemein die Anzahl $L(f,X)$ der Fixpunkte einer Abbildung f eines topologischen Raums X in sich bestimmt) wird bei [Katz 1975] oder auch bei [Hartshorne 1977, 454] (worauf ich mich hier beziehe) einfach erklärt: zu einer projektiven Varietät X über $k = \mathbb{F}_q$ betrachtet man die basiserweiterte Varietät $\overline{X}$ über dem algebraischen Abschluß $\overline{k}$; der Frobenius-Morphismus f bildet einen Punkt P in $\overline{X}$ mit Koordinaten $(a_i), a_i \in \overline{k}$ auf den Punkt mit Koordinaten (a_i^q) ab. P ist genau dann ein Fixpunkt von f, wenn die Koordinaten in k liegen, und allgemeiner ein Fixpunkt von f^r (Iteration), wenn die Koordinaten in $\mathbb{F}_{q^r}$ liegen. Bezeichnet daher N_r die Anzahl der Punkte von $\overline{X}$ mit Koordinaten in $\mathbb{F}_{q^r}$, so gilt $N_r = L(f^r, \overline{X})$. Man kann nun die Formel für L nutzen, um eine Darstellung der Potenzreihe Z als Quotient von Polynomen herzuleiten, wobei noch nicht die Aussage über die Koeffizienten der Polynome gezeigt ist (dies bleibt Deligne vorbehalten).

Eine ähnliche Strategie kann man für die Funktionalgleichung anwenden; dort geht man von der Annahme aus, daß für die Cohomologietheorie eine Poincaré-Dualität gilt [Hartshorne 1977, 456]. Sowohl im Falle der Lefschetz-Formel als auch im Zusammenhang mit der Poincaré-Dualität macht man sich die Tatsache zunutze, daß die Cohomologiegruppen insbesondere Vektorräume sind; man kann dann Resultate der linearen Algebra über Spuren und Determinanten benutzen.

Allerdings scheint diese Auffassung nicht Bestandteil von Weils eigenen Überlegungen zu diesen Fragen zu sein. Weil spricht in den beiden genannten Texten nicht von einer solchen Cohomologietheorie, sondern ausschließlich über Bettizahlen; er spricht (bewußt?) von *combinatorial* (und nicht von *algebraic*) *topology*[280]. In seiner Vorrede zu [1949] legt er wiederholt Wert auf den elementaren Charakter der von Gauss und anderen unternommenen Anstrengungen. War ihm an einer möglichsten Geringhaltung des begrifflichen Aufwandes gelegen, oder erklärt sich alles, was er sagt, aus Kenntnisstand und vorwiegendem Sprachgebrauch der Zeit? Immerhin: obgleich letztlich der konzeptuell reichere Ansatz beibehalten wurde (vgl. 4.2.3), haben die späteren Autoren auf Weil Bezug genommen. So bezeichnet Hartshorne die Vorgehensweise über die Lefschetz'sche Fixpunktformel als *the main idea, which goes back to Weil* (was ja auch zutrifft, s.o.); eine entsprechende Bemerkung Grothendiecks ist wiedergegeben in 4.2.3. Und doch hat Weil in keiner Veröffentlichung anerkannt, daß diese Idee ihren Ausdruck in der Entwicklung einer Cohomologietheorie für Varietäten über endlichen Körpern finden sollte[281].

Der schließliche Beweis der Vermutungen hat 25 Jahre und die Anstrengungen einiger der fähigsten Mathematiker der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts in Anspruch genommen. Es ist somit berechtigt, hier vom Keim eines großangeleg-

[280] Vgl. hierzu die Vorrede von Kapitel 2.

[281] Hierauf hat mich Norbert Schappacher anläßlich meines Promotionskolloquiums hingewiesen; in älteren Fassungen der vorliegenden Arbeit stelle ich diesen Fragenkomplex fehlerhaft dar. Pierre Cartier wußte allerdings zu berichten, daß sich Weil im informellen Gespräch gewissermaßen zähneknirschend der neuen Begrifflichkeit angeschlossen habe.

ten Forschungsprogramms zu sprechen[282]. Weil scheint überhaupt gerne programmatische Texte zu schreiben: In [1952] stellt er Kroneckers und Dedekinds Ansatz gegenüber[283], in [1956] klassische algebraische Geometrie ($\mathbb{C}$; transzendente Methoden) einer abstrakten algebraischen Geometrie (algebraische Methoden). Ein ICM ist natürlich auch das ideale Podium für Programme. Verstand sich Weil als *spiritus rector* einer *community*? Dies wäre dann Ansatzpunkt für den Konflikt mit Grothendieck, der diese Rolle ebenfalls beanspruchte.

4.2.3 Grothendiecks Rezeption der Vermutungen und die Suche nach der *Weil Cohomology*

Grothendieck berichtet in *Recoltes et Semailles*[284], er habe 1955 durch Serre erstmals von Weils Vermutungen erfahren, und dieser habe sie ihm sogleich in "cohomologischer Form" erklärt (also wohl in der Form, die ihnen in den Darstellungen von Katz und Hartshorne gegeben sind). Die Aufgabe konzeptueller Klärung liest sich bei Dieudonné so:

> définir pour les variétés algébriques sur un corps de charactéristique $p > 0$ des groupes de cohomologie à coefficients dans un corps de charactéristique 0, ayant les propriétés énumérées par Weil en vue de prouver ses fameuses conjectures. [Dieudonné 1990, 6]

Grothendieck hat die griffige Sprechweise von der *Weil cohomology* eingeführt, und zwar bereits in dem sehr frühen programmatischen Text [1960a, 103]: *"[the] initial aim was to find the "Weil cohomology" [...]"*; Grothendieck behauptet sogar, dies sei schon das Ziel bei [Serre 1955] gewesen. [Kleiman 1968] bringt sogar eine axiomatische Charakterisierung einer *"Weil cohomology theory"*. Angesichts dieser Namensgebung ist allerdings nochmals zu unterstreichen, daß der Gedanke einer solchen Cohomologietheorie nicht von Weil selbst zu stammen scheint (s.o.).

Die ursprünglich allein verfügbare Zariski-Topologie ist allerdings nicht in der Lage, diese Weil-Cohomologietheorie bereitzustellen; Desideratum ist ja unter anderem eine Lefschetz-Formel — und solch eine Formel kann es in Charakteristik $p > 0$ nicht geben. Grothendieck und seine Mitarbeiter entwickelten in SGA 4[285] ei-

[282] Die Zusammenstellung von Ergebnissen in [Eilenberg 1949, 30] §15 ist typische *normal science*, die konzertierte Arbeit von Jahrzehnten zusammenträgt, während Weils gleichzeitige Vermutungen in [Weil 1949] ein Forschungsprogramm sind, das die *normal science* der Gruppe um Grothendieck fünfzehn Jahre später determinieren wird. Hier sind also zwei getrennte *communities* zugange (vgl. 3.4.2).

[283] Die Dedekindnachfolge suchte nach einer Theorie für algebraische Zahlkörper (und entwickelte dazu den Körperbegriff) und nach einer *anderen* Theorie für algebraische Funktionenkörper. Kronecker hingegen wollte eine einzige Theorie, durch den Begriff des ggT unifiziert, vorlegen, in der der Körperbegriff keine zentrale Rolle spielt. Weil plädierte auf dem ICM 1954 für eine Wiederbelebung des Kroneckerschen Ansatzes. Was Weil wohl abgelehnt hätte: man kann die Theorie der Grothendieckschen Schemata als diese unifizierende Theorie ansehen; siehe dazu auch [Dieudonné 1990, 7].

[284] hier nach der Darstellung in [Herreman 2000, 12].

[285] Über Aufbau und Inhalt von SGA gibt [Gray 1979, 40] einen Überblick; dort wird auch weitere Sekundärliteratur genannt.

ne andere Cohomologietheorie — die ℓ-adische Cohomologie —, die jene *propriétés énumérées* hat. Im *avant-propos* zu SGA 4 (Bd.I/LNM 269 S.XI) heißt es:

> Le but principal du présent Séminaire est de développer le formalisme de la "cohomologie de Weil" des schémas. A partir essentiellement des résultats qui sont démontrés ici, des arguments bien connus, d'ailleurs dûs à Weil lui-même, permettent de déduire une partie des conjectures de Weil sur les fonctions L des variétés projectives non singulières sur un corps fini.

Dazu, welche "wohlbekannten Argumente" gemeint sind, die auf Weil selbst zurückgehen, habe ich mich ja schon geäußert. Allerdings wird man bemerkt haben, daß es um eine *"cohomologie de Weil" für Schemata (des schémas)* geht — also nicht mehr für Varietäten. An der gerade zitierten Stelle des Textes sind zwei Anmerkungen eingefügt, die deutlich machen, daß es sich hier um einen noch unvollständigen Ansatz handelte, der *au fur et à mesure* weiterentwickelt wurde:

> Au moment d'écrire ces lignes, il n'est pas prouvé que les valeurs propres de l'homomorphisme de Frobenius opérant sur les $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$ sont des entiers algébriques, ni a fortiori que les valeurs absolues sont égales à $q^{i/2}$.
>
> [...] (Rajouté Octobre 1968). Pour un exposé faisant le point de l'état actuel des conjectures de Weil, cf. [[Kleiman 1968]]
>
> (Ajouté en Août 1969). Le fait que les valeurs propres soient des entiers algébriques a été prouvé récemment par P.Deligne (Cf. SGA 7 XXI 5).

Es steht also noch ein Teil der Vermutungen aus, zuletzt nur noch das Analogon der Riemannschen Hypothese. Den Fortgang dieser Entwicklung beschreibt [Katz 1975] sehr schön. Der Text von SGA 4 fährt indes fort mit einigen Bemerkungen zur Rolle der sogenannten étalen[286] Topologie:

> Dans le présent séminaire, nous nous bornons à l'étude de la cohomologie des schémas, relativement à la topologie étale. [...] on verra que la plupart des résultats classiques concernant la cohomologie des espaces topologiques ordinaires (suites spectrales variées, théorèmes de finitude, Künneth, dualité, théorèmes de Lefschetz)
> #69 peuvent se formuler et se démontrer dans le nouveau contexte [...] On obtiendra une théorie cohomologique "à coefficient de caractéristique 0" (comme demandée par Weil) par un passage à la limite projective [...], permettant de définir une cohomologie à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques à partir des coefficients
> #70 $\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}, \nu \to +\infty$. Lorsque ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles, cette cohomologie possède toutes les bonnes propriétés habituelles dans la cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}$ classique (et se prête donc à la formulation des conjectures de Weil).

[286] Diese Topologie hatte Grothendieck, wie in Abschnitt 4.1.2.1 erwähnt, bereits gute Dienste geleistet, um Defizite der Zariski-Topologie im Zusammenhang mit der Lokalisierung von Eigenschaften zu beheben. Ich gehe hier nicht auf die genaue Definition der étalen Grothendiecktopologie ein; vgl. z.B. [Johnstone 1977, 21]. Der Kerngedanke ist, wie in 4.1.2.2 bereits erläutert, daß die Aufgabe, die der Algebra der Inklusionen bei den offenen Mengen in der Garbendefinition zukommt, von der Algebra bestimmter Pfeile übernommen wird, hier der Algebra der étalen Pfeile zwischen Schemata (die Definition dieser Eigenschaft von Pfeilen zwischen Schemata würde hier zu weit führen).

Die Weil-Cohomologie und ihre speziellen Eigenschaften werden also bereits für die *Formulierung* der Vermutungen im neuen Rahmen gebraucht. Es schließt sich eine kurze Diskussion darüber an, daß mit diesen Mitteln unter bestimmten Umständen rein algebraische Beweise von "klassischen" Resultaten möglich werden, die bisher nur transzendent bewiesen waren — wodurch es gleichzeitig zu einer Ausdehnung der Resultate kommt, da die transzendenten Beweise Nichtsingularitätsbedingungen enthielten.

Zu der Fixpunktformel vom Lefschetz-Typ vorzudringen, gelingt Grothendieck durch die Anwendung des Formalismus der 6 Operationen (vgl. Anm.288) auf die étale Cohomologie [Deligne 1998, 17] — ich illustriere dies unten am Beispiel des Dualitätssatzes. Man spürt hier, daß der naheliegende erste Schritt hin zur *Weil cohomology* — die Untersuchung einer Topologie auf den algebraischen Varietäten — bei weitem nicht ausreichend war (da die dort verfügbare Cohomologietheorie nicht die notwendigen Eigenschaften hat): Bei der letztlichen Konstruktion der Cohomologietheorie spielen zahlreiche kategorientheoretische Konzepte eine Rolle. Es war erforderlich, von Varietäten zu Schemata überzugehen und von der Zariski-Topologie zum étalen Situs (damit erscheint die étale Topologie als die zumindest im vorliegenden Zusammenhang wichtigste[287] Grothendieck-Topologie). Ferner war auf algebraischer Ebene eine Limesbildung notwendig; es ist vielleicht etwas weit hergeholt, in dieser Limesbildung eine Analogie des Čech-Vorgangs (vgl. 2.2.3) in der abelschen Variable (vgl. 3.4.1) zu erblicken.

Indirekt kam wohl auch die Veranlassung für die Einführung des Konzepts der derivierten Kategorie[288] von der Auseinandersetzung mit der Weil-Cohomologie her, insbesondere was den Dualitätssatz betrifft: *"Pour obtenir le théorème de dualité*

[287] *"Pour Grothendieck, l'importance de la théorie des topos dépasse de beaucoup le seul cas de la topologie étale"* [Deligne 1998, 16].

[288] Es ist hier nicht Raum, Ausführliches zu diesem Konzept zu sagen — weder, was eine genaue Definition angeht, noch, was die Geschichte des Konzepts betrifft. Für ersteres vgl. z.B. [Kashiwara und Schapira 1990] oder [Gelfand und Manin 1996], für zweiteres [Illusie 1990] oder Houzel [1990, 1998]. Das Konzept scheint im Zusammenhang der étalen Cohomologie hauptsächlich die Aufgabe zu haben, eine bessere Sprache zur Verfügung zu stellen, während es in späteren Anwendungen — vgl. Anm.153 — substantiell ist. Die Theorie der derivierten Kategorien wird effizient anwendbar durch die "6 Operationen" (dabei handelt es sich um Funktoren zwischen derivierten Kategorien; vgl. [Deligne 1998, 17]).

Im Blick darauf, daß ich mich in der vorliegenden Arbeit besonders für die Konstruktion eigenständiger neuer Objekte jenseits von Abstraktionen interessiere, sei noch angedeutet, daß die Theorie der derivierten Kategorien reich an solchen Phänomenen ist. Die Konstruktion der Lokalisierung einer Kategorie, die bei der Konstruktion der derivierten Kategorie eine Rolle spielt, ist angelehnt an die der dualen Kategorie [Gelfand und Manin 1996, 145]; es ergeben sich formale Ausdrücke als Morphismen, und über die Möglichkeiten des Rechnens mit diesen muß man sich eigens Klarheit verschaffen. Man kann in solchen Nonstandardkonstruktionen eigentlich Gleichheiten zwischen Pfeilen nicht mehr dadurch verifizieren, daß man sie "auf Elemente anwendet" (ebd. 154); man tut aber so, als könnte man dies. Derivierte Kategorien erlauben gewissermaßen ein vorübergehendes Rechnen mit "virtuellen Objekten", etwa mit Vektorräumen negativer oder gebrochener Dimension. Man rechnet zeitweilig in einer *Black Box* mit Objekten, die es nicht "gibt", springt aber anschließend wieder heraus. Die virtuellen Objekte (die Objekte der derivierten Kategorien) kann man ihrer Rolle in einer Rechnung nach mit imaginären Zahlen vergleichen (also den Übergang zur derivierten Kategorie mit einem Übergang zum algebraischen Abschluß).

sous une forme satisfaisante, il fallait disposer du langage des catégories dérivées" [Houzel 1990, 20]. Die Grundidee ist folgende: zu einem Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata gibt es die Operation f_* des direkten Bildes von Garben von $\mathcal{O}_X$-Moduln bzw. den zugehörigen derivierten Funktor Rf_* auf der derivierten Kategorie. Man konstruiert nun einen Adjungierten $f^!$ in folgendem Sinn:

$$R\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, f^!G) \cong R\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*F, G)$$

(siehe auch [Kashiwara und Schapira 1990, 139], [Illusie 1990, 378ff], [Verdier 1997, 10ff].) Houzel gibt einen Beispielfall (mit bestimmten Voraussetzungen an f), für den man $f^!$ hinschreiben kann; im Allgemeinen ist dies sehr kompliziert. Die entsprechende Konstruktion für étale Cohomologie findet sich in SGA 5; dort wird der Dualitätssatz für die ℓ-adische Cohomologie gezeigt. Der Übergang zur derivierten Kategorie ist deshalb erforderlich, weil f_* selbst im allgemeinen keinen Adjungierten hat (eine Ausnahme bilden Einbettungen f offener oder abgeschlossener Mengen [Gelfand und Manin 1996, 234], aber diese Situation hat man bei Grothendieck-Topologien gerade aufgegeben).

Interessant ist noch, wieso man den Isomorphismus überhaupt als Dualitätsisomorphismus anspricht. Dazu führen [Kashiwara und Schapira 1990, 140] aus, wie man die einzelnen Bestandteile speziell wählen muß, damit die übliche Poincaré-Dualität dasteht. Zunächst kann man, ähnlich wie beim Satz von Riemann-Roch (3.3.3.5), den "relativen" Akzent eliminieren, indem man für X einen Punkt nimmt; nimmt man ferner Y als n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit an und die Garben F, G als die jeweils entsprechenden konstanten Garben mit Faser $\mathbb{Q}$, lautet der Isomorphismus

$$(H_c^{n-j}(Y, \mathbb{Q}))^* \cong H^j(Y, \mathbb{Q});$$

man hat also tatsächlich im wesentlichen die übliche Poincaré-Dualität wiedergewonnen (c bezeichnet einen bestimmten Trägertyp, $*$ den Übergang zum Dualraum i.S. der Vektorraumtheorie). Der allgemeinere Isomorphismus (die Adjunktion $f^!/Rf_*$) ist also gewissermaßen ein "Dualitätssatz in relativer Form".

4.2.4 Grothendiecks Visionen: Standardvermutungen, Motive und Tannakakategorien

Mit "Visionen" ist hier gemeint, daß die genannten Stichworte zu unvollendeten Projekten gehören[289]. Sieht man sie im Kontext des Analogons der Riemannschen Hypothese, kann man die Projekte als gescheitert auffassen, da Deligne ohne die Vollendung dieser Projekte ausgekommen ist. Sieht man in den Projekten eher den allgemeinen Ansatz einer begrifflichen Umgestaltung der algebraischen Geometrie

[289] *"Grothendiecks broken dream was to develop a theory of* motives*, which would in particular unify Galois theory and topology. At the moment we have only odd bits of this theory [...]"* [Cartier 2001, 405]. Auch [Deligne 1998, 18], [Grothendieck 1969, 198], [Saavedra Rivano 1972, 394f]

verwirklicht, einer Umgestaltung, bei der ein Beweis der Weil-Vermutungen gewissermaßen ein Nebenprodukt wäre (und dies scheint ja Grothendiecks Intention gewesen zu sein), so sind es Projekte, die eben noch offen sind. Hier werden sie knapp dargestellt, insofern in ihnen KT eine Rolle spielt.

Grothendiecks Beweisplan für das Analogon der Riemannschen Hypothese, der mit den Stichworten Standardvermutungen, Motive und Tannakakategorien verbunden ist, führt zurück auf [Serre 1960]. Dies ist ein Auszug eines Briefs von Serre an Weil vom 9.11.1959, worin Serre einen *procédé* darstellt *"[qui] s'applique aux variétés de dimension quelconque, et [par lequel] on obtient à la fois la positivité de certaines traces, et la détermination des valeurs absolues de certaines valeurs propres, en parfaite analogie avec tes chères conjectures sur les fonctions zêta"*. Die Aussage, die Serre macht, ist die folgende:

> Théorème 1. *Soit V une variété projective irréductible, non singulière, définie sur [$\mathbb{C}$], et soit $f : V \to V$ un morphisme de V dans elle-même. Supposons qu'il existe un entier $q > 0$ et une section hyperplane E de V tels que le diviseur $f^{-1}(E)$ soit algébriquement équivalent à $q \cdot E$. Alors, pour tout entier $r \geq 0$, les valeurs propres de l'endomorphisme f_r^* de $H^r(V, \mathbb{C})$ défini par f ont pour valeur absolue $q^{r/2}$.*
>
> (Note que, si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un corps fini $\mathbb{F}_q$ et f par le morphisme de Frobenius correspondant, le diviseur $f^{-1}(E)$ est équivalent à $q \cdot E$, le Théorème 1 est donc bien l'analogue kählérien de "l'hypothèse de Riemann".)

In seinen *Collected papers* gibt Serre selbst, ähnlich wie in [Colmez und Serre 2001], zahlreiche Kommentare zu den aufgenommenen Arbeiten. Zur eben zitierten Stelle merkt er an, daß Deligne 1974 — Serre schreibt fälschlich 1964 — gezeigt habe, daß für Charakteristik $p > 0$ der Satz zumindest dann gilt, wenn f ein Frobenius-Endomorphismus ist und ℓ-adische Cohomologie genommen wird mit $\ell \neq q$. Er spricht ferner eine weitergehende Vermutung über f für $p > 0$ an, deren Richtigkeit sich aus Grothendiecks "Standardvermutungen" ergeben würde. Was sind nun diese Standardvermutungen? Hartshorne beschreibt die Situation so:

> [[Serre 1960]] established [an] analogue of the Riemann hypothesis for the eigenvalues of certain operators on the cohomology of a Kähler manifold, using the powerful results of Hodge theory. This suggests that one should try to establish in abstract algebraic geometry some results known for varieties over **C** via Hodge theory, in particular the "strong Lefschetz theorem" and the "generalized Hodge index theorem". [[Grothendieck 1969]] optimistically calls these the "standard conjectures", and notes that they immediately imply the analogue of the Riemann hypothesis. See also [[Kleiman 1968]] for a more detailed account of these conjectures and their interrelations. [Hartshorne 1977, 452]

Es besteht ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen Weils Beweisansatz für den Kurvenfall in [1948] (vgl. Anm.278) und der von Serre benutzten Hodge-Theorie, denn die (von Weil benutzte) Ungleichung von Castelnuovo und Severi folgt gerade aus dem *Hodge theorem* [Hartshorne 1977, 368]. Dies hatte Grothendieck in [1958] festgestellt; diese Beobachtung hatte ihn auf die Standardvermutungen geführt (vgl. [Katz 1975]).

Delignes Beweis kommt dann ohne die Standardvermutungen aus; [Katz 1975] macht sogar das Dogma, man müsse zuerst die Standardvermutungen zeigen, bevor man das Analogon der Riemannschen Hypothese zeigen könne, dafür verantwortlich, daß Delignes Beweis relativ spät erbracht wurde; Katz erwähnt, daß Dieudonné dieses Dogma an verschiedenen Stellen transportiert. Grothendieck kritisiert in *Recoltes et semailles* Deligne für seine Abtrünnigkeit vom ursprünglichen Programm.

Doch mit dem Hinweis auf die Standardvermutungen ist der Impuls, der von Serres Arbeit [1960] auf Grothendiecks Plan ausging, noch nicht erschöpfend beschrieben, insbesondere was die Rolle der KT dabei angeht. In diesem Plan war dem Konzept des "Motivs" eine wichtige Aufgabe zugedacht, die Deligne so erklärt:

> Soit X une variété algébrique sur k algébriquement clos. Pour chaque nombre premier ℓ premier à la caractéristique, la topologie étale fournit des groupes de cohomologie ℓ-adique $H^i_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$. Si k est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on dispose d'isomorphismes de comparaison
> $$H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} H^i_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}_\ell).$$
> Pour k de caractéristique > 0, il n'existe pas de cohomologie entière fonctorielle donnant lieu à de tels isomorphismes. Néanmoins, les $H^i_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ ont, pour ℓ variable, un « air de famille ». [...]
>
> La théorie des motifs est d'abord une tentative pour trouver un substitut à l'inexistante cohomologie entière, expliquant l'air de famille[[290]] entre les $H^i_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ [...] On reconnaît la patte du Maître dans l'idée que le problème n'est pas de définir ce qu'est un motif : le problème est de définir la catégorie des motifs, et de dégager les structures qu'elle porte. Ces structures devraient permettre de prouver la conjecture de Weil sur le modèle de [[Serre 1960]]. Voir [[Grothendieck 1969]]. [Deligne 1998, 17]

Das "Motiv" zu einer Varietät X ist $H^*(X) = \bigoplus_i H^i(X)$; es handelt sich um ein Analogon (mit verfeinerter Struktur) zu Hopfs Homologiering (vgl. 2.1) oder Lerays *anneau d'homologie* aus [1946a]. Die Geschichte des Begriffes "Motiv" beginnt vermutlich 1964. In einem Brief an Serre vom 16.8.1964 erläutert Grothendieck diese Idee; vgl. [Colmez und Serre 2001, 173ff]. Serre gibt dazu an: *À ma connaissance, ce texte est le premier où la notion de motif apparaisse* (ebd. S.275). Grothendieck verwendet in diesem Brief übrigens eine ganz ähnliche Formulierung wie Deligne, wonach das eigentliche Problem darin bestehe, die *Kategorie* der Motive zu definieren.

Mit dieser Problematik der Definition einer *catégorie des motifs* ist man nun bei der Rolle der KT für Grothendiecks Vision angekommen. Grothendieck entwickelte eine axiomatische Charakterisierung des Typs von Kategorie, um den es sich handeln muß; man spricht von Tannaka-Kategorie (im folgenden kurz TK). Eine TK ist eine abelsche Kategorie, bei der die Hom-Mengen sogar $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind; ferner hat

[290] Laut [Cartier 2000, 31] verwendet Grothendieck in *Recoltes et semailles* als metaphorische Beschreibung des Problems des *air de famille* das Bild eines Leuchtturms, der immer nur einen schmalen Streifen des Panoramas erhellt. Cartier nennt anschließend einige Autoren, die das Programm der Motive weiterentwickelt haben.

man einen Begriff der Dualisierung[291] sowie ein Tensorprodukt[292], das mit Hom verträglich ist. *"il s'agissait de formaliser la notion de produit tensoriel de motifs, correspondant par la formule de Künneth au produit des variétés"* [Deligne 1998, 18]. Eine Standardreferenz zum Thema TK ist [Saavedra Rivano 1972]; diese Arbeit enthält einige Fehler, die in [Deligne 1990] korrigiert werden.

Dieser Typ von Kategorien ist deshalb bedeutsam, weil er mit der Darstellungstheorie sogenannter proalgebraischer Gruppen zusammenhängt[293]. Man kommt zu einem *dictionnaire* der Form "die TK ist halbeinfach genau dann, wenn die Gruppe die und die Eigenschaft hat" usw. Ähnlich wie seine Topostheorie kann man auch Grothendiecks Entwurf der Motive als Fortsetzung des Erlanger Programms auffassen. Hier ist nämlich, ähnlich wie bei Klein eine Geometrie in ihrer Bewegungsgruppe codiert ist, die universelle Cohomologie einer Varietät codiert in einer proalgebraischen Gruppe.

Man sollte allerdings nicht verschweigen, daß sich das Projekt bisher nicht völlig hat realisieren lassen und daß neuere Arbeiten eher desillusionieren. Dies hängt mit den Morphismen der gesuchten Tannaka-Kategorie der Motive zusammen: klar ist bisher nur, daß dies die algebraischen Zykeln auf dem Produkt zweier Varietäten *modulo* einer Äquivalenzrelation sind; als Äquivalenzrelationen bieten sich dabei allerdings mehrere an, nämlich rationale, numerische, algebraische und homologische Äquivalenz. Man hat vermutet, daß es so viele algebraische Zykel gibt, daß all diese Äquivalenzrelationen zusammenfallen; einen ähnlichen Inhalt haben auch Grothendiecks Standardvermutungen. *A priori* hat man jedoch verschiedene Motive; [Deligne 1994] trübt die Hoffnung, da weiterzukommen, und Uwe Jannsen legt dar, daß man mit der Halbeinfachheit der zu erwartenden Kategorie wohl nicht zu rechnen hat.

---

[291] Wohl hier besteht der Zusammenhang zu den Arbeiten des japanischen Mathematikers Tannaka, der für die Benennung Pate gestanden hat: dieser hatte sich offenbar mit einem funktionentheoretischen Problem befaßt, bei dem er es formal mit einer ähnlichen Dualisierung zu tun hatte. Darauf hat mich Norbert Schappacher hingewiesen; es ist schwierig, dafür einen Beleg zu finden — zumindest, wenn man sich auf die wenigen Besprechungen von Arbeiten Tannakas in den *Mathematical Reviews* beschränkt. Ich gehe davon aus, daß Grothendieck die Namensgebung zumindest teilweise aus einer gewissen Dankbarkeit heraus vorgenommen hat, war es doch nach einigem Hin und Her schließlich Tannaka, der den Tohoku-Artikel im Journal gleichen Namens untergebracht hat (vgl. 3.3.1.1).

[292] An dieser Stelle ist eine historische Randbemerkung anzubringen. Kategorien mit einem Tensorprodukt treten bei [Mac Lane 1963, 43] auf (*Categories with a multiplication*, S.29; *tensored categories*, S.43); Mac Lane verweist auf [Bénabou 1963] und [Mac Lane 1965] (die letztgenannte Arbeit ging aus *colloquium lectures* der AMS von 1963 hervor; die Besprechung des Tensorprodukts findet sich S.75ff). Ferner spielt der Begriff in [Eilenberg und Kelly 1966] eine Rolle (vgl. [Mac Lane 1976a]). Pierre Cartier hat mir gegenüber im persönlichen Gespräch erwähnt, ebenfalls an solch einen Begriff gedacht zu haben. Möglicherweise ist dies gemeint, wenn es bei [Grothendieck 1957, 121] als Anmerkung *1 bis* heißt: *"M.P. Cartier vient de trouver une formulation satisfaisante générale pour les structures multiplicatives en Algèbre Homologique, qu'il exposera en son lieu"*.

[293] Dies sind im Falle char $= 0$ projektive Limites von algebraischen Gruppen (also algebraischen Varietäten, die mit einer Gruppenoperation versehen sind); auf den Fall char $= p$ gehe ich nicht näher ein.

4.3 Wieso gerade Kategorientheorie — und wozu?

Wie bereits in der Einleitung unterstrichen, kann man nicht bei der Feststellung stehenbleiben, daß für Grothendiecks Umgestaltung der algebraischen Geometrie die KT von großer Bedeutung war. Die eigentliche Aufgabenstellung bei der Interpretation der zusammengestellten historischen Informationen ist eine philosophische: Wieso ist das so? Die Aufgaben der KT sind zahlreich:

- die KT bietet sich zur Akzentuierung "relativer" Aussagen an;
- es kommt auf Charakterisierung bis auf Isomorphie an, und Isomorphie ist im Einzelfall nicht automatisch über Bijektionen im Sinne der Mengenlehre definiert (siehe Schemata);
- durch den Begriff des Situs wird die Definition von Garben auf einem bestimmten Typ von Kategorien ermöglicht, um den Mängeln der vorher üblichen speziellen Vertreter dieses Typs zu entkommen;
- "Räume ohne Punkte" (vgl. 5.3.1.2).

Die Akzentuierung "relativer" Aussagen ist uns schon bei Grothendiecks Fassung des Satzes von Riemann-Roch begegnet (vgl. 3.3.3.5). [Grothendieck 1960a, 106] schildert die Motivation, sich mehr für Morphismen als für einzelne Varietäten zu interessieren (Grothendieck spricht hier selbst von *"absolute"* und *"relative"*): diese Idee wurde aus der Einsicht geboren, daß nur *irrtümlich* oft ein *Körper* eine Rolle spielt; in Wahrheit genügt es, einen zweiten Ring B einzuführen, so daß der Grundring A eine endlich erzeugte B-Algebra ist. Vgl. auch [Gelfand und Manin 1996, 82]. [Hartshorne 1977, 89] erklärt die generelle Zielsetzung des relativen Ansatzes: Studiere Eigenschaften von $f : X \to S$ bei Abänderung von S etc.

Es scheint ein wichtiges Muster in Grothendiecks Arbeiten zu geben, das man unter die Maxime fassen kann: "Dehne die Perspektive auf ursprünglich ausgeklammerte Dinge aus, lasse mehr Objekte zur Konkurrenz zu!" (der richtige Rahmen ist zumeist der größere Rahmen). Hiervon gekennzeichnet sind:

- die Einführung der abelschen Kategorien gegenüber Modulkategorien;
- der Übergang in der algebraischen Geometrie von Körpern zu beliebigen kommutativen Ringen;
- der Übergang zum Situs anstelle der vormaligen Garbendefinition;
- der Übergang zu den derivierten Kategorien anstelle der vormaligen Derivation von Funktoren.

Ich nehme an, diese Liste erschöpft keineswegs die Teile seines Werkes, in denen man das Muster beobachten kann. Man kann dieses Verfahren beschreiben als eine Leugnung der Primitivität der jeweils ursprünglich primitiven Begriffe — wodurch dann die Grundlegung der jeweils betroffenen Disziplin, Theorie, Methode geändert wird.

Gelfand und Manin heben hervor, daß Grothendieck bestimmte Grundbegriffe neu definiert hat, um funktorielle Eigenschaften sicherzustellen:

> Good categorical properties of [...] functors [between algebra and geometry] (e.g. equivalence) are so important that to save them one is often forced to change old structures or to introduce new ones. This is how affine schemes, nuclear vector spaces [...] and objects of derived categories appeared in mathematics [Gelfand und Manin 1996, 76].

Demnach wären also von der KT nahegelegte Kriterien der Motor für die Abänderung eines begrifflichen Rahmens. Was Gelfand-Manin mit ihrer Aussage über affine Schemata meinen könnten, wird in Abschnitt 4.1.1.2 untersucht; was derivierte Kategorien betrifft, vgl. Anm.288. Man könnte, in Anlehnung an den Kerngedanken der Tohoku-Arbeit, die Maxime auch weniger technisch so formulieren, daß es Grothendieck um die Vervollständigung von Analogien ging: Durch die neue Garbendefinition von Tohoku vervollständigte er die Analogie zwischen den derivierten Funktoren von Cartan-Eilenberg und der Garbencohomologie, durch den Begriff des Schemas die Analogie zwischen algebraischer Geometrie und kommutativer Algebra und durch den Begriff der Grothendieck-Topologie die Analogie zwischen Galoistheorie und Theorie der Überlagerungen[294]. Hierbei gelang ihm die Vervollständigung der jeweiligen Analogien, indem er zunächst die den beteiligten mathematischen Theorien zugehörigen Kategorien bestimmte und sodann eine der beiden so lange abänderte, bis er zu einem Paar äquivalenter (oder dual äquivalenter) Kategorien gekommen war — um dann Probleme der einen Kategorie durch Übertragung in die andere Kategorie zu lösen, nach dem bewährten Prinzip der algebraischen Topologie (wo man es natürlich nicht mit einem Paar äquivalenter Kategorien zu tun hat)[295].

In Grothendiecks Praxis nimmt begriffliche Klärung einen höheren Stellenwert ein als das tatsächliche Durchführen der Beweise. Die meisten Beweise in Tohoku fehlen; so ist der Beweis des Hauptresultats, daß der gewählte begriffliche Rahmen für das Ziel der Arbeit (die Anwendung des Kalküls der derivierten Funktoren) ausreichend ist und daß Garben unter diesen Rahmen fallen, lückenhaft; was sich aus einer reinen Entfaltung des begrifflichen Rahmens gewinnen ließe, fehlt (Stichworte *schémas de diagrammes*, 3.3.4.2; Äquivalenz von Kategorien, 3.3.4.3). Auf eine ähnliche Situation in Grothendiecks Arbeit zu *catégories fibrées et descente* in SGA 1 weist Bénabou hin:

> The proofs are long and tedious, but straightforward verifications, mostly left to the reader because they would add nothing to our understanding of fibrations, and moreover one is convinced from the beginning that the result has to be true. [1985, 29]

[294] Auf die letztgenannte Analogie gehe ich in der vorliegenden Arbeit aus Platzgründen nicht ein; vgl. z.B. [Mac Lane 1989, 6].

[295] Die Erwähnung der *nuclear vector spaces* bei Gelfand-Manin deutet darauf hin, daß Grothendieck auch schon bei seiner Dissertation von einer solchen Maxime geleitet war; zu dieser Dissertation vgl. Anm.207.

Der "richtige" Begriff ist also der, den man nur noch entfalten muß, und schon steht der Beweis da (Beweis durch "Nachrechnen")[296] — und die Überzeugung von der Richtigkeit des Resultats bezieht man nicht aus dem Beweis, sondern bringt man schon mit aus der Erfahrung mit zahlreichen anderen ähnlichen Verifikationen. Dies ist wieder ein Fall, wo der ontologisch orientierte Reduktionismus nicht mathematische Erkenntnis erklärt: Die Einsehbarkeit eines Beweises wird in der Regel gerade nicht durch eine Zerlegung in elementare Einzelschritte erreicht, sondern durch Beschreiten geeigneter Syntheseebenen[297].

4.4 Eine überraschende Anwendung: "Geometrische Logik"

Nachdem sich in der algebraischen Geometrie Grothendieckscher Prägung erstmals die KT als mächtiges Begriffsbildungsinstrument zum inhaltlichen Umbau einer breiten Disziplin manifestieren konnte, waren es gerade die dort entwickelten Konzepte und Methoden, die es ermöglichten, kategorielle Begriffe auf die mathematische Logik zu übertragen und diese auf eine reichhaltige und von hergebrachten Formen der Logik weitgehend unabhängige begriffliche Basis zu stellen. Dies war, so scheint mir, deshalb so, weil die besagten Konzepte und Methoden bereits in ihrem originären geometrischen Kontext von *fundamentaler* Bedeutung sind — in einem qualifizierten Sinn, da sie nicht bei einem Ordnen vorfindlicher Mathematik stehen bleiben, sondern für eine echte Vergrößerung der "Reichweite" mathematischen Untersuchens wesentlich sind.

Es ist also die Sichtweise erlaubt, wonach kategorielle Logik nach der algebraischen Geometrie *sui generis* ein weiterer Bereich ist, in dem Grothendiecks visionäre Unternehmung ihre Fruchtbarkeit zeitigen konnte; es werden Methoden, die in (im

[296] Es sind zumeist solche "Beweise", die Lernenden als Übungsaufgaben aufgegeben werden. Was lernen sie dadurch? Sie internalisieren dadurch viel eher die korrekte Verwendung der Begriffe (kommen irgendwann ohne Nachrechnen aus), als daß sie auch lernen, selbst Beweise zu konzipieren (z.B. geeignete Begriffe zu entwickeln). Man lernt gewissermaßen die Vokabeln, aber noch nicht, wie man Texte schreibt.

[297] Ähnliche Ziele des Einsehbarmachens von Beweisen hatten auch Eilenberg und Steenrod mit ihrer Axiomatisierung von Homologietheorien:

> The great gain of an axiomatic treatment lies in the simplification obtained in proofs of theorems. Proofs based directly on the axioms usually are simple and conceptual. It is no longer necessary for a proof to be burdened with the heavy machinery used to define the homology groups. [Eilenberg und Steenrod 1952, xf]

(mehr dazu in 2.5.1). Auch die Beweistechnik der kommutativen Diagramme zielt darauf, ein Objekt herzustellen, das man nur noch entfalten muß, um den Beweis zu haben:

> In the case of many theorems, the setting up of the correct diagram is the major part of the proof. [Eilenberg und Steenrod 1952, xi]

(vgl. 2.5.3). Es geht hier also nicht um eine "Grothendiecksche Privatphilosophie". Auf die erkenntnistheoretischen Implikationen dieser Sichtweise komme ich in 8.2.2 zurück.

weitesten Sinne) geometrischen Kontexten entwickelt wurden, auf logische Problemstellungen übertragen. Dieser Gedanke erscheint mir eine besonders hervorzuhebende Leistung zu sein[298]; er geht offenbar auf F. William Lawvere zurück, von dem auch die meisten übrigen Schlüsselideen zur Ausgestaltung einer kategoriellen Logik stammen.

Lawvere hat bei Samuel Eilenberg promoviert, und so man kann wohl mit Fug und Recht sagen, daß kategorielle Logik ein Forschungsbereich ist, in dem die so lange fast getrennten *communities* in Amerika und Frankreich wieder ein wenig zusammengewachsen sind. Gleichzeitig hat das Arbeitsgebiet der kategoriellen Logik denjenigen Forschern Auftrieb gegeben, die die KT als eigenständige mathematische Forschungsdisziplin (und nicht sogleich als Hilfsdisziplin) sehen wollen, denn die Grundbegriffe der kategoriellen Logik lassen sich, anders als die Grothendieckschen Vorbilder, auf der Ebene der elementaren Kategorientheorie als Theorie 1.Stufe charakterisieren; somit läßt sich in einem modelltheoretischen Sinn die kategorielle Logik als Subtheorie der elementaren Kategorientheorie ansehen — und da erstere unbestreitbar mit an und für sich relevanten und mathematisch anspruchsvollen Problemen befaßt ist und ebensolche Resultate hervorbringt, qualifiziert dies die elementare Kategorientheorie als eigenständige Forschungsdisziplin.

In einer vollständigen Geschichte der KT müßte dem Aufkommen der kategoriellen Logik und Modelltheorie zweifellos ein eigenes Kapitel gewidmet werden; es wäre dort eine Darstellung sämtlicher sonstiger Entwicklungen in der mathematischen Logik in den 60er Jahren zu geben, die einen Bezug zu kategorientheoretischen Methoden haben. Dies muß hier leider unterbleiben; es mögen folgende Bemerkungen genügen:

Der begriffliche Rahmen für kategorielle Logik ist die Theorie der *elementaren* To-

[298] Es ist gesagt worden, Grothendiecks Umgestaltung der algebraischen Geometrie könne mit gewissem Recht als “neues Erlanger Programm” gesehen werden (4.1.2.3, 4.2.4). Im Zusammenhang der Übertragung von Grothendiecks Konzepten auf die Logik ist darauf hinzuweisen, daß bereits vor diesen Unternehmungen eine sehr konkrete Übertragung von Kleins Erlanger Programm in die Logik versucht wurde, nämlich von [Mautner 1946]: Dieser faßt die zweiwertige Boolesche mathematische Logik *of propositions and propositional functions* als Invariantentheorie einer symmetrischen Gruppe im Sinne des Erlanger Programms (wie es bei [Weyl 1939, 13-18] dargestellt ist) auf. Ähnlich wie für geometrische Eigenschaften gezeigt wird, daß sie von einem Koordinatensystem unabhängig sind, indem man ihre Invarianz unter der Gruppe der Koordinatentransformationen zeigt, gibt Mautner eine Gruppe an (nämlich die symmetrische Gruppe aller Permutationen der individuellen Variablen), so daß logische Begriffe oder Eigenschaften genau dann unabhängig von den ihren Bestandteilen zugewiesenen Wahrheitswerten (den “logischen Koordinaten”) sind, wenn sie unter dieser Gruppe als Transformationsgruppe invariant sind. Auch eine Übertragung des Tensorkalküls der Geometrie wird vorgenommen. Mautner überträgt also geometrische Vorgehensweisen auf logische Problemstellungen; im Grunde zeigt er auf, daß die sich im Falle der Geometrie ergebenden Kalküle formal nicht an diese gebunden sind, sondern sich in anderen Kontexten wiederfinden lassen. Mautners Ausdehnung des Programms scheint mir orthogonal zu derjenigen Grothendiecks zu verlaufen (da es Grothendieck weiterhin um Geometrie geht). Der Vergleich mit den im folgenden dargestellten Anwendungen Grothendieckscher Konzepte in der Logik drängt sich auf, wäre aber auf eine genaue Qualifizierung der Aussage angewiesen, Grothendiecks Umgestaltung der algebraischen Geometrie sei ein “neues Erlanger Programm”. Da diese Aufgabe doch etwas abseits des Hauptthemas Kategorientheorie zu liegen scheint, bleibt sie hier unbearbeitet.

poses; dieser Begriff knüpft an den Begriff des Grothendieck-Topos an[299]. Hier wird, nahegelegt durch Girauds Charakterisierung (vgl. 4.1.2.3), Grothendiecks Topos-Begriff so umgestaltet, daß er unabhängig von der jeweils verwendeten Mengenlehre ist. Das Ziel ist also

> to characterize a class of categories, which behave "internally" in the way in which we expect Grothendieck toposes to behave, but which are defined by "elementary" axioms which are independent of set theory [Johnstone 1977, 23].

Dies ist offenbar ein Schritt von neuer Art: für Grothendieck war die jeweilige Mengenlehre etwas, was man sich als am Anfang jeder Untersuchung geeignet festgelegt denkt, so daß dieser Grundlegung der weiteren Arbeit in der Folge keine Beachtung mehr geschenkt werden muß ("irgendwie, aber fest"); hier ist nun die gewählte Mengentheorie Dispositionsmasse, die variiert werden kann. Das liegt daran, daß die Untersuchungen, in denen der Begriff des elementaren Topos zuerst angewandt wurde, in den Bereich der Modelltheorie der Mengenlehre gehörten[300] und es insofern genau der entscheidende Punkt war, die Abhängigkeit von der jeweiligen Mengenlehre explizieren zu können (weil ja Aussagen über bestimmte Mengenlehren gemacht werden sollten); KT wird zum Werkzeug für Fragen der Mengenlehre. Dies ist genau die Stelle, wo in der Grundlagendebatte die Waage zugunsten der KT umschlägt. Für Grothendieck ist Mengenlehre Grundlage; er nimmt "mehr" an als ZF (Universen); Lawvere nimmt "weniger" an. Entscheidend für die Durchführbarkeit dieses Projekts war, daß es tatsächlich möglich war, jene Klasse von Kategorien, die sich "intern" wie Grothendieck-Toposes verhalten, zu charakterisieren.

[299] Genauer spricht [Barr und Wells 1985, 87] von einer *"confluence of two streams of mathematical thought"*: Grothendieck-Toposes und Lawveres *"continuing search [...] for a natural way of founding mathematics [...] on the basic notions of morphism and composition of morphisms"*.

[300] wie z.B. ein alternativer Beweis des Resultats von Cohen (vgl. 7.3.3).

Kapitel 5

Nachlese: Geschichte des KT-Begriffssystems

5.1 Der Einfluß der KT auf einige zentrale Begriffe

Es ist ein Gemeinplatz, daß es für mathematisches Denken von größter Bedeutung ist, genau zu definieren, worüber man spricht. Weniger auf der Hand liegend, aber seinerseits sehr bedeutsam für die Weiterentwicklung mathematischen Denkens ist ein anderer Aspekt des Definierens: das *Ändern* von Definitionen. Ein solches Ändern begegnet in unserem Kontext sehr häufig. Wenn man sich genau ansieht, wovon dieses Ändern geleitet ist, stellt man fest: Bei den geänderten mathematischen Definitionen geht es nicht darum, einen irgendwie anderweitig gegebenen Gegenstand möglichst genau zu beschreiben. Es geht vielmehr darum, einen mathematischen Begriff möglichst weitgehend den Problemen anzupassen, auf die er angewandt werden soll, und mathematische Probleme möglichst weitgehend den Methoden anzupassen, die zu ihrer Lösung zur Verfügung stehen. Dies wird leider etwas verschleiert durch die häufig anzutreffende Rede, man habe jetzt endlich die "richtige" Definition dieses oder jenes Begriffes.

In den folgenden Abschnitten soll noch einmal zusammengestellt werden, welche Transformationen einige Schlüsselbegriffe der bisher dargestellten mathematischen Unternehmungen durchliefen und inwiefern diese Transformationen vom Einsatz kategorientheoretischer Konzepte geprägt waren. Die Methode des Eingriffs der KT hierbei war die diagrammatische Charakterisierung von Konzepten; diese durchlief zumeist verschiedene Stadien: Elimination von Elementen, Elimination spezieller Kategorien in den Definitionen, Elimination von nichtelementaren Konstrukten.

5.1.1 Homologie

Vorweg: der Begriff der Homologie stand in den bisher vorgestellten Anwendungen der KT eindeutig im Mittelpunkt. Etwas böswillig könnte man dies (im Blick auf die in der Einleitung ausgesprochene Frage, ob die KT überhaupt wichtig genug ist, eine historische Monographie zu verdienen) so auslegen, daß eigentlich nicht die KT, sondern der Begriff der Homologie das mächtige Werkzeug war, das man auf andere Kontexte übertragen wollte, und die KT lediglich dienende Funktion im Zusammenhang mit Fragen der Homologie (insbesondere mit solcher Übertragung des Werkzeugs Homologie in andere Kontexte) hatte. Es liegt dieser (nicht völlig falsche) Eindruck allerdings zumindest zum Teil an der Auswahl der hier besprochenen KT-Anwendungen; es gab (nach und nach) auch wichtige Aufgaben für die KT, die nichts mit Homologie zu tun hatten.

Wir hatten einige Wandlungen des Begriffs Homologie nachvollzogen; zunächst sahen wir innerhalb der algebraischen Topologie, wie kombinatorische Invarianten sich zu algorithmisch definierten Gruppen wandelten und diese Anlaß zu axiomatischen Homologietheorien gaben. Auch wurde, unter anderem im Zusammenhang mit Dualitätssätzen, der Begriff der Cohomologie eingeführt (2.1.2.3), der es erlaubte, die Methode in Bereichen außerhalb der algebraischen Topologie einzusetzen: ihr Einfluß weitete sich erst auf die reine Algebra, dann auf die algebraische Geometrie aus. Um die Rolle der KT bei diesen Wandlungen zu rekapitulieren, bietet es sich an, vier Einzelkonzepte, die uns im Zusammenhang mit Homologie begegnet sind (nämlich Komplexe, direkte und inverse Limites, Koeffizienten und Garben) herauszugreifen und den Befund jeweils "aufzuschneiden" entlang der Transformationen, die diese Konzepte durch die Anwendung kategorientheoretischer Sprache erfuhren. Zum Abschluß soll dann noch exemplarisch ein Konzept ausführlicher besprochen werden, das nicht dem homologietheoretischen Kontext entstammt, aber gleichfalls von der KT transformiert wurde: das Konzept des Gruppoids.

5.1.2 Komplexe

Spricht man heutzutage von "Kettenkomplex", so denkt man an eine absteigende Folge von abelschen Gruppen G_i, verbunden durch Homomorphismen $d_i : G_i \to G_{i-1}$, wobei noch vorausgesetzt wird, daß $d_{i-1}d_i = 0$ ist. Ein solcher Begriff ist insbesondere für die Zwecke der homologischen Algebra genügend allgemein (wobei die abelschen Gruppen noch durch Objekte in einer beliebigen abelschen Kategorie ersetzt werden könnten), hat sich aber historisch aus sehr viel spezielleren Begriffen entwickelt. Ich versuche hier nicht, eine vollständige Geschichte dieser Begriffstransformationen zu geben, sondern möchte nur noch einmal zusammenfassend unterstreichen, was schon an verschiedenen Stellen gesagt wurde, daß nämlich die Hervorhebung des heute üblichen Begriffs "Kettenkomplex" im Zusammenhang steht mit der Hervorhebung kategorientheoretischer Sprache und Methodik.

Die erstmalige Definition des genannten Begriffs wird allgemein Mayer zugewiesen. Laut [Eilenberg und Steenrod 1952, 124] sprach Mayer von *"group system"* statt von "Kettenkomplex"[301]; Eilenberg-Steenrod machen hierzu keine Quellenangabe. Bei [Mayer 1929a, 2] steht eine in Frage kommende Definition; allerdings ist hier nicht etwa, wie man nach der Angabe von Eilenberg-Steenrod erwarten könnte, die Rede von "Gruppensystem", sondern von "Komplexring" (zusammengesetzt aus den einzelnen Gruppen; vgl. Hopfs Homologiering, wie dargestellt in 2.1.2.1). Mayer

[301]Zur Herkunft der Rede von *"chain"* (Kette) vgl. [Alexander 1920].

zeichnet in jeder Gruppe eine Basis aus (nimmt die Gruppen also insbesondere als frei an; Axiom III); so etwas bezeichnen Eilenberg-Steenrod als *“abstract cell complex”* (S.156). Es ist insgesamt anzunehmen, daß Mayer an anderer Stelle das Axiom III weggelassen und die *so* charakterisierten Objekte als “Gruppensystem” bezeichnet hat. Eilenberg-Mac Lane verweisen nämlich gerade auf Mayer, wenn es um den Wegfall der Bedingung, die Gruppen mögen frei sein, geht (s.u.).

Jedenfalls gab es zu Mayers Definition eines solchen “abstrakten[302] Zellenkomplexes” Alternativen. Eine etwas andere Definition bringt [Tucker 1933]; dieser benennt auch den Unterschied zu Mayer (den er zitiert; S.194): die Existenz einer Relation *“is on the boundary of”* zwischen Zellen. Üblicherweise wird ja “Zelle” beim abstrakten Begriff als undefiniert behandelt; Tucker motiviert die neueingeführte Relation mit geometrischen Überlegungen. Lefschetz entscheidet sich in [1942] für Tuckers Definition und sagt dazu:

> Other general types have been considered in the literature notably by [[Newman 1927]] and [[Mayer 1929a]]. Newman’s type is designed chiefly to preserve as many as possible of the properties of polyhedra and for many purposes it is decidedly too “geometric.” In Mayer’s type on the other hand only the properties which flow from the incidence numbers are preserved and the type is too “algebraic.” Tucker’s type may be said to occupy a reasonable intermediate position [Lefschetz 1942, 89].

(Ich gehe in der vorliegenden Arbeit nicht auf *Newman’s type* ein). Diese Einschätzung Lefschetz’ entspricht dem Urteil, das er laut [Volkert 2002, 284] in einer Erinnerung gefällt hat: *“This author [Mayer] went to the extreme of abstraction”*. Auch bei [Eilenberg und Mac Lane 1942a] geht es um *star finite complexes* in einem Sinn verwandt zu dem Tuckers; überhaupt sind ja die Berührungspunkte zu Lefschetz hier sehr groß.

In [Eilenberg und Mac Lane 1945] hingegen werden Mayersche Ketten- und Kokettenkomplexe (im heutigen Sinn, d.h. ohne das Basisaxiom) verwendet; hierbei tun Eilenberg-Mac Lane so, als sei gerade die Auszeichnung einer Basis der Unterschied zwischen Mayer und Tucker[303]. Auf S.284 sagen sie zu ihrer Entscheidung folgendes:

> Our preference for complexes à la Mayer is due to the fact that they seem to be best adapted for the exposition of the homology theory in terms of functors.

Dies kann man so lesen, als sei der Mayersche Komplexbegriff hier gewissermaßen aus expositorischen Gründen gewählt worden, um eine Darstellung der Theorie in funktorieller Sprache zu ermöglichen; tatsächlich ist es so, daß der in [1942a] verwendete

---

[302] Auch bei Simplizialkomplexen unterscheidet man Simplizialkomplexe, realisiert als Teilräume des $\mathbb{R}^n$ (Stichwort baryzentrische Koordinaten; *euclidean complexes*, [Eilenberg und Steenrod 1952, 72]), von abstrakten Simplizialkomplexen [Eilenberg und Steenrod 1952, 59], [Hilton und Wylie 1960, 41]. Entsprechend denken [Eilenberg und Steenrod 1952, 181] an abstrakte Simplizialkomplexe, wenn sie angeben, daß das *development of simplicial complexes* auf [Alexander 1926] zurückgeht — wogegen [Seifert und Threlfall 1934, iii] wahrscheinlich an euklidische Komplexe denken, wenn sie angeben, der Begriff des Simplizialkomplexes stamme von Brouwer.

[303] Auch bei [Kelley und Pitcher 1947, 685] wird als *Mayer chain complex* der Begriff ohne die Voraussetzung, daß die Gruppen frei sind, bezeichnet.

Komplexbegriff hinderlich war für ein Hervorkehren des funktoriellen Standpunktes (wegen seiner Basisabhängigkeit).

Der heutige Begriff des Kettenkomplexes spielt auch für das gesamte Vorhaben von [Eilenberg und Steenrod 1952] eine hervorragende Rolle; dies scheint erst der richtige begriffliche Rahmen zu sein, um den abstrakten Bildungsprozeß von Homologietheorien in überschaubare konzeptuelle Schritte zerlegen zu können. Dies gilt um so mehr für die homologische Algebra von Cartan und Eilenberg; vgl. 3.1.4.

5.1.3 Limites, Produkte und Summen

Man kann verschiedene Stadien der Begriffsbildung mit ihren je eigenen historischen Problemen festhalten.

- Besonders früh wurden direkte und inverse Limites von *abstrakten* Gruppen (d.h. keine Thematisierung einer Topologie auf der Gruppe) in Betracht gezogen.
  - Intendierte Anwendungen liegen im Bereich der Galoistheorie (Herbrand; 2.2.4) und der Bettigruppen (Pontrjagin; 2.2.2.2).
  - Pontrjagin ist zunächst der Auffassung, eine inverse Limesgruppe ließe sich nicht einführen (2.2.2.2).
- Bei *topologischen* Gruppen betrachtete man inverse Limites.
  - Ursprünglich intendierte Anwendungen: Strukturtheorie kompakter Gruppen [Weil 1940], [Pontrjagin 1934b].
  - Es wird hervorgehoben, daß eine analoge Konstruktion eines direkten Limes von topologischen Gruppen nicht sinnvoll ist, da sich die Topologie nicht in "erwünschter" Weise überträgt: es ergibt sich beispielsweise in keinem Fall eine T_2-Topologie (2.5.3).
- Pontrjagins Definition des direkten Limes einer Folge abstrakter Gruppen wird klarer gefaßt (im Blick auf die Čech-Theorie; Stichwort gerichtete Indexmengen). Es stellt sich heraus, daß es keine "analoge" Konstruktion für den inversen Limes gibt (2.2.3.1).
- Eilenberg-Mac Lane stellen fest, daß direkte und inverse Limites von Gruppen (zu gerichteten Indexmengen) als Funktoren aufgefaßt werden können, und deuten die Möglichkeit der Übertragung auf allgemeine Kategorien an (2.4.4).
- Cartan weist nach, daß er es bei einer Konstruktion mit einem Limes zu tun hat, indem er die universelle Abbildungseigenschaft der Konstruktion nachrechnet. (3.2.2.2).

- Kan führt den abstrakten Begriff des Limes zu einer beliebigen Indexkategorie ein (2.6.2.3); die universelle Abbildungseigenschaft wird zur definierenden Eigenschaft. Damit steht die Frage der Existenzkriterien für solche Limites (in Abhängigkeit von Index- und Objektkategorie) im Raum.

Zunächst unabhängig von den Limesbegriffen wurden die Begriffe direktes Produkt und direkte Summe diagrammatisch charakterisiert; diese Konstruktionen waren ja im Zuge der modernen Algebra für verschiedene Strukturtypen eingeführt worden. Hier sind verschiedene Stadien zu unterscheiden:

- [Eilenberg und Steenrod 1952, 132] definieren solche Konstruktionen für spezielle Kategorien über Elemente (sie legen Wert darauf, hervorzuheben, daß das konstruierte Objekt ebenfalls zur Kategorie gehört); die diagrammatischen Charakteristika werden nicht aufgezeigt.

- [Mac Lane 1950, 489f] schlägt vor, die diagrammatischen Charakteristika als Definition zu übernehmen (hierauf verweist [Mac Lane 1961, 26]); ein Produkt ist ein Objekt, für das ein bestimmtes Diagramm immer kommutativ ist. Dies geschieht weniger mit dem Ziel der Übertragung auf beliebige Kategorien als vielmehr, um aufweisen zu können, daß zwei Konstruktionen zueinander dual sind (denn erst durch die diagrammatische Sichtweise wird ihre Dualität offenbar)[304].

- Buchsbaum gibt den Begriff der *direct sum representation* an (3.3.4.1). Dies ist begrifflich ein Fortschritt gegenüber den Begriffen *direct sum representation, direct product representation* bei [Cartan und Eilenberg 1956, 4] (vgl. auch [Eilenberg und Steenrod 1952, 133]). Dort geht es "nur" darum, (z.B. im Falle des Produkts) zu einem gegebenen Objekt G Homomorphismen auf die einzelnen A_α zu haben, die zusammengesetzt einen Isomorphismus zwischen A und (dem in herkömmlicher, mengentheoretischer Weise definierten) $\prod A_\alpha$ ergeben; ich spreche kurz vom "herkömmlichen Begriff" (der Darstellung als direkte Summe bzw. direktes Produkt). Bei Buchsbaum hat ein gegebenes Objekt A dann eine solche Darstellung, wenn es A_α und zugehörige Pfeile mit bestimmten Eigenschaften gibt; diese Eigenschaften sind formuliert ohne Bezug auf eine in herkömmlicher Weise definierte Summe — vielmehr hatten auch die Homomorphismen beim herkömmlichen Begriff gerade diese Eigenschaften. Buchsbaum verzichtet, entsprechend der Situation in einer allgemeinen exakten Kategorie, auf die Verwendung von Elementen[305]. Buchsbaums Definitionsgleichungen nehmen nur auf die Pfeile Bezug, allerdings unter Verwendung der additiven Struktur (die ja in einer exakten Kategorie zur Verfügung steht); Buchsbaums

[304][Mac Lane 1988a, 343] behauptet (m.E. mit Recht), daß die Charakterisierung des kartesischen Produkts, die die KT gibt, weniger artifiziell ist als die der Mengenlehre, wo der Begriff geordnetes Paar durch die Definition $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ eigentlich etwas verschleiert wird. Dieses Verschleiern mag sogar erklären, wieso Bourbaki es vorzog, geordnetes Paar als zusätzlichen primitiven Begriff der Mengenlehre einzuführen.

[305]Zu dieser Frage vgl. 3.3.4.4.

Definition steht (in abgewandelter Form für zwei Objekte) auch bei [Mac Lane 1961, 26]. Einen entsprechenden Begriff für das Produkt gibt Buchsbaum nicht an, wohl da seine Definition ohnehin nur für endliche Summen geeignet ist, und im Endlichen fallen die herkömmlichen Begriffe ja zusammen. Das Fehlen eines Begriffs der unendlichen Summe (und des unendlichen Produkts) ist natürlich im Blick auf Grothendiecks Arbeit ein Schwachpunkt von Buchsbaums Ansatz.

- Grothendieck gibt in Tohoku eine Definition mit Hilfe des Produkts (im mengentheoretischen Sinn) der Hom-Mengen; er gibt die universelle Eigenschaft an. Seine Stoßrichtung sind infinitäre Konstruktionen; vgl. 3.3.4.1. Eine Existenzgarantie in allgemeinen abelschen Kategorien wird nicht gegeben; allerdings wird festgehalten, daß sich die Existenz beliebiger Produkte und Summen von einer gegebenen abelschen Kategorie auf bestimmte auf dieser Kategorie konstruierbare abelsche Kategorien überträgt. Das betreffende Konstruktionsverfahren führt zu einer Annäherung an Kans Limesdefinition, die aber unvollständig bleibt; vgl. 3.3.4.2.

- Kan verschmilzt die bisherigen Begriffe Limes einerseits, Produkt und Summe andererseits (vgl. 2.6.2.3): Ein Produkt ist der Limes eines bestimmten Funktors. ◁Limes▷ dient als begriffliches Hilfsmittel zur Weiterentwicklung von ◁Produkt▷; erst als historisches *Ergebnis* ist dann der Produktbegriff als Spezialfall des Limesbegriffs aufzufassen.

  Interessant scheint ein Vergleich von Kans Vorgehen mit einer Bemerkung bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 216]: *"As it stands the notion of inverse limit is derived from that of product*[306]*. Conversely, the product of an infinite number of sets can be represented as an inverse limit of finite products"* (man nimmt die gerichtete Menge der endlichen Teilmengen der Indexmenge). Diese Idee von Eilenberg-Steenrod ist offensichtlich viel "klassischer" als die Kans, denn etwas Unendliches als Grenzwert von etwas Endlichem zu betrachten ist ja die genuine Aufgabe jeden klassischen Limesbegriffs. Der Gedanke kommt schon bei [Weil 1940] vor — und erschließt dort die wesentliche Anwendung, die Weil vom Begriff des projektiven Limes macht: in der Untersuchung der Struktur einer kompakten Gruppe; S.88ff.

5.1.4 Koeffizienten von Homologie und Cohomologie

Der Themenkomplex der Koeffizienten hatte bis zu den Arbeiten von Eilenberg und Mac Lane bereits mehrere Transformationen erfahren. Das Ausgangsstadium war die Betrachtung ganzzahliger Koeffizienten in der simplizialen Homologie; deren Bedeutung ist eine echt kombinatorische — die Koeffizienten bzw. Inzidenzzahlen geben die Multiplizitäten der Simplices an. Ketten sind formale Linearkombinationen aus Simplices mit ganzzahligen Koeffizienten. Vgl. [Mac Lane 1978, 11] "before 1927,

[306] Gemeint ist hier, daß der inverse Limes in der Situation von Eilenberg-Steenrod eine Untergruppe des direkten Produkts ist.

topology really was combinatorial: a chain in a complex was a string of simplices, each perhaps affected with a multiplicity (a coefficient), and the algebraic manipulation of chains was something auxiliary to their geometric meaning." An diesem Zugang wurden in der Weiterentwicklung des Begriffssystems mehrere Änderungen vorgenommen:

- Man begann, andere Koeffizienten anstelle von ganzzahligen zu betrachten; beispielsweise nahm [Pontrjagin 1931] endliche zyklische Gruppen als Koeffizientengruppen. [Mac Lane 1976a, 6] berichtet von Koeffizienten mod 2 bei [Veblen 1931], mod p bei Alexander (ohne Quellenangabe). In 2.1.2.2 mache ich Angaben zu weiteren Schritten in diese Richtung.
- Es kamen andere (nicht simpliziale) Berechnungsmethoden von Homologie auf, in denen auch die Koeffizienten eine andere Rolle spielen.
- Bei Cohomologie ist die Rolle des Koeffizientenbereichs A nicht mehr das Liefern von Skalaren, sondern Kokettengruppen C^n haben als Elemente Homomorphismen $C_n \to A$. [Mac Lane 1976a, 6] schreibt daher auch *coefficients* in Anführungszeichen; man spricht oft (und letztlich richtiger) von "Cohomologie mit Werten in A".

Diese Veränderungen lassen sich, wie in Kapitel 2 klar wurde, in einer historischen Darstellung nicht unabhängig voneinander behandeln, da sie ineinander verzahnt stattfanden. Außerdem interagieren sie offensichtlich mit den entsprechenden Transformationen von ◁Komplex▷ (s.o.).

Die Umbewertung von ◁Koeffizient▷ unter dem axiomatischen Zugang von Eilenberg-Steenrod bestand darin, daß die konkreten Berechnungsverfahren bewußt überall da umgangen werden, wo sie nicht unbedingt notwendig sind; die auf den Berechnungsverfahren fußenden Nachweise der vorherigen Theorie werden dadurch zum "Existenzbeweis". Den Koeffizienten kommt eine neue Rolle (gegenüber ihrer angestammten in der kombinatorischen Situation der konkreten Berechnung) zu: die Koeffizientengruppe läßt sich aus den Axiomen zurückgewinnen (2.5.3).

Die weitestreichende Umbewertung von ◁Koeffizient▷ fand unter der Ausweitung der homologischen Methode auf Garben statt. Hier kommt erst vollgültig zum Ausdruck, daß das Manipulieren der Koeffizienten der Thematisierung einer abelschen Variable von homologischen Funktoren gleichkommt (vgl. 3.4.1). Man kann diese Transformation der Variable recht gut sichtbar machen, wenn man die Rede von "Koeffizient" in den verschiedenen historischen Stadien der Garbencohomologie gegeneinanderhält:

- Leray spricht von *module d'homologie relatif à un faisceau.*
- Im SC 50/51 heißt es:

> [...] $H^q_\Phi(\mathcal{X}, F)$ [est] appelé le q-ième module de cohomologie de l'espace $\mathcal{X}$, relativement à la famille Φ et au faisceau de coefficients F (ou encore le module de Φ-cohomologie de dimension q de l'espace $\mathcal{X}$, à coefficients dans F) [...] (16-06)

Dies ist so zu lesen, daß die einzelnen Koeffizienten eben die Elemente des *espace étalé* sind (der mengentheoretisch die disjunkte Vereinigung der einzelnen Moduln F_x ist). Dies unterscheidet Cartans Sicht von der Situation der "lokalen Koeffizienten" im Stil von Steenrod-Leray: dort ging man von den einzelnen Moduln aus, während Cartan später die Garbe als ganzes sah (dazu mehr weiter unten).

- Serre spricht von *cohomologie à valeurs dans F*.

- Später spricht man von "dem Koeffizienten" und meint gewissermaßen einen Parameter, d.h. mit einer anderen Garbe kommt eine andere Cohomologiegruppe heraus; die Garben *sind* die Koeffizienten. "Elemente" der Garbe (aufgefaßt als Menge) spielen für die Berechnung dieser Cohomologie keine Rolle (da das Verfahren der derivierten Funktoren benutzt wird). Der urprüngliche Sinn von "Koeffizient" ist verschwunden.

  Der Grund für diese Umstellung ist vermutlich, daß man in der Untersuchung von Garben Fällen begegnet, in denen F "keine Elemente hat" (vgl. 5.3.1.2; bei einer Garbe auf einem Situs gibt es *a priori* keine unterliegende Menge); spätestens dort ist dann *à coefficients dans F* nur als atomarer Satz zu verstehen.

5.1.5 Garben

Beim Vergleich der verschiedenen Garbendefinitionen sollte man darauf achten, was jeweils als das ursprünglich gegebene behandelt wird. Bei Leray (3.2.1) wirkt es so, als seien die einzelnen Moduln zuerst da und bildeten gewissermaßen zufällig eine Garbe (ähnlich bei Serre, s.u.); bei Cartan (3.2.2.2) wird das Gesamtobjekt Garbe hervorgekehrt, und die Modulstruktur auf den Fasern erscheint als "nachträglich" ("Versehen mit Struktur"). Diese Gegenüberstellung liegt Cartans *Modes de définition de faisceaux* zugrunde. Die Garbendefinition von [Serre 1955] ist inhaltlich die von Cartan-Lazard; hierbei wird stärker ein algebraischer Akzent gesetzt (nicht die Fasern des topologischen Raumes tragen eine algebraische Struktur, sondern die Mengen, die eine algebraische Struktur tragen, werden mit einer Topologie versehen), es bleibt aber im Prinzip dabei, daß eine Garbe ein topologischer Raum "ist".

Grothendieck geht in Tohoku (3.3.3.1) vom Begriff der Prägarbe (Funktor auf der Kategorie $\mathrm{Off}(X)^{\mathrm{op}}$ in eine Kategorie) aus; eine Garbe ist eine spezielle Prägarbe. Im SGA werden an diesem Konzept mehrere Änderungen vorgenommen:

- Die bisherige Ausgangskategorie (offene Mengen eines topologischen Raumes mit Inklusionen) kann durch eine andere Kategorie ersetzt werden (genauer werden noch andere Pfeile in Betracht gezogen). Die Veranlassung für einen solchen Vorgang ergibt sich aus einer Problemstellung der algebraischen Geometrie; 4.1.2.2.

- Giraud (4.1.2.3): Die Garbenbedingungen werden durch eine pfeilsprachliche Bedingung ersetzt (Existenz gewisser *equalizer*).

Grothendiecks Begriff ist der “richtige”, weil er solcher Verallgemeinerungen fähig ist, was für den *espace étalé*-Begriff nicht zutrifft.

An Giraud anknüpfend wird schließlich der Begriff ◁Grothendieck-Topos▷ in den Begriff ◁elementarer Topos▷ überführt: Die Definition des erstgenannten Begriffs ist eine stark synthetische (Kategorie von Garben über einem Situs; man muß erst Situs und Garben definieren); insofern wird sie nicht dem Gefühl gerecht, daß die Toposes eigentlich die interessanten Gegenstände sind (vgl. 4.1.2.3); ein Ebenentausch verlangt nach einer neuen Definition von Topos. Beim elementaren Topos wird die Definition aus elementaren KT-Begriffen synthetisiert.

5.1.6 Gruppoide

Die bisher unter dem Aspekt der Begriffstransformation behandelten Begriffe kamen alle bereits bei der Darstellung der historischen Haupt-Anwendungskontexte der KT zur Sprache; die Gesamtschau ihrer jeweiligen Entwicklung war (bis auf einige Ergänzungen im Detail) eine Zusammenfassung des bereits Gesagten unter anderem Blickwinkel. Hier soll nun mit ◁Gruppoid▷ noch ein von der KT vereinnahmter Begriff besprochen werden, von dem bisher nicht die Rede war — denn er trat erstmals in einem Kontext auf, der nicht zu den historischen Haupt-Anwendungskontexten der KT gehört, nämlich der algebraischen Zahlentheorie.

Im Ergebnis wird klar, daß der Zusammenhang des Gruppoidbegriffs zur KT erst nachträglich festgestellt wurde[307], und zwar nicht im ursprünglichen Anwendungskontext von ◁Gruppoid▷, der algebraischen Zahlentheorie, und auch nicht im ursprünglichen Anwendungskontext von ◁Kategorie▷, der algebraischen Topologie (obwohl dort wenig später eine wichtige Anwendung des Begriffs lag! — dazu unten mehr), sondern in der Differentialgeometrie.

Als Gruppoid bezeichnet man heutzutage[308] eine Kategorie, bei der alle Pfeile Isomorphismen sind. Der Begriff ◁Gruppoid▷ wurde aber historisch nicht als Spezialisierung von ◁Kategorie▷ eingeführt, sondern — lange *vor der Einführung* von ◁Kategorie▷ — als eine Verallgemeinerung von ◁Gruppe▷ durch Brandt. In der bisherigen historischen Literatur über Kategorientheorie wird dies nur ganz am Rande erwähnt[309]. Die vollständigste Darstellung, die mir bekannt ist, ist die folgende:

[307] ◁Gruppoid▷ war also historisch keineswegs das Bindeglied zwischen Gruppentheorie und KT (wie man annehmen könnte). Dies ist zu beachten im Blick auf den Ansatz, die KT historisch als Analogiebildung zur Gruppentheorie zu interpretieren (vgl. dazu 5.2.1).

[308] Interessanterweise bezeichnet in einer anderen Tradition der Begriff “Gruppoid” eine Menge mit einer inneren Verknüpfung, in der ansonsten keine Halbgruppen-, Monoid- oder Gruppeneigenschaften zu gelten brauchen (z.B [Meschkowski 1976, 109] oder [Bouvier und George 1983, 347]; ein Synonym ist Magma). Dies meint Poincaré, wenn er von *loi interne* spricht. Die einzige Eigenschaft, die einem solchen Gruppoid also zukommt, ist ausgerechnet die einzige, die ein Brandtsches Gruppoid gegenüber einer Gruppe *nicht* zu haben braucht, nämlich die Universalität der Verknüpfbarkeit.

[309] [Mac Lane 1996a, 129] und [Mac Lane 1988a, 335] verweisen auf [Brandt 1925]; [Corry 1996]

> Brandt [...] discovered [groupoids] in his study of composition of quadratic forms and used them again in [[Brandt 1928]] to describe multiplication of ideals in orders over Dedekind domains. At about the same time [[Loewy 1925]] introduced similar "compound groups" to describe isomorphisms between conjugate field extensions. His ideas were developed by [[Baer 1928]]. Apart from a small number of passing references, the two concepts seem to have been quickly forgotten, probably because of a general distaste for partial operations [Higgins 1971, 171].

Higgins erwähnt hier nicht die folgenden Stellen aus der Frühgeschichte des Begriffs: Veblen und Whitehead wollten axiomatisch charakterisieren, was eine Mannigfaltigkeit im Sinne der Differentialgeometrie ist; in diesem Zusammenhang machen sie folgende Definition:

> A pseudo-group is any set of transformations which satisfy the conditions:
>
> (1). *If the resultant of any two exists, it is in the set.*
>
> (2). *The inverse of each transformation in the set is also in the set.*
>
> [Veblen und Whitehead 1931, 552]

In Bourbakis *Algèbre Chapitre I* kommt eine Übung zum Thema Gruppoid vor[310]; allerdings steht dort zwar eine Definition von Gruppoid (und die Bezeichnung), aber Brandt wird weder im Zusammenhang der Übung noch in der *note historique* erwähnt. Ein Verweis auf diese Übung steht auch in *n°103* (dazu unten mehr).

5.1.6.1 Brandt

Brandt kam auf den Gruppoidbegriff in der Theorie quaternärer quadratischer Formen, deren Komposition zu einer Gruppoidstruktur führt, nicht aber zu einer Gruppenstruktur (da nicht zwei beliebige Formen komponierbar sind); vgl. [1926]. Brandt beschäftigte sich schon eine ganze Weile mit der Komposition solcher Formen; den allgemeinen Gruppoidbegriff stellt er gewissermaßen als Nebenprodukt dieser Untersuchungen vor. Laut JFM 50 S.99 war *"bereits die Dissertation des Verf. (Journal für Math.* **143** *(1913)) [...] dem gleichen Thema [also der Komposition solcher Formen] gewidmet"*; die a.a.O. besprochene Arbeit scheint gegenüber den Versuchen der Dissertation, einen solchen Kompositionsbegriff anzugeben, eine Verbesserung darzustellen. [Brandt 1928] wendet dann den Begriff an, um über die Multiplikation von Idealen zu sprechen (vgl. Higgins oben); dies wurde von Deuring aufgegriffen [1935].

Hauptfrage: wann und in welchem Kontext wurde der Brandtsche Gruppoidbegriff mit ⊲Kategorie⊳ erstmals in Verbindung gebracht? Eine solche Verbindung stellt [Mac Lane 1965, 41] her: *"A category in which every morphism is invertible is a (Brandt) groupoid"*; doch diese Verbindung ist beileibe nicht die erste, wie wir sehen werden. Jedenfalls wird die Verbindung noch nicht in [Eilenberg und Mac Lane

---

erwähnt Brandt nicht.

[310] §6 *exercice* 22 in der *deuxième édition* (1951) bzw. §4 *exercice* 23 in der *nouvelle édition* (1970); die erste Auflage hatte ich bisher nicht zur Verfügung.

1945] hergestellt; der Hauptgrund war wohl der Umstand, daß die KT zunächst nicht mit der algebraischen Zahlentheorie in Berührung stand (trotz Mac Lanes Arbeiten zu Gruppenerweiterungen; vgl. hierzu 2.3.1.2).

5.1.6.2 Ehresmann

Andrée Ehresmann berichtete mir, daß Charles Ehresmann sich Anfang der 50er Jahre für den Begriff einer *pseudogroupe de transformations* interessierte (zweifellos im Sinne Veblens und Whiteheads, denen es um Axiome für Differentialgeometrie ging); als er auf die Bourbaki-Übung stieß, stellte er fest, daß dieser Begriff mit dem des Gruppoids zusammenhängt. Als er 1952 in Rio de Janiero eine Vorlesung hielt, wies ihn ein Zuhörer auf den Zusammenhang zur KT hin. Dies gab den Ausschlag für Ehresmanns Beschäftigung mit KT, niedergelegt erstmals in [1957][311].

Zu dieser *oral history* sind einige hypothetische Überlegungen angebracht. Da die Bourbaki-Übung in der *Algèbre* erscheint, ist anzunehmen, daß dies im Blick auf die Rolle der Struktur "Gruppoid" in der Theorie quadratischer Formen bzw. Divisionsalgebren geschah; dafür spricht insbesondere, daß die Übung den *Namen* Gruppoid verwendet. Bekanntlich war für die Gründungsmitglieder der Bourbaki-Gruppe die moderne Algebra Emmy Noethers eine wichtige Inspirationsquelle, und so kannten sie vermutlich auch die Arbeiten von Brandt oder Deuring, von denen vor allem der letztere als wichtiger Vertreter dieser Bewegung gesehen werden kann. Die Übung scheint nicht erst auf eine Initiative von Ehresmann (im Blick auf eine etwaige Beschäftigung Bourbakis mit Differentialgeometrie) hereingekommen zu sein[312]. Was den Hinweis des Zuhörers an Ehresmann betrifft, so kann dies sehr gut ein Hinweis in zwei Richtungen gewesen sein in folgendem Sinne: der Zuhörer mag bemerkt haben, daß die Struktur, die Ehresmann da entwickelte (und im Anschluß an die Bourbaki-Übung als Gruppoid bezeichnete), sich als Kategorie auffassen läßt; es mag ihm hierbei geholfen haben, daß Ehresmann in differentialgeometrischem Zusammenhang darauf zu sprechen kam, es also um *pseudogroupes de transformations* ging (so daß also die Grundbausteine denen der Standardbeispiele der Kategorientheorie viel näher stehen als diejenigen in Brandts Situation). Es ist durchaus möglich, daß dann Ehresmann tatsächlich der erste war, der über Gruppoide als Kategorien publizierte.

[Ehresmann 1957, 50] gibt die Definition eines Gruppoids im KT-Sinn[313]; dort wird auch der Unterschied zwischen Gruppoid und transitivem Gruppoid (im Sinne von Brandt) geklärt. Auch [Ehresmann 1965, 323] legt Wert darauf, daß Brandt den Begriff des "transitiven Gruppoids" eingeführt hat; für die eigentliche Gruppoiddefinition verweist Ehresmann hier auf die Bourbaki-Übung.

---

[311] Auf S.49 dieser Arbeit erwähnt Ehresmann, daß er in Rio über lokale Strukturen gesprochen habe; für weitere Informationen hierzu vgl. 7.4.2.

[312] Ich habe keine Quellenbelege für diese Hypothesen, da ich mich ausschließlich mit den Bourbakimaterialien, die einem späteren Zeitraum entstammen, beschäftigt habe. Es kann sehr wohl sein, daß die Quellen Aufschluß erlauben.

[313] Als Referenz für die KT nennt er [Eilenberg und Mac Lane 1945].

5.1.6.3 Homotopie

Das "Fundamentalgruppoid" in der Theorie der Fundamentalgruppen bei Wechsel des Basispunkts ist ein weiteres[314] natürliches Beispiel für ein Gruppoid; vgl. z.B. [Spanier 1966, 45ff] und Anm.315. [Mac Lane 1996a, 130] *"the notion of a groupoid [. . .] appeared, probably independently [of Brandt], in the study of the fundamental groups of spaces"*. Mac Lane nennt keine Quellen. Es ist zwar möglich, daß der Sachverhalt der partiellen Verknüpfung in der Homotopietheorie zunächst unabhängig von Brandt hervorgehoben wurde, aber es scheint doch sehr unglaubhaft, für den *Namen* "Gruppoid" zu vermuten, er sei in diesem Zusammenhang rein zufällig in inhaltlicher Übereinstimmung mit Brandt verwendet worden. Zumindest müßte es also einen historischen Ort geben, wo erstmals ein Homotopietheoretiker das Fundamentalgruppoid so *nennt* — und zwar in Bezug auf Brandt oder dessen Nachfolger (ich vermute: im Bezug auf Bourbaki, s.u.).

Die erstmalige *Benennung* des Fundamentalgruppoids geschieht definitiv *nicht* erst nach Einbeziehung des Gruppoidbegriffs in die KT (die ja auf Ehresmann zurückgeht, s.o.), denn schon im Séminaire Cartan 1948/49 10-01 ist die Rede vom *groupoïde fondamental*. Dort geht es um lokale Koeffizienten, was letztlich zu [Steenrod 1943] zurückführt; in jener Arbeit ist allerdings vom Fundamentalgruppoid nicht die Rede[315]. Eine andere frühe Erwähnung des Fundamentalgruppoids findet sich im Bourbaki-Manuskript *n°103* auf S.2. Dieser Text ist überschrieben *"Rapport SEAW sur la topologie préhomologique"*; es liegt nahe, hinter "SEAW" Samuel Eilenberg und André Weil zu vermuten. Darauf deutet eine entsprechende Bemerkung in Cartans Eilenberg-Nachruf hin; ein weiteres Indiz ergibt sich aus einem Brief von Nicolas Bourbaki an Eilenberg vom 21.06.1948, aufbewahrt in Eilenbergs Nachlaß, aus dem hervorgeht, daß Eilenberg gemeinsam mit Weil einen *"rapport concernant les propriétés élémentaires de l'homotopie et des espaces filtrés"* schreiben möge. Eine weniger scharfe *post quem*-Datierung von *n°103* ergibt sich auf S.6 des Textes selbst, wo ein Verweis auf Arbeiten von Fox steht[316]. Insgesamt ist es keineswegs ausgeschlos-

[314]Dieses Beispiel scheint allerdings den schon erwähnten Vertretern des Begriffs in der Differentialgeometrie inhaltlich sehr nahe zu stehen: *"the transport of geometrical structures from one tangent bundle to another along paths inevitably involves the groupoid of the homotopy classes of these paths"* [Mac Lane 1989, 3]. Mac Lane erwähnt übrigens nicht Veblen-Whitehead.

[315]Steenrod stellt lediglich Zusammenhänge her zwischen seinen lokalen Koeffizientengruppen und der Fundamental*gruppe*. Allerdings: Die Daten seiner *systems of local groups* sind ja eine Gruppe G_x zu jedem Punkt x des Raums und ein Isomorphismus zwischen den Gruppen $G_x \to G_y$ *für jede Klasse von Wegen* von x nach y (S.611). *Implizit* ist hier also das Fundamentalgruppoid präsent (eben die Kategorie, deren Objekte die Punkte des Raums und deren Pfeile die Wege sind); vgl. auch [Spanier 1966, 58]. Doch weder Steenrod noch Eilenberg in seinem *Review* verwenden die Vokabel "Fundamentalgruppoid"; ferner weist Eilenberg auch nicht darauf hin, daß ein *systems of local groups* letztlich ein Funktor von jener Kategorie in die Kategorie der Gruppen ist, obgleich er und Mac Lane diese Terminologie zu jenem Zeitpunkt bereits entwickelt und zumindest teilweise auch schon veröffentlicht hatten.

[316]Bull. AMS 49 S.555, 733. In diesen Texten geht es um *fibre spaces* im Anschluß an [Hurewicz und Steenrod 1941]. Der Terminus Gruppoid oder ein Verweis auf Brandt kommen nicht vor; augenscheinlich auch keine entsprechende Situation. Es scheint noch nicht einmal um Fundamentalgruppen zu gehen (das allgegenwärtige $\pi(X)$ bezeichnet die Faserung und nicht die Fundamental-

sen, daß die Bezeichnung “Fundamentalgruppoid” von André Weil stammt (der die Bezeichnung Gruppoid aus der Bourbaki-Übung kannte) und auf diesem Weg ins *Séminaire Cartan* kam. Dem Inhalte nach wird der Begriff aber wohl schon vor dem *“Rapport SEAW sur la topologie préhomologique”* benutzt worden sein, da solche *rapports* ja zumeist als Bestandsaufnahmen des bereits in einem Feld Geleisteten und nicht als neue Beiträge zu einem Feld gedacht waren (wie schon die Bezeichnung *“rapport”* nahelegt; vgl. 6.1).

[Eilenberg und Steenrod 1952, 49] sehen eine mögliche Rolle des Fundamentalgruppoids in einer Axiomatisierung von Homotopietheorien:

> In axiomatizing the homotopy groups one would need an additional basic concept, namely: the isomorphisms $\pi_q(X, A, x_0) \approx \pi_q(X, A, x_1)$ assigned to a homotopy class of paths in A from x_0 to x_1. One would deal not with single groups but with systems of groups connected by isomorphisms assigned to the fundamental groupoid of A.

Steht diese “Vorhersage” bereits im Originaltext, so ergänzen sie in einer späteren Auflage einen Hinweis auf eine mittlerweile erfolgte Axiomatisierung; vgl. 2.5.

Etwas später wird der Begriff des Gruppoids über das Fundamentalgruppoid hinaus bedeutsam für die algebraische Topologie, insbesondere in der Arbeit von Brown.

> The algebra of groupoids has been developed recently by P.J. Higgins. In 1965, I discovered the utility of this algebra for computing the fundamental group, and this has led me to include in the last four chapters of this book an account of the elements of the algebra of categories and groupoids. The treatment given in these chapters is quite novel, in that this algebra is used in an essential way and not just as a convenient, but not entirely necessary, general language [...] The most important feature here is probably the way in which the computations of the fundamental group derive form a general property of the fundamental groupoid (that it sends ‘nice’ pushouts to pushouts). This contrasts with the usual rather *ad hoc* computation via simplicial complexes [Brown 1968, vi].

Brown bringt zu jedem Kapitel historische *notes*; bei Kapitel 6, in dem Kategorientheorie, Fundamentalgruppe und Fundamentalgruppoid besprochen werden, fehlen aber Angaben zum Fundamentalgruppoid (vgl. S.215f). Aus der Literaturliste von Brown gehen Verweise auf Crowell und Fox (*Knot theory*, 1963) sowie Higgins (*Proc. Cambr.* 60, 1964) hervor. Bei Crowell und Fox tritt der Begriff auf S.17 und S.155 auf, es gibt aber leider keine weiterführende Angabe; bei Higgins findet sich ein Verweis auf [Ehresmann 1957]. Dies scheint mir nahezulegen, daß Ehresmanns vertiefte Auseinandersetzung aus kategorientheoretischer Sicht mit dem allgemeinen Gruppoidbegriff es Higgins erlaubt hat, seine Untersuchungen vorzunehmen, und nicht die bis zu Brown eher sporadische Beschäftigung mit dem Begriff auf dem Feld der algebraischen Topologie.

gruppe), allerdings sehr wohl um Homotopie.

5.2 Die Theoriewerdung der KT

Nachdem nun die Zunahme des Einflusses der KT auf die konzeptuellen Rahmenbedingungen einiger mathematischer Untersuchungsfelder historisch dokumentiert ist, kann man sich umgekehrt fragen, welchen Erweiterungen die KT selbst im Laufe dieser Entwicklungen unterzogen wurde.

Das, was heute als "Kategorientheorie" bezeichnet wird, wurde erst nach und nach zusammengestellt; insbesondere hat man es erst nach und nach überhaupt mit einer *Theorie* zu tun (die über eine Theorie der natürlichen Äquivalenzen i.S. Eilenberg-Mac Lanes hinausgeht). Z.B. war die Einführung des Begriffes adjungierter Funktor wichtig für die "Theoriewerdung": nun gab es nichttriviale Fragen innerhalb der Theorie zu beantworten (nämlich: "Unter welchen Bedingungen existiert zu einem gegebenen Funktor ein Adjungierter?" u.ä.). Eine ähnliche Auswirkung hatte die diagrammatische Charakterisierung bestimmter Konstruktionen, da durch diese Charakterisierung eine Verallgemeinerung der Konstruktionen auf allgemeine Kategorien möglich wurde; es stellte sich nun die Frage der *Existenz* der Konstruktionen in vorgelegten Kategorien. Die KT gelangte also zu ihren eigenen *Problemstellungen* (die sie erst von einer Sprache, einem Beschreibungsmittel für Vorfindliches, zu einer Theorie gemacht haben), z.B. der Klassifizierung, der Angabe von Existenzkriterien für Objekte mit bestimmten Eigenschaften etc.

Entsprechend kam erst nach und nach die *Bezeichnung* "Kategorientheorie" für die wachsende Ansammlung von Begriffen, Methoden und Resultaten rund um Kategorien und Funktoren in Gebrauch. Eilenberg-Mac Lane sprachen noch von *general theory of natural equivalences*; sie hatten das Ziel im Blick, zu explizieren, was eine "natürliche Äquivalenz" ist, und *deshalb* dachten sie auch, ihre Arbeit sei *the only necessary research paper* ⟨#16 S.71⟩. Eilenberg und Steenrod wählen den simplen Sammelbegriff *the concepts of category, functor, and related notions* (vgl. 2.5.3). Grothendieck sprach von *langage fonctoriel* [1957, 119], Mac Lane lange Zeit von *categorial algebra*. Es ist schwer zu sagen, wer erstmals von *category theory* gesprochen hat, und zu welchem Zeitpunkt dies war!

In den folgenden Abschnitten sollen einige Aspekte dieser "Theoriewerdung" besprochen werden: zum einen soll untersucht werden, welche methodologische Rolle bei der Zusammenstellung der Theorie die Analogiebildung zu vorfindlichen, ausgeprägten Theorien gespielt haben mag — zum andern soll die Geschichte einiger der Theorie eigentümlichen Begriffe besprochen werden; neben dem schon erwähnten Begriff des adjungierten Funktors habe ich, z.T. im Blick auf den bisher zusammengestellten Befund, z.T. im Blick auf die Argumentation der folgenden Kapitel, Hom-Funktoren, Funktorkategorien und **Cat**, die "Kategorie aller Kategorien", herausgegriffen.

5.2.1 Elemente der Analogiebildung zu anderen Theorien

Im Prinzip wäre es angebracht, allgemein zu untersuchen, woher die KT ihre Methodik bezieht (und wo diese originär ist — so hat sie z.B. eine spezifische Beweismethode, den diagrammatischen Beweis, hervorgebracht); doch diese gewiß lohnende Aufgabenstellung würde hier zu weit führen. Jedenfalls liegt es nahe, zu untersuchen, ob nicht die KT methodisch in Analogiebildung zur Gruppentheorie entstanden ist — zumal ◁Kategorie▷ begrifflich als Verallgemeinerung von ◁Gruppe▷ aufgefaßt werden kann[317]. Ich verwende einen solchen Vergleich nicht als methodische Direktive (wo er dann systematisch durchgeführt und insbesondere auf die Gesamtheit der für ihn einschlägigen Quellen bezogen werden müßte), sondern notiere nur einige Beobachtungen dazu, die sich aus den bisher studierten Quellen ergeben.

Vorweg: die Kategorientheorie wird im Prinzip zur Algebra gerechnet; die Methodik der Anwendungen der KT läuft häufig auf die Frage hinaus: was ist an dem vorgegebenen Problem eigentlich algebraisch? Man kann dies bereits an Hopfs Suche nach der "Algebra der Abbildungen" (2.1.2.1) festmachen oder an Mayers Komplexbegriff (5.1.2); sehr deutlich tritt es naheliegenderweise bei Cartan-Eilenberg in den Vordergrund ⟨#33 S.101⟩ und später bei den Anwendungen des Fundamentalgruppoids (vgl. 5.1.6.3).

Es lassen sich konkrete Elemente einer Übertragung von Methoden der Gruppentheorie in die KT aufzeigen. Eilenberg-Mac Lane verwenden in einer bestimmten Situation (vgl. 5.3.3.3) Konstruktionen, die in Analogie zu den *"left and right regular representations"* der Gruppentheorie entworfen sind. Hier wird also ◁Kategorie▷ als Verallgemeinerung von ◁Gruppe▷ in eine z.T. parallele Theorie entwickelt. Der Begriff des Erzeugers (Grothendieck) hat ebenso ein gruppentheoretisches Vorbild wie Segals Begriff des klassifizierenden Raumes einer Kategorie, der zumindest teilweise einer Analogie zum entsprechenden Begriff für Gruppen entspringt (vgl. 5.3.2.1). Charles Ehresmann hat in [1965] sehr konkret Gruppentheorie "kopiert"; im *Review* heißt es: *"Since a category operated on by a category is a generalization of a group operated on by a group, this permits a definition of crossed homomorphism and of first cohomology group"*.

Eine solche "Theoriekopie"[318] seitens der KT läßt sich noch im Zusammenhang mit anderen Theorien nachweisen. Wenn etwa die Rede von der Einfachheit oder Halbeinfachheit einer Kategorie ist (4.2.4), wird offenbar die Algebrentheorie kopiert, nämlich typische Verfahren gerade so weit, wie sie sich sinnvoll in die KT übertragen lassen (man kopiert den "KT-Anteil" dieser Theorie). Zugleich haben Begriffe wie ◁Tannakakategorie▷ oder ◁catégorie galoisienne▷ [Deligne 1998, 15] die Aufgabe, bestimmte konkrete Kategorien (von reellen Vektorräumen etc.) kategorientheoretisch zu charakterisieren (mit eventuell mehreren Modellen). Beides zusammen ist aber das Ziel: die KT-Charakterisierung von vorfindlichen Objektklassen, und das "Arbeiten wie gewohnt" auf solchermaßen erhaltenen KT-Substituten solcher Objektklassen anhand der Übertragung typischer Methoden in die KT. Grothen-

[317]Insofern wären neben der Analogie zur Gruppentheorie noch Überschneidungen zur Graphentheorie denkbar; hierbei ist aber zum einen die Gruppentheorie historisch viel besser aufgearbeitet als die Graphentheorie und scheint zum andern die Graphentheorie in ihrer Ausprägung als Theorie ein sehr junger Zweig der Mathematik zu sein, der den Kategorientheoretikern wohl bei ihrem Arbeiten noch nicht in großem Maße hat vor Augen stehen können.

[318][Dress 1974, 175] spricht von "methodischer Abstraktion".

dieck hat Theoriekopien gerne eingesetzt, um unvertraute Situationen vertrauter zu machen; er sprach oft von *dictionnaire*. Ein weiteres, etwas anderes geartetes Beispiel sind die *catégories fibrées*, auf die ich kurz in 5.2.3.3 eingehen werde; hier war der Ausgangspunkt der Begriff einer Faserung aus der Topologie.

5.2.2 Der Weg zum Begriff des adjungierten Funktors

Wie in 2.6.2.2 dargestellt, hat Kan den Begriff 1958 erstmals definiert. Dies gilt manchen Kommentatoren als ein erstaunlich später Zeitpunkt für die Entdeckung dieses nachgerade so wichtigen Begriffs. Im folgenden Abschnitt werde ich dieses "Rechtzeitigkeitsurteil" methodologisch diskutieren; anschließend versuche ich zu zeigen, daß im Falle der bereits vor Kans Arbeiten untersuchten Instanzen von Adjunktionen die Explikation des allgemeinen Begriffs nicht weitergeführt hätte ("unwiderständig").

5.2.2.1 Verspätung?

Die These von der Verspätung wird von Mac Lane evoziert: *"in retrospect [. . .] it is strange indeed that it took 15 years from the introduction of categories [. . .] to the introduction of adjoint functors"* [1978, 21]. Allerdings ist die Auffassung, hier liege eine Verspätung vor, keineswegs zwingend; beispielsweise pflichtet ihr Bénabou nach mündlicher Auskunft mir gegenüber nicht bei; er glaubt im Gegenteil, der Begriff sei erstaunlich *früh* aufgetreten. Vermutlich kommt er zu diesem Urteil deshalb, weil der Kontext, in dem der Begriff sich als besonders sinnvoll verwendbar gezeigt hat ("interne" Theorie), eben noch längst nicht vorlag — während diejenigen, die das umgekehrte Urteil fällen, gerade die Bedeutung des Begriffs für die Entwicklung dieses Kontexts als eine ausreichende (und frühzeitig vorhandene) Veranlassung zur Einführung des Begriffes einschätzen (dazu unten mehr). Wenn die Auffassung einer Verspätung also gar nicht zwingend ist, muß man nach dem Zweck fragen, den diejenigen, die sie äußern, verfolgen. Beispielsweise greift Corry die Fragestellung folgendermaßen auf:

> [. . .] Mac Lane has claimed that several particular cases of adjoint functors were known well before Kan's definition of the general concept in categorical terms. [. . .] However, many years elapsed between the particular work on these examples and Kan's general definition, although categories were formulated already in 1945. Can this delay be sensibly explained? [Corry 1996, 371]

(Corry referiert im folgenden die Erklärungen von Mac Lane; das tue ich weiter unten.) Corry interessiert sich naheliegenderweise[319] vornehmlich für den Punkt an Mac Lanes Argumentation, wonach Bourbaki aufgrund einer unglücklichen Definition des Begriffs ◁universelles Problem▷ am Begriff ◁adjungierter Funktor▷ vorbeigegangen sei (vgl. 6.3.2.2). Marquis sieht, wie er mir mitgeteilt hat, in Mac Lanes wiederholtem Unterstreichen, wie erstaunlich die Verspätung sei, letztlich auch das

[319] da er ja die Superiorität der KT über Bourbakis *structures* zum Ausgangspunkt nimmt.

Bedauern Mac Lanes darüber enthalten, daß Eilenberg-Mac Lane den Begriff in den ersten Arbeiten übersehen haben.

Die Auffassung, hier liege eine Verspätung vor, läßt sich in den Termini der "verschiedenen Formen der Begriffsbildung" (1.4.2) so akzentuieren, daß über einen gewissen Zeitraum der denkbare vertikale Schritt von den *particular cases* zum *general concept* nicht unternommen wurde, obwohl die sprachlichen Mittel dafür zur Verfügung standen, obwohl das *general concept* nachgerade als Schlüsselbegriff zum (horizontalen) Aufbau der KT erkannt wurde und obwohl Beispiele von Adjunktionen untersucht und benutzt wurden. Es sind diese "Obwohl-Sätze", durch die das Faktum erstaunlich, erklärungsbedürftig wird. Man sollte sie also wohl im einzelnen diskutieren.

Das Vorhandensein der sprachlichen Mittel ist sicher kein sehr schlagkräftiges Argument. Der Umstand, daß ◁adjungierter Funktor▷ sich als Schlüsselbegriff im Aufbau der KT erwiesen hat, scheint ausschlaggebend dafür, wie das Urteil zustande kommt; das Szenario, das die Anhänger der Verspätungsthese aufzeichnen würden, ist wohl etwa das folgende: Die KT ging erst mit dem Auftreten des Begriffs des adjungierten Funktors zu einer weitreichenden immanenten Entwicklung über, während sie in den Jahren davor in einer Art Dornröschenschlaf lag; wenn also der natürliche Begriff, der zu einer Entfaltung der KT führt, der des adjungierten Funktors ist, kann man fragen, wieso er in all diesen Jahren nicht formuliert wurde. Geht man hingegen davon aus, in welchem Anwendungskontext dieser Begriff zuerst formuliert wurde, wird dieses Szenario fraglich. Denn erstens wurde er überhaupt nicht zu dem Zweck eingeführt, in der Entwicklung einer internen KT weiterzukommen, und zweitens ergibt sich keineswegs das Bild, hier sei etwas mit Verspätung erreicht worden: Kans Anwendungen sind ja erst nach den Arbeiten von Eilenberg-Zilber möglich. Bleibt die dritte Beobachtung: es gibt rückblickend auch andere Kontexte, in denen der Begriff bereits vor Kan hätte formuliert worden sein können; wieso geschah dies nicht?

War erst eine Gewöhnung an das Arbeiten mit Funktoren nötig, um den "ihnen gegebenen Inversionsbegriff" aufzufinden? Die Idee des Transports ist in der algebraischen Topologie von Anfang an präsent (vgl. 2.7), nicht aber die des *Hin- und Rücktransports*. Ich kenne keine substantielle (auch implizite) Diskussion von "Adjungierten des Homologiefunktors" oder dergleichen. Schließlich waren es dann aber doch (etwas andere) Situationen aus dem Bereich der algebraischen Topologie, die den tatsächlichen Ausschlag gaben. So gibt [Mac Lane 1989, 3] letztlich die Erklärung, daß die früh bekannten Instanzen nicht widerständig genug sind, während die zwei Schlüsselinstanzen bei Kan (der *loop functor* ist adjungiert zum *suspension functor*, und Milnors geometrische Realisierung einer simplizialen Menge in [1957] ist adjungiert zum Funktor, der einem Raum seinen singulären Komplex zuweist) den Begriff sehr nahelegen. Auf diese Frage der Widerständigkeit gehe ich gleich anschließend ein.

Insgesamt ist also das Verspätungsurteil in sich zutiefst unhistorisch. Der Begriff steht konzeptuell (systematisch) auf niedrigem Level und kam *insofern* historisch "spät". Aber was ist daran verwunderlich: Das ist doch genau der Unterschied zwischen einer systematischen und einer historischen Entwicklung! Als sei es so, daß, sobald die Grundbegriffe der Theorie einmal gegeben sind, man nur noch loszurechnen brauche (in der Folge des Lehrbuchs), um die abgeleiteten Begriffe nach Komplexität geordnet aufzufinden. Es bedarf aber zum *ersten* Auffinden der Begriffe eines "geeigneten" Kontextes! Das ganze Problem ist in dem Wort "geeignet" enthalten.

5.2.2.2 Unwiderständige Beispiele

Mit Widerständigkeit ist das folgende gemeint: Laut [Mac Lane 1976a, 33f] war es wichtig für die Thematisierung von "Natürlichkeit" (vgl. 2.3.4), daß man sich mit Situationen konfrontiert sah, in denen diese Natürlichkeit *nicht* auf der Hand liegt. "Verzögerungen" bei der Einführung später als zentral eingestufter Begriffe liegen manchmal daran, daß vorher vorhandene Beispiele "zu trivial" sind, als daß sie auf ein unterliegendes Konzept hindeuten könnten. [Mac Lane 1989, 3] führt das für adjungierte Funktoren aus (s.o.), [McLarty 1990, 371f] für den Begriff *cartesian closed*[320].

Ein solches "unwiderständiges" Beispiel ist dadurch gegeben, daß freie Konstruktionen adjungiert sind zu den zugehörigen Vergißfunktoren. Freie Konstruktionen und ihre universelle Eigenschaft waren natürlich schon vor Kans Arbeiten von Interesse, auch im Zusammenhang mit der KT: [Eilenberg und Mac Lane 1942a, 763] diskutieren freie Gruppen (vgl. 2.3.4); implizit geht es um die Suche nach Auflösungen (vgl. 123). Die diagrammatische Charakterisierung von $\lhd$freie Gruppe$\rhd$ findet sich wohl erstmals bei [Mac Lane 1950]. Die universelle Abbildungseigenschaft der freien Gruppe wird bei [Eilenberg und Steenrod 1952, 133] erwähnt.

Didaktisch gesehen ist dieses Beispiel von Adjunktion gewissermaßen ein "Standardbeispiel"[321]: z.B. an der universellen Abbildungseigenschaft der Basis eines freien Moduls läßt sich das Konzept des adjungierten Funktors gut klarmachen[322]. Damit

[320] Daß **Set** *cartesian closed* ist, war zu trivial, als daß dies zur Ausarbeitung des Begriffs hätte führen können. Lawvere kam zu dem Begriff bei dem Versuch, **Cat** zu charakterisieren, Eilenberg und Kelly kamen dazu im Anschluß an Kans Arbeiten über simpliziale Mengen. McLarty stellt darauf ab, daß der Impuls für die Begriffe nicht von mengentheoretischen Fragestellungen her kam.

[321] In vielen Darstellungen der KT heißen die Funktoren in der Definition von Adjunktion F und U, für *free* und *underlying*.

[322] Diese "universelle Abbildungseigenschaft" ist die bekannte Eigenschaft, daß die Homomorphismen ausgehend von einem freien Modul M durch die Werte auf der Basis A festliegen, wobei diese Werte beliebig gewählt werden können. Man kann diese Eigenschaft als das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & UM \arrow[d, dashed, "U\psi"] & M \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & UN & N \end{tikzcd}$$

aufschreiben, wobei U der Vergißfunktor von der Kategorie der Moduln nach **Set** ist (darin kommt die beliebige Wählbarkeit der Werte zum Ausdruck) und $\psi : M \dashrightarrow N$ ein eindeutig festliegender Modulhomomorphismus. Bekanntlich läßt sich in dieser Situation ein Funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Moduln}$ einführen, so daß FA frei mit Basis A ist; dieser Funktor heißt dann (links)adjungiert zu U. Es ist zugleich gesagt, daß *dort* dieses Konzept nichts erhellt (sondern eben selbst davon erhellt wird)[323].

Ein weiteres unwiderständiges Beispiel ist gegeben durch das in manchen Kategorien vorhandene Tensorprodukt, das adjungiert zum entsprechenden Hom-Funktor ist. Dieses Beispiel läßt sich weit zurückverfolgen; [Mac Lane 1981, 23f] zitiert [Gibbs und Wilson 1901, 272] *("[the tensor product] of two vectors is the most general product in which scalar multiplication is associative")* und gibt an, daß dies dem Inhalt nach die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts sei. [Eilenberg und Mac Lane 1942a, 788] zeigen den entsprechenden Isomorphismus auf (Lemma 18.2); ein Spezialfall des Lemmas wird benutzt, um eine rechnerisch günstigere Formulierung des uct zu erreichen (Satz 33.1). Hier hätte offensichtlich ein allgemeiner Begriff nichts neues erbracht (da es ja für das uct auf die speziellen Funktoren ankommt). Dieser Typ von Isomorphismus spielt in [Cartan und Eilenberg 1956] eine gewisse Rolle (vgl. S.119, 165, 341, 345f); Cartan und Eilenberg sprechen von *associativity formulæ*. Bei Bourbaki wird im *appendice* der *Algèbre Multilinéaire* von 1948 das *Produit tensoriel des modules* als Beispiel der Lösung eines universellen Problems erwähnt. Es wird also bereits erkannt, daß die Situation beim Tensorprodukt Spezialfall einer allgemeineren Situation ist (die später Adjunktion von Funktoren heißen wird). Bei Kan hat dieses Beispiel didaktische Aufgaben, was auch wieder das Eingeständnis beinhaltet, daß die Situation nicht durch die Rede von Adjunktion erhellt wird, sondern diese Rede von der speziellen Situation.

Von wesentlicher Bedeutung für die Weiterentwicklung des Begriffssystems der KT ist das Beispiel dann allerdings in der Theorie der Tannakakategorien, und zwar als Ausgangspunkt einer naheliegenden Abstraktion: Bei [Saavedra Rivano 1972, 51] wird unter Verweis auf [Eilenberg und Kelly 1966] das Hom-Objekt wie ein adjungierter Funktor zu $\otimes$ konstruiert (vgl. hier 4.2.4).

---

entspricht dann in der Tat (wegen des obigen Diagramms) jedem Pfeil in $\mathrm{Hom}(A, UN)$ ein Pfeil in $\mathrm{Hom}(FA, N)$ und umgekehrt.

[323] Es erscheint mir daher irreführend oder zumindest übertrieben, wenn [Barr und Wells 1985, 50] behaupten, bereits im ersten Kapitel von [Cartan und Eilenberg 1956] stehe implizit, daß FA linksadjungiert zum Vergißfunktor ist. Bei [Cartan und Eilenberg 1956] kommt zwar die Konstruktion FA tatsächlich vor (S.5; sie schreiben F_A und interessieren sich vor allem für den Fall, daß A selbst Modul ist); es wird aber nicht der Homomorphismus $A \to F_A$ diskutiert, sondern der Homomorphismus $F_A \to A$. Dieser Homomorphismus geht nun vermöge der besagten universellen Eigenschaft aus der Identität $A \to A$ hervor; daß allerdings die Basis eines freien Moduls diese Eigenschaft hat, benutzen sie zwar, beweisen es aber nicht. Cartan und Eilenberg interessieren sich ausschließlich für die exakte Sequenz

$$0 \to R_A \to F_A \to A \to 0$$

(im Blick auf projektive Auflösungen; für näheres vgl. 3.1.4); ihr eigentliches Ziel ist von Anfang an die Derivation von Funktoren — und die Definition des allgemeinen Konzepts Adjunktion hätte hier wohl nicht viel eingetragen.

5.2.3 Das Aufkommen weitreichender kategorieller Konstruktionen

5.2.3.1 Hom-Funktoren

Historisch rührt diese Konstruktion her von Situationen, in denen mit Objekten A und B auch $\mathrm{Hom}(A, B)$ eine bestimmte Struktur trägt. So betrachtet bereits Peano $\mathrm{Lin}(A, B)$ für Vektorräume A, B, vgl. [Krömer 1998]. Die historisch erste Definition eines Hom-Funktors steht bei [Eilenberg und Mac Lane 1942b]. Dort wird ausdrücklich hervorgehoben, daß es ein *"important functor"* ist. Aufgrund der speziellen Situation in [1942b], wo sich alles innerhalb von **Grp** abspielt, und im Blick auf die "Spezialisierung" des Hom-Funktors zum Charaktergruppenfunktor legen Eilenberg-Mac Lane Wert darauf, daß es auf $\mathrm{Hom}(G, H)$ die Struktur einer topologischen Gruppe gibt[324].

Bei [1945, 243ff] verallgemeinern sie diese Idee zu den Funktoren $\mathrm{Map}(X, Y)$ in **Top** und $\mathrm{Lin}(B, C)$ in der Kategorie $\mathfrak{B}$ der Banachräume. Sie legen Wert darauf, zu zeigen, daß diese beiden Funktoren Werte in der zugrundeliegenden Kategorie haben — also daß $\mathrm{Map}(X, Y)$ topologischer Raum ist und die *mapping function* des Funktors stetige Funktionen liefert (S.243f), sowie daß $\mathrm{Lin}(B, C)$ Banachraum ist und die *mapping function* des Funktors Kontraktionen bezüglich der Supremumsnorm liefert[325].

Ein Hom-Funktor spielt auch in [Cartan und Eilenberg 1956] eine hervorragende Rolle, da er ja zu den beiden Funktoren gehört, an denen der Prozeß der Derivation von Funktoren studiert wird. Die Autoren bezeichnen ihn selbst als ein *"basic example"* (S.18). Wieder ist das Objekt $\mathrm{Hom}(A, C)$ eine Menge mit Struktur; in diesem Buch sind alle Kategorien solche von Moduln, Funktoren also nur auf der Kategorie der Λ_1-Moduln mit Werten in der Kategorie der Λ-Moduln definiert (wobei Λ_1, Λ Ringe sind; S.18). Da somit die Möglichkeit, den Grundring zu wechseln, vorgehalten ist, sind für Λ-Moduln A, C bei beliebigem Ring Λ die Konstruktionen $\mathrm{Hom}(A, C)$ und $A \otimes C$ Beispiele von Funktoren i.S. von Cartan-Eilenberg, denn diese beiden Konstruktionen werden in [Cartan und Eilenberg 1956] als $\mathbb{Z}$-Moduln (abelsche Gruppen) aufgefaßt (ebd. S.20f).

Die ursprüngliche Idee von [Eilenberg und Mac Lane 1942b], auf dem Objekt $\mathrm{Hom}(G, H)$ nach einer Gruppenstruktur zu suchen, wird in zwei verschiedene Richtungen weiterentwickelt:

- im Kontext der additiven und abelschen Kategorien wird es als eine Eigenschaft solcher Kategorien ausgezeichnet, daß man für zwei Objekte A, B auf

[324] Sie geben die Verknüpfung an, nicht aber die fragliche Topologie; diese hatte [Weil 1940, 99f] zu diesem Zeitpunkt schon beschrieben (für den Fall der Charaktergruppe). In [Eilenberg und Mac Lane 1945] steht dann die Definition der Topologie auf S.244.

[325] In [Eilenberg und Mac Lane 1945] sind die Pfeile der Kategorie $\mathfrak{B}$ stets die Kontraktionen bezüglich der Supremumsnorm, vgl. ebd. S.240. Als Grund hierfür wird angegeben, daß in diesem Fall die Isometrien die *equivalences* sind (in heutiger Sprache: die Isomorphismen im Sinne der KT), während in der größeren Kategorie der Banachräume und linearen Operatoren die Isomorphismen im Sinne der linearen Algebra die *equivalences* wären.

Hom(A, B) eine abelsche Gruppenstruktur hat (z.B. [Grothendieck 1957, 126]). Dies hat damit zu tun, daß es in der Kategorie den Begriff einer exakten Sequenz geben soll und daß man die Funktorialität der derivierten Funktoren (nämlich daß diese nicht von der gewählten Auflösung abhängen) nachweisen kann ([Cartan und Eilenberg 1956, 82f]; die additive Struktur ist dabei im Begriff der "Kettenhomotopie" enthalten). Der Aspekt eines Funktors von einer Kategorie $\mathcal{A}$ in dieselbe Kategorie $\mathcal{A}$ tritt — da $\mathcal{A}$ ja von der Kategorie der abelschen Gruppen verschieden sein kann — in den Hintergrund.

- In anderen Zusammenhängen wird die Existenz eines *inner hom-object* thematisiert; für Objekte A, B ist dann auch Hom(A, B) selbst Objekt der gleichen Kategorie[326], also nicht notwendig abelsche Gruppe.

Man kann dies so auffassen, daß im frühen Spezialfall, der in [Eilenberg und Mac Lane 1942b] betrachtet wird, gleichzeitig zwei orthogonal zueinander liegende Spezialisierungen des allgemeinen Konzepts enthalten sind, die sich in ihm gewissermaßen zufällig "schneiden". Eine Vereinheitlichung versucht [Mac Lane 1965] (vgl. auch die Darstellung in [1963, 44]) mit dem Begriff der *bicategory*[327]. Ein Hom-Funktor hat dann in jedem Fall Werte in einer solchen *bicategory*. Dies wurde bei den Tannaka-Kategorien weiterverfolgt (4.2.4).

5.2.3.2 Funktorkategorien

Daß Funktoren eine Kategorie bilden, wird gleich bei [Eilenberg und Mac Lane 1945, 250] erstmals festgestellt, wo es zur Begründung heißt: *"This category [...] is useful chiefly in simplifying the statements and proofs of various facts about functors, as will appear subsequently"*. Mit anderen Worten: der Begriff wird eingeführt im Blick auf einen Einsatz als sprachliches Ausdrucksmittel (KT als Sprache); es geht nicht um Konstruktionen *auf* Kategorien. Ob für Eilenberg-Mac Lane der Begriff außerdem in ihrer Diskussion des Limesbegriffs notwendig war, untersuche ich in 5.3.3.2; jedenfalls hat man es dort nur mit kleinen Urbildkategorien zu tun.

Kan faßt die Kategorie der simplizialen Mengen als Funktorkategorie auf; ähnlich Godement (zu beiden vgl. 2.6.1). Grothendieck spricht in Tohoku Funktorkategorien (mit kleinen Urbildkategorien) auf S.125 an. Die Einschränkung auf kleine Urbildkategorien verschwindet in der Andeutung einer "rein formalen" Funktorkategorie auf beliebigen Kategorien: *la composition de foncteurs se comporte formellement comme un bifoncteur* — wobei dieser *bifoncteur* natürlich auf zwei solchen Funktorkategorien "leben" würde. Auf der Einführbarkeit beliebiger Funktorkategorien liegt denn auch ein Akzent in *n°307*, Grothendiecks Diskussionspapier zur Umgestaltung der mengentheoretischen Grundlegung der KT (vgl. 6.4.3, 7.3); die Unzulänglichkeit des

---

[326][Gelfand und Manin 1996, 105] listen einige Kategorien auf, in denen ein solches Objekt existiert, geben aber kein allgemeines Kriterium an; es wird deutlich, daß ein Zusammenhang zur Adjunktion $\otimes/Hom$ besteht. Das *inner hom-object* gehört auch zu den *six opérations* (vgl. Anm.288); [Deligne 1998, 17] deutet an, welche Rolle es bei der Herstellung eines Homologiebegriffs spielt.

[327]In den genannten Arbeiten bezeichnet dies eine spezielle Art von Kategorie mit Multiplikation, nicht zu verwechseln mit den *bicategories* von [Mac Lane 1950].

vorangegangenen Entwurfs *n°301* wird wohl insbesondere darin gesehen, daß dieser Entwurf ausdrücklich davon abgesehen hat, jenes "rein formale Verhalten" in eine legitime Konstruktion umzugießen. Auf diesen Punkt komme ich in 7.2.2 zurück.

In SGA tritt der Begriff der Funktorkategorie vor allem in Gestalt von Garbenkategorien auf (4.1.2.3); damit ist zugleich gesagt, daß der Begriff dort eine zentrale Aufgabe hat. Ebenso ist er von entscheidender Bedeutung für das wichtige *full embedding theorem* (vgl. 3.3.4.4).

5.2.3.3 Die Kategorie aller Kategorien

Wann und in welchen Zusammenhängen wurde die Kategorie aller Kategorien erstmals thematisiert? Dies war keineswegs bei Eilenberg-Mac Lane der Fall (vgl. auch 5.3.3.3). Mac Lane kommt in seiner ersten Arbeit zu den Problemen der mengentheoretischen Grundlegung der KT auf **Cat** zu sprechen, und zwar im Zusammenhang mit Tohoku: *"[[Grothendieck 1957]] has shown that [...] a consideration of categories of categories has many advantages"* [1961, 28]. Es wäre zu prüfen, wie weit man sich einer solchen Interpretation von Tohoku anvertrauen kann — denn *explizit* spricht Grothendieck in Tohoku nicht über eine Kategorie aller Kategorien. Andererseits spricht er, wie wir oben gesehen haben, von der *composition de foncteurs*, also letztlich der Pfeilverknüpfung von **Cat** — wobei es ihm aber mehr auf die Funktorkategorien ankommt, auf denen man diese *composition* als Bifunktor auffassen kann. Weiter diskutiert er das Identifikationskriterium für Kategorien (also für die Objekte von **Cat**); so schreibt er etwa auf S.125 *"Il importe [...] d'observer la différence de [la] notion [d'équivalence de catégories] avec la notion beaucoup plus stricte d'isomorphisme"*. Hier könnte man nun annehmen, mit *isomorphisme* meine er eben einen invertierbaren Pfeil — und somit betrachte Grothendieck Kategorien zumindest implizit als Objekte einer Kategorie; allerdings fährt er fort *"[la notion d'isomorphisme] s'applique si on veut comparer des catégories qui sont des ensembles"*, denkt also, wenn überhaupt, nur an eine Kategorie von *kleinen* Kategorien, vielleicht aber auch einfach an einen mengentheoretischen Begriff von *isomorphisme* (eine Bijektion mit zusätzlichen Eigenschaften). Davon, Grothendieck zeige an dieser Stelle *"[the] advantages [of] a consideration of categories of categories"*, kann vollends keine Rede sein, stellt er doch explizit heraus, daß der Begriff des Isomorphismus wenig Bedeutung hat (vgl. insgesamt 3.3.4.3). Mac Lane dachte letztlich wohl an die *catégories définies par des schémas de diagrammes* (3.3.4.2), die prinzipiell als Konstruktionen in **Cat** aufgefaßt werden können — und ich unterstreiche an verschiedenen Stellen d.v.A. gerade diesen Aspekt von Tohoku, daß dort erstmals Konstruktionen *auf* Kategorien im Mittelpunkt stehen.

Von unbestreitbarer Bedeutung ist dann die Betrachtung von **Cat** im Stadium von SGA, nämlich im Zusammenhang mit *catégories fibrées*, wo man über jedem Objekt S eine Faserkategorie F_S hat (in Analogiebildung zur Faserung topologischer Räume), und zwar in funktorieller Weise (d.h. die Zuweisung $S \mapsto F_S$ definiert einen Funktor mit Werten in **Cat**). In *Exposé VI* von SGA 1 wird im Blick auf die intendierte Anwendung dieses Begriffs, die *"descente"*, gezeigt, daß **Cat** projektive

Limites hat, falls die Indexmenge zum Universum gehört (S.3). Näheres zu diesem Themenkreis findet man bei [Mac Lane 1971a, 239] oder [Bénabou 1985, 29]. Auf Lawveres Versuch der Axiomatisierung von **Cat** (im Blick auf eine Grundlegung der Mathematik) komme ich in 8.1.1 zurück.

5.3 Wandlungen des intendierten Modells der KT

In Abschnitt 1.2.1 wurde die Aufgabe des Philosophen beschrieben als die Beantwortung der Frage, ob die für einen bestimmten Bereich der Mathematik als Konvention gesetzten Axiome das jeweils intendierte Modell erfassen. Im Rahmen einer diachronischen Gesamtschau der verschiedenen Stadien in der historischen Entwicklung der KT bietet es sich an, die *Weiterentwicklung* dieses intendierten Modells, insbesondere den heutigen Stand (die Auffassung der "reifen" Disziplin) zu untersuchen.

Hierzu steht nun glücklicherweise nicht nur der bisher dargestellte historische Befund zur Verfügung, sondern auch eine Stellungnahme eines mit der Theorie arbeitenden Fachmathematikers. Yuri I. Manin hielt auf einer DMV-Jahrestagung anläßlich der Verleihung der Cantor-Medaille einen Festvortrag mit dem Titel *"Georg Cantor and his Heritage"* [Manin]. Einige Abschnitte des Vortrags befassen sich mit der Kategorientheorie[328]; eine Passage scheint mir die Dinge so gelungen auf den Punkt zu bringen, daß ich mich entschlossen habe, sie in einiger Ausführlichkeit hierherzusetzen.

> When at [a certain stage of the] historical development, sets gave way to categories, this was at first only a shift of stress upon morphisms [...] of structures, rather than on structures themselves. [...] However, primarily thanks to the work of Grothendieck and his school on the foundations of algebraic geometry, categories moved to the foreground. Here is an incomplete list of changes in our understanding of mathematical objects brought about by the language of categories. Let us recall that generally objects of a category C are not sets themselves; their nature is not specified [...].
>
> A. An object X of the category C can be identified with the functor it represents: $Y \mapsto Hom_C(Y, X)$. Thus, if C is small, initially structureless X becomes a structured set. This external, "sociological" characterization of a mathematical object defining it through its interaction with all the objects of the same category rather than in terms of its intrinsic structure, proved to be extremely useful in all problems involving e. g. moduli spaces in algebraic geometry.
>
> B. Since two mathematical objects, if they are isomorphic, have exactly the same properties, it does not matter how many pairwise isomorphic objects are contained in a given category C. Informally, if C and D have "the same" classes of isomorphic objects and morphisms between their representatives, they should be considered as equivalent. [...]

[328] dies mag erstaunen, wenn man den Titel des Vortrags in Betracht zieht — weniger erstaunlich ist es im Licht des Arbeitsgebiets des Vortragenden. Den Bogen von Cantor zur KT schlägt Manin übrigens zumindest in inhaltlicher Hinsicht recht überzeugend, aber darauf gehe ich hier nicht näher ein.

> This "openness" of a category considered up to equivalence is an essential trait, for example, in the abstract computability theory. [. . .]
>
> C. The previous remark also places limits on the naive view that categories "are" special structured sets. In fact, if it is natural to identify categories related by an equivalence (not necessarily bijective on objects) [. . .], then this view becomes utterly misleading.
>
> More precisely, what happens is the slow emergence of the following hierarchical picture. Categories themselves form objects of a larger category *Cat* morphisms in which are functors, or "natural constructions" like a (co)homology theory of topological spaces. However, functors [. . .] also form objects of a category. Axiomatizing this situation we get a notion of *2-category* whose prototype is *Cat*. Treating 2-categories in the same way, we get 3-categories etc.
>
> The following view of mathematical objects is encoded in this hierarchy: there is no equality of mathematical objects, only equivalences. And since an equivalence is also a mathematical object, there is no equality between them, only the next order equivalence etc., *ad infinitum*.
>
> This vision, due initially to Grothendieck, extends the boundaries of classical mathematics [. . .].

Dieser Text gibt zahlreiche Hinweise darauf, welche Intention arbeitende Mathematiker heute mit der KT verbinden und in welchen Entwicklungsschritten es historisch dahin kam. Einige dieser Hinweise werde ich im folgenden aufgreifen und näher untersuchen[329]. Hierbei stelle ich Manins Bemerkungen nach Möglichkeit dem bisher dargestellten historischen Befund gegenüber.

Ich nähere mich der Frage der Intention der KT über die Intentionen dreier Grundbegriffe, wie sie sich aus Manins Text und dem historischen Befund zu ergeben scheinen. Diese Begriffe sind "Objekt", "Pfeil" und "Kategorie"; Manin unterstreicht, daß es für ihre jeweiligen Vertreter je verschiedene Identifikationskriterien gibt[330]. Die Hierarchie der Kriterien ist (mit Manin) auch eine historische: alles beginnt damit, Konstruktionen bis auf Isomorphie zu charakterisieren; erst später (beginnend mit Tohoku) interessiert man sich für die Identifikation von Kategorien — und kommt zu einem neuen Kriterium (Äquivalenz).

5.3.1 Was ist ein Objekt?

5.3.1.1 Die Antwort der Mengenlehre — die Nicht-Antwort der KT

Der Terminus "Objekt" hat offensichtlich eine Verwendungstradition in der Alltagssprache und im philosophischen Diskurs (synonym zu "Gegenstand"). Ich gehe im

[329] Auf Manins Text wird im folgenden häufig in loser Form Bezug genommen; es ist stets das voranstehende Zitat gemeint.

[330] Ein ähnliches Bild entwarf Jean-Pierre Marquis in einem Vortrag in Nancy anläßlich des Symposiums "PILM 2002".

folgenden davon aus, daß die Verwendung des Terminus als Bezeichnung eines bestimmten Teils der Daten einer Kategorie sich auf diese außermathematische Verwendungstradition bezieht; die Intention des Begriffs "Objekt" in seiner kategorientheoretischen Bedeutung ist also in Bezug auf diese Verwendungstradition zu erarbeiten.

Der Beitrag der Mengenlehre zur Rede von mathematischen Objekten ergibt sich aus Quines zentraler Einsicht *"no entity without identity"* [1977, 35]: Man kann nur über solche Dinge sinnvoll sprechen, die man auch identifizieren kann[331] — d.h. nur diese Dinge können "Gegenstand" (einer Rede) sein. Die Mengenlehre versucht beispielsweise, Zahlen durch deren Definition über eine Äquivalenzrelation zu einem abstrakten Gegenstand zu machen, den man identifizieren kann (weil eine Äquivalenzrelation eine *Partition* liefert). Dies gilt sinngemäß für alle von der Mengenlehre aufgenommenen mathematischen Gegenstände: diese sollen *identifizierbar* (und insofern erst zum Gegenstand) werden dank des Begriffs der Äquivalenzrelation[332]. Allerdings gelingt dieses Vorhaben nicht, weil die Mengenlehre Nonstandardmodelle hat.

Demgegenüber geht die KT zunächst nicht von einer philosophischen Definition von "Objekt" aus (sei es nun die von Quine oder eine andere), sondern verwendet "Objekt" als undefiniertes Prädikat. Sagt man in der KT, X sei ein Objekt (einer Kategorie), so ist damit noch nicht zugleich gesagt, es handele sich um ein Objekt im Sinne irgendeiner philosophischen Definition; es ist nur gesagt, daß jenes X sich so verhält, wie es die Postulate des Begriffs Kategorie für Dinge, denen das Prädikat "Objekt" zukommt, festlegen. Quine würde meine Einführung des Zeichens X wahrscheinlich als billigen Trick disqualifizieren: X steht ja wohl für etwas, worüber man sinnvoll reden kann (eine Entität) und *kann* insofern nur ein Objekt im philosophischen Sinn sein. Gleichwohl kann meine Aussage stehenbleiben, daß *die KT darüber nicht redet*. Andererseits wurde der Terminus, wie gesagt, zweifellos in irgendeiner Absicht ausgewählt; diese Absicht (Intention) bleibt also im folgenden aufzusuchen.

5.3.1.2 KT: Objekte haben nicht immer Elemente

Manin sagt uns Genaueres darüber, inwiefern das Prädikat $\lhd$Objekt$\rhd$ in der KT undefiniert bleibt: *"Let us recall that generally objects of a category C are not sets themselves; their nature is not specified"*. Während also für die üblichen Gegenstände der Mathematik typischerweise davon ausgegangen wird, daß die Frage nach ihren Elementen sinnvoll möglich ist (da diese Gegenstände allesamt innerhalb der Mengenlehre unter Verwendung des Zeichens $\in$ definiert werden), wird zumindest

[331] Vgl. hier die Diskussion in 1.3.4.

[332] Die Relativierung des Gleichheitsbegriffs zum Begriff der Äquivalenzrelation dient darüber hinaus dem Zweck, den Zugriff auf Objekte einer bestimmten Abstraktionsebene auf einer tieferen Ebene zu ermöglichen: Um mit einer Äquivalenzklasse zu rechnen, genügt es, mit einem Repräsentanten der Klasse zu rechnen. Gleichzeitig ist es egal, mit welchem Repräsentanten man rechnet, wenn man Eindeutigkeit nur bis auf die jeweilige Äquivalenz benötigt. Man gewinnt hier also zwei Freiräume: den der ersparten Abstraktion und den der beliebigen Instantiierung. Dies erklärt, wie bei einem Wechsel des Identifikationskriteriums die Ebenen miteinander verbunden sind.

innerhalb der KT von einem Objekt (im technischen Sinne dieses Terminus) nicht zwingend vorausgesetzt, daß es sich um eine Menge handelt. Dies drückt sich insbesondere darin aus, daß dem Zeichen $\in$ im Sprachschatz der KT zunächst keinerlei Bedeutung zukommt; die KT kann also über die Elemente der Objekte von vorneherein gar nicht sprechen[333].

Es ist die generelle Maxime, Aussagen über die Objekte und Pfeile einer Kategorie allein mit den sprachlichen Mitteln der KT zu formulieren. Im Fall der Aussage $<$Das Objekt X hat Elemente$>$ ist also zunächst einmal kategorientheoretisch zu definieren, was es heißt, daß ein Objekt Elemente hat. Die Definition des entsprechenden Prädikats wurde der kategorientheoretischen Gestalt der Mengenlehre nachempfunden: **Set** hat ein Endobjekt[334], und die Elemente eines Objekts von **Set** entsprechen den Pfeilen (Abbildungen) von diesem Endobjekt in das Objekt. In anderen Kategorien kann dies alles genauso sein, oder es können zwei andere Situationen auftreten:

1) es gibt kein Endobjekt (dann kann man nicht von Elementen im gerade erklärten Sinn reden; was man dann tun kann, bespreche ich in 5.3.1.4);

2) es gibt ein Endobjekt, aber für manche Objekte X keine Pfeile von diesem Endobjekt nach X (dann hat X keine Elemente).

Nun kann es sein, daß es auch für eine Kategorie ohne Endobjekt sehr wohl eine mengentheoretische Realisierung gibt und entsprechend eine Rede von den Elementen der Objekte *im Sinne der Mengenlehre* sinnvoll möglich ist. Man spricht dann aber womöglich über Aspekte der betreffenden Objekte, die von der fraglichen Kategorie gar nicht erfaßt werden (die im gerade gewählten Kontext gar nicht ausdrückbar sind). Der KT geht es um die Abgrenzung (Kategorisierung) *verschiedener* Kontexte voneinander; die Mengenlehre hat eher die (zuweilen kontraproduktive) Tendenz, alles vereinheitlichen zu wollen.

[Cartier 2001, 399] gibt ein Beispiel einer Kategorie, die zwar ein Endobjekt hat, in der aber nicht alle Objekte Elemente (Punkte) haben. Die Kategorie E/S der Faserbündel $E \xrightarrow{p} S$ über einer festen Basis S hat ein Endobjekt ($S \xrightarrow{\mathrm{Id}} S$); Punkte sind hier also gegeben durch globale Schnitte $s : S \to E$. Aber: nicht jedes Faserbündel hat globale Schnitte, z.B. das Hopf-Bündel (S^3 über S^2 gefasert mit Fasern homöomorph zu S^1; vgl. 2.1.2.2)[335]. Da Garben in Lazards Sichtweise mit

[333] Ob die in der KT konstruierten Gegenstände sich, ebenso wie die "üblichen" Gegenstände der Mathematik, innerhalb der Mengenlehre definieren lassen, war eine in der grundlagentheoretischen Diskussion über die Theorie zentrale Frage, deren Geschichte ich in Kapitel 7 eingehend behandele.

[334] bis auf eindeutige Isomorphie charakterisiert: eine einelementige Menge.

[335] Einen Beweis der Tatsache, daß das Hopf-Bündel keine globalen Schnitte hat, skizziert [Jänich 1990, 85]. Dieser Beweis beruht übrigens wesentlich darauf, daß der Homologiefunktor auf die beiden topologischen Räume angewendet wird; was über die Gruppenhomomorphismen gelten müßte, die zu den in Rede stehenden stetigen Abbildungen gehören, kann dann aufgrund der (im vorliegenden Fall tatsächlich bekannten) Homologiegruppen nicht stimmen. Dies ist also eine Aussage über Abbildungen zwischen Räumen, für deren Beweis die Invarianten der Räume (wie Jänich unterstreicht) an sich irrelevant sind, während die funktorielle Sichtweise entscheidend ist.

Faserbündeln nah verwandt sind (und sich die ganze Garbentheorie ja darum dreht, wann es globale Schnitte gibt und wann nicht), verwundert nachgerade die folgende Äußerung nicht:

> What was clear [in the 50's] was that sheaves did not have elements in the same sense than modules have elements and that different, more intrinsic formulations were required [Gray 1979, 60].

Bei Garben sind also die sprachlichen Möglichkeiten der KT im Zusammenhang der Frage der Elemente ein echter Gewinn, anders als bei Moduln. Der topologische Raum E, der dem *espace étalé* zugrundeliegt, hat natürlich Elemente im üblichen Sinn; aber als Objekt in der Kategorie E/X hat der *espace étalé* unter Umständen keine Elemente im Sinn der KT.

Während Grays Äußerung aus der Retrospektive der fertigen Theorie Sinn ergibt, bleibt unklar, welches der historische Ursprung der Überlegungen rund um die kategorientheoretische Definition von ◁Element▷ war. Beispielsweise scheint Grays Äußerung letztlich einen Zusammenhang zur Problematik des *full embedding theorem* (dargestellt in 3.3.4.4) zu suggerieren; diese Problematik ist zwar mit der Problematik der kategorientheoretischen Definition von ◁Element▷ nicht zu verwechseln, könnte aber die Thematisierung einer solchen Definition historisch nahegelegt haben. Ich habe noch zu wenige Indizien zusammengetragen, um diese historische Frage zu beantworten; möglicherweise geht das Konzept historisch auf Grothendieck zurück, der es, wie Cartier weiter aufzeigt, für die algebraische Geometrie methodisch folgendermaßen nutzbar machte: Gleichungen ohne Lösungen entsprechen Räumen ohne Punkte (vgl. hier die Bemerkungen zur Definition von *"point géométrique"* in 4.1.1.4).

5.3.1.3 Die KT sieht Objekte als nichtpenetrierbar

Manche Mathematikphilosophen sehen in der KT "nur" eine mathematische Disziplin, die anderen Disziplinen als Hilfsdisziplin diene, aber nicht, wie die Mengenlehre, etwas sein könne, was die Mathematik zusammenhält. Diese Auffassung beruht wohl darauf, daß die KT, wie wir gesehen haben, zunächst nichts einzutragen scheint dafür, mathematische Konstrukte zu Gegenständen im Sinne einer philosophischen Definition des Begriffs "Gegenstand" zu machen; aber dieser Schein trügt.

Wie steht die KT spezifisch zum "Objektsein" (im Sinne der Verwendungstradition des Terminus) von Objekten (von Instanzen von ◁Objekt▷ im Sinne der KT)? Spricht die KT ein mathematisches Gebilde als Objekt an, so schrumpft dieses zu einem nichtpenetrierbaren (unzugänglichen) Punkt zusammen, über den man einzig das weiß, was er in der Interaktion mit anderen Objekten (diese Interaktion vermittelt durch mathematische Operationen) an Spuren zurückläßt. Die KT steht mit dieser Sicht des Objekts bestimmten Beiträgen zur philosophischen Debatte sehr nahe. So sagt [Poincaré 1968, 25]:

> ce que [la science] peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, [...] ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable.

(Diese Aussage bezieht sich zunächst auf natürliche Dinge, ist also eine Aussage über die Möglichkeiten der Naturwissenschaft; die Einsicht der KT scheint aber zu sein, daß in der *Methode* des Umgangs mit Objekten der Unterschied zwischen Naturwissenschaft und Mathematik nicht so groß ist.) [Cartier 2001, 393] referiert Leibniz' Monaden als *"windowless (we would say they have no internal structure), and the only things that matter are their mutual relationships"*. Und nicht zuletzt setzt ja der Pragmatismus den Akzent auf das semiotische Vermitteltsein jeden Gegenstands; die Beschäftigung mit dem "Gegenstand selbst" wird als Metaphysik abgetan, während der Gegenstand nur in seiner Herstellung durch das Subjekt, in Abhängigkeit von den Herstellungsmitteln, zur Verfügung steht. Die Untersuchung des Gegenstands ist also darauf angewiesen, ihn immer wieder zu aktualisieren, jeweils in neuen Situationen, um ihn so "von allen Seiten zu betrachten".

In 5.3.1.4 wird besprochen werden, daß die KT davon ausgeht, durch die Betrachtung aller Pfeile, die ein Objekt treffen, könne man sämtliche Information über das Objekt rekonstruieren. Hier wäre (von einem prä-kategorientheoretischen Objektbegriff aus) die Frage zu stellen: Genügt das zur Identifikation? Diese Frage geht offenbar von einem extern gegebenen Objekt aus, über das der KT ein gewisses Maß an Information, aber möglicherweise nicht "genügend" Information zur Verfügung steht. Die Idee der KT ist, daß *sämtliche* Information, die das Objekt ausmacht, bereits in der Gesamtheit der das Objekt treffenden Pfeile enthalten ist. Denkt man an ein extern gegebenes Objekt, so wird diese Idee zur (unter Verwendung des "tatsächlichen Objekts" überprüfbaren) Behauptung. Die KT versteht die Idee aber nicht so, sondern eher als so etwas wie einen Versuchsaufbau in der Physik, ein Beobachtungsparadigma: *Nur* in dieser Form kann man sich über das Objekt erkundigen. Was an der ursprünglichen Konzeption des Objekts absolut (nichtrelativ) war, erscheint der KT als Ballast. Insbesondere hat man es nicht mit einer "mitgehenden Ontologie" zu tun: was in der einen Kategorie noch komplexe Konstruktion ist, behält diese ontologische Form nicht ein für allemal, sondern schrumpft in der nächsten Kategorie (in der neuen Beobachtungssituation unter anderem Blickwinkel) zum simplen Objekt[336].

Wohlgemerkt: Es geht in der KT nicht darum, auf diesem Wege eine reduktionistische Ontologie einzuführen, die alles auf punktförmige, nicht mehr weiter reduzierbare Objekte zurückführt, die nur noch durch ihre wechselseitigen Bezüge ausgezeichnet sind. Ganz im Gegenteil ist das Interessante[337] dieses Ansatzes die

[336] Es ist eine terminologische Verabredung zu treffen: Ist von "Konstruktion" (oder besser vom Konstrukt als dem Ergebnis einer Konstruktion(-shandlung)) die Rede, so soll die Herkunft und Gestalt des Gebildes nicht vernachlässigt werden (z.B. ein direktes Produkt von Mengen). Gleichwohl ist die "fertige" Konstruktion ihrerseits Objekt der Kategorie und als solches gestaltlos, nur noch "dadurch zu erkennen", wie es mit anderen Objekten interagiert. Diese diagrammatische Charakterisierung der einstigen Konstruktion wird aber in der KT *zur Definition der Konstruktion* und kann so auf Kategorien übertragen werden, in der von einer Gestalt von Objekten nicht die Rede sein kann.

[337] Auf ein weiteres Interesse dieser Vorgehensweise hat mich Lawvere im Gespräch hingewiesen: Es geht nicht nur einfach darum, Objekte zu ignorieren; man sieht sie *richtig*, wenn man sie nach der Weise der KT sieht. Denn die KT-Sichtweise stellt Mittel zur Untersuchung zur Verfügung:

Möglichkeit zur *Veränderung* der Perspektive: Man kann gegebene Objekte in einer Kategorie in Extension betrachten und in der nächsten zu Punkten reduzieren, wobei man jedesmal den Akzent auf einen anderen *Typ* von *"rapports entre les choses"* legt. Kurz: man kann den methodischen Rahmen ändern bzw. die Ebene der Thematisierung — worin wieder die Grundidee des Pragmatismus zum Ausdruck kommt, daß es auf den jeweiligen methodischen Rahmen, auf die jeweilige Ebene der Thematisierung ankommt dabei, mit was für Objekten man es zu tun hat[338]. Man könnte von einer "Strategie der Relativierung" sprechen.

So zeigt Lawvere etwa auf, daß der Begriff "elementar" relativ ist. Die traditionnelle mathematische Logik bemüht sich, ein für alle mal zu entscheiden, auf welcher logischen Stufe die Beschreibung eines mathematischen Objekts angesiedelt ist (erste Stufe, zweite Stufe usw.). Die KT erlaubt einen Wechsel der Perspektive, ein "sich außerhalb hinstellen": eine Aussage höherer Stufe kann in einer anderen Perspektive elementar werden.

> [...] the usual categorical notions can be expressed as formulas in the elementary theory of abstract categories; [...] the notions of infinite limits and colimits, or of an object being "finitely generated" are not always elementary from the point of view of a given category, although they do become elementary if the category is viewed #71
> as an object in the category of categories [Lawvere 1966, S.3f].

Das von Lawvere gewählte Beispiel zeigt die prinzipielle Bedeutung dieses Phänomens auf, betrifft es doch die infinitären Konstruktionen Grothendiecks. Mit gewissem Recht kann man also sagen, Grothendiecks Einführung seiner Universen[339] habe den Anstoß gegeben zur Elimination der Idee einer unterliegenden Menge (bzw. zur Aufweisung der Kontingenz dieser Idee). Zwar scheint der Übergang zu einer stärkeren Mengenlehre zunächst eher zu einem Unterstreichen dieser Idee als zu ihrer Elimination zu führen; bei der Lektüre des Textes *n°307* fällt aber anderes auf:

> Il est certain qu'il faut pouvoir considérer les catégories, foncteurs, homomorphismes de foncteurs etc ... comme des objets mathématiques, sur lesquels on puisse quantifier librement, et qu'on puisse considérer à leur tour comme formant les éléments d'ensembles.

Es geht also um das Recht zur freien Quantifizierung — m.a.W. um ein "Elementarmachen" von Aussagen, die aus dem üblichen Universum herausführen. Dazu sind Grothendieck-Universen da; der Bezug zu Lawveres Bemerkung ist offensichtlich.

5.3.1.4 Exkurs: Intensionale Gleichheit und "externe" Charakterisierung

Die Intension[340] eines Konzepts ist die Gesamtheit der wesentlichen Eigenschaften, die die Anwendbarkeit des Konzepts determinieren. Zwei Konzepte sind intensional

die Pfeile, die bei einem Objekt ankommen, geben Anlaß zu Inzidenzzahlen und dergleichen; vgl. 5.3.2.1.

[338] Vgl. 1.3.1.

[339] Vgl. 7.3.1.

[340] Hier ist Intension mit ⌜s⌝ gemeint; dies ist nicht mit Intention mit ⌜t⌝ zu verwechseln. Um letzteren Begriff, nämlich um die Intention (das intendierte Modell) der KT, geht es generell im

gleich (oder synonym), wenn das eine in jeder beliebigen Situation für das andere substituiert werden kann bzw. wenn sie genau die gleichen Eigenschaften haben (Leibniz' Prinzip der *identitas indiscernibilium*):

$$(a =_{\text{int}} b) :\leftrightarrow (\forall R\ R(a) \leftrightarrow R(b))$$

Das Problem hierbei ist, daß die Quantifikation über "Situationen" oder "Eigenschaften" nicht realistisch ist; man kann nicht alle erfassen. Ein Ausweg ist die extensionale Definition der intensionalen Gleichheit (bei der anstelle der Eigenschaften über ihre Extensionen quantifiziert wird):

$$(a =_{\text{int-ext}} b) :\leftrightarrow (\forall c\ a \in c \leftrightarrow b \in c)$$

Dies ist natürlich nicht zu verwechseln mit der extensionalen Gleichheit $(a =_{\text{ext}} b) :\leftrightarrow (\forall c\ c \in a \leftrightarrow c \in b)$, die einfach regelt, wann die Extensionen der beiden Konzepte gleich sind. "Intensional gleich" ist zunächst ein stärkeres Identifikationskriterium als "extensional gleich" (weil zwei Konzepte die selbe Extension haben können, ohne daß das eine in jeder beliebigen Situation für das andere substituiert werden kann).

Man kann jedoch die intensionale Gleichheit abschwächen und zu einer intensionalen Charakterisierung relativ zu einem gegebenen sprachlichen Kontext übergehen: Ein Objekt wird charakterisiert durch alle seine *in diesem Kontext ausdrückbaren* Eigenschaften — und nur diese determinieren ja die Anwendbarkeit. Man schränkt also gewissermaßen die Art der Information ein, die interessiert. Dies geschieht in der KT in zwei Schritten: Zunächst läßt man nur *diagrammatische* Information (die in der Sprache der KT ausdrückbar ist) zu. In einem zweiten Schritt schränkt man die Information weiter ein und betrachtet nur solche, die sich auf das Objekt in einer bestimmten "Auffassung" bezieht; man zeichnet eine bestimmte "Kategorie" aus (in Anspielung an den Gebrauch des Wortes in der Philosophie, wo die Kategorien gewissermaßen disjunkt sind, nicht verwechselt werden dürfen). Bei einer topologischen Gruppe wird man etwa entscheiden, ob man sich Information über die topologische Gruppe "im Ganzen" beschaffen möchte oder eher über die algebraische Struktur, über die topologische Struktur oder die unterliegende Menge oder die Verbandsstruktur der offenen Teilmengen usw. Durch diese Klassifizierung der Information verschafft man sich eine Handhabe über ein amorphes Ganzes (*divide et impera*). Es geht also um zweierlei Einschränkung des Kontextes: Eine sprachliche (was in der Sprache der KT ausdrückbar ist) und eine strukturelle (was sich in einer bestimmten Kategorie — von eventuell mehreren, als deren Objekt man das vorgelegte Konstrukt betrachten kann — niederschlägt).

Am Beispiel der topologischen Gruppen läßt sich noch nicht gut verdeutlichen, welches Interesse man eigentlich an diesem intensionalen Ansatz hat; der Impuls hierfür ist der Wunsch, sich über Objekte Information zu beschaffen, die *keine* Elemente haben[341]:

Abschnitt 5.3 und seinen Unterabschnitten — also auch hier; hier wird allerdings zusätzlich der erstgenannte Begriff benötigt, um speziell die Art, wie in der KT Objekte charakterisiert sind, besprechen zu können.

[341] Vgl. 5.3.1.2.

> [...] the [project to find substitutes in the category language for the notions of points or elements] [...] is based on the simple but useful remark that any set X in the category *Set* can be identified with the set $\mathrm{Hom}_{Set}(e, X)$, where e is a one-point set. In an arbitrary category $\mathcal{C}$ an analogue of e does not necessarily exist. However, by considering instead $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ for *all* Y *simultaneously*, we can recover complete information about the object X (up to isomorphism). [...] [Gelfand und Manin 1996, 78]

Es führt eine Denklinie von v.Neumanns Idee, die Mengenlehre auf den Begriff der charakteristischen Funktion aufzubauen, zur Idee, X durch $\mathrm{Hom}(e, X)$ zu beschreiben. Die Strategie, die Gelfand und Manin aufzeigen (daß man sämtliche Information über ein Objekt X bekommt, wenn man alle $\mathrm{Hom}(Y, X)$ betrachtet), wird beispielsweise von Grothendieck benutzt, um Eigenschaften von S-Schemata in solche von Funktoren zu übersetzen [Deligne 1998, 12].

Als Illustration, daß sich bereits an sehr einfachen Fragen eine Diskussion darüber entzünden kann, ob die extensionale Gleichheit das "richtige" Identifikationskriterium für mathematische Objekte ist, gebe ich noch einen Auszug aus einer im Internet geführten Debatte über die erkenntnistheoretischen Implikationen der KT wieder[342]. Harvey Friedman schreibt:

> Probably the first thing you need to know about collections is that any two collections are identical if and only if they have the same members. At least, that's the first thing that's normally taught after the concept is "explained".

Colin McLarty antwortet:

> Notice it is also the first thing the student is told to ignore when math textbooks use sets. The book defines or posits the integers, defines rationals as equivalence classes of pairs, defines real numbers as classes of Cauchy sequences—and then carries on as if all integers are rational numbers and real numbers. Some books comment on the abuse of notation, others seem not to notice. Either way the sets $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ are carefully defined, and then the student is asked to ignore the identity of the elements.

Die mathematischen Objekte $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ werden von den Mathematikern nicht so benutzt, wie es ihre extensionale Definition nahelegt; die Herstellung der einzelnen Zahlen wird beim Übergang auf die nächsthöhere Ebene "vergessen". Die ganzen und reellen Zahlen werden von der Warte des technischen *common sense* nicht als Abstraktionen (Äquivalenzklassen) ausgehend von den natürlichen Zahlen wahrgenommen. Selbstverständlich war die strenge Definition dieser Zahlen als solche Abstraktionen ein wichtiger Beitrag des 19.Jahrhunderts dazu, die Mathematik auf ein "sicheres Fundament" zu stellen; doch was in der Lehre (und um diese geht es ja den Debattanten in dem wiedergegebenen Auszug) gerade vermittelt werden soll, ist der heute gültige technische *common sense*, und dieser hat sich angewöhnt, ermächtigt durch das Vorhandensein der strengen Definition als Absicherung, so zu tun, als seien solche Spitzfindigkeiten nicht erforderlich.

[342] `http://www.math.psu.edu/simpson/fom/postings/9801/msg00194.`

5.3.1.5 KT-Identifikationskriterium für Objekte: Gleich bis auf Isomorphie

Man kann Objekte in der Kategorientheorie nur bis auf Isomorphie[343] charakterisieren; ein gegebenes Objekt kann man in jeder *in der Sprache der Kategorientheorie ausdrückbaren* Situation (Aussage) durch ein isomorphes Objekt ersetzen. Diese Einschränkung der Ausdrucksmittel ändert aber nichts am grundsätzlich intensionalen Charakter dieser Identifikation (auch wenn sie eine gröbere Klassifizierung als die extensionale Gleichheit ergibt). Da dieser Umstand in der KT implementiert ist, kann man ihn wohl als Bestandteil der KT-Intention von "Objekt" ansprechen.

Wieder entsprechend der Maxime, Aussagen über die Objekte und Pfeile einer Kategorie allein mit den sprachlichen Mitteln der KT zu formulieren, ist Isomorphie KT-intern definiert ohne Bezug auf Bijektivität im mengentheoretischen Sinn[344]; entsprechend setzt Isomorphie die Bijektivität selbst in mengentheoretisch realisierten Kategorien nicht zwingend voraus.

Für die Hervorkehrung dieses (gegenüber extensionaler Gleichheit schwächeren) Identifikationskriteriums hat es historisch zahlreiche verschiedene Motivationen gegeben.

- Sämtlichen Klassifikationsproblemen der Strukturmathematik (sei es nun das Homöomorphieproblem, das Problem der Klassifizierung algebraischer Varietäten, das Problem der Klassifizierung von endlichen Gruppen etc.) liegt offensichtlich der Ansatz zugrunde, zunächst einmal ein geeignetes Identifikationskriterium anzugeben, nach dem dann die Objekte des jeweiligen Typs in Klassen einzuteilen sind. Darin, daß es immer wieder Probleme diesen Typs gewesen sind, die ganze Disziplinen zusammengehalten haben[345], spiegelt sich die Einsicht wieder, daß man mit der bloßen Aufzählung der extensional verschiedenen Vertreter des jeweiligen Objekttyps eigentlich "noch nichts weiß".

- Die Hauptaufgabenstellung in den frühen Arbeiten von Eilenberg-Mac Lane (vgl. 2.2.4) war gerade: Ermittele Isomorphismen zwischen Gruppen, eventuell unter Heranziehung weiterer Isomorphismen, um so bestimmte Homologiegruppen berechnen zu können (vermöge der isomorphen Charakterisierung).

- In Abschnitt 3.1.5.1 hatte ich kurz angesprochen, daß bereits [Mac Lane 1950] einen Begriff der abelschen Kategorie vorschlug; warum dies mißlang, sagt [Mac Lane 1978, 22]: *"[the] axioms [of [Mac Lane 1950]] were too clumsy because he tried to get an exact duality between subobjects and quotient objects; later it became clear that duality "up to isomorphism" suffices"*. Buchsbaum

[343] Zwei Objekte A und B, es sei hier ausdrücklich wiederholt, heißen in der KT *isomorph*, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt; dies ist ein *invertierbarer* Pfeil $f : A \to B$, zu dem es also einen Pfeil $f^{-1} : B \to A$ gibt mit $f \circ f^{-1} = 1_B$ und $f^{-1} \circ f = 1_A$.

[344] Nicht zu verwechseln mit Grothendiecks Gebrauch des Terminus *"bijectif"* in [1957]: dort bezeichnet dieser einfach die (kategorientheoretische) Eigenschaft, gleichzeitig mono und epi zu sein (vgl. dazu 3.3.4.1).

[345] Vgl. [Hartshorne 1977, 55ff].

schafft, was Mac Lane schaffen wollte, weil er das richtige Identifikationskriterium einsetzt.

- Die Identifikation isomorpher Objekte diente zuweilen dazu, es erst mit einer "genügend kleinen" Klasse von Objekten zu tun zu haben, die einer Konstruktion zugrundegelegt werden soll, also zur Vermeidung mengentheoretischer Probleme[346] (vgl. 7.2.2).

5.3.2 Was ist ein Pfeil?

Die Intention von ◁Pfeil▷ bzw. ◁Morphismus▷ scheint die Implementation des Verhaltens von Strukturtransporten zu sein. Im Zuge des Arbeitens mit Strukturen ist es oft nützlich, die untersuchte spezielle Struktur in einen anderen Kontext zu transportieren. Pfeile als solche Transporthandlungen unterscheiden sich von Funktionen im mengentheoretischen Sinn, die Zuordnungen sind. Bei den Zuordnungen kommt es auf die einzelnen Punkte an, bei den Transporthandlungen auf das "Netz", das quasi über einen neuen Träger darübergelegt wird (Perspektive des Versehens einer Menge mit Struktur). Strukturmathematische (Objekt-)Konstruktionen werden dadurch charakterisiert, wie sie sich unter gewissen Handlungen (Operationen) verhalten (die "Testobjekte" der universellen Konstruktionen).

In der Praxis der KT können Pfeile einer Kategorie ihrerseits in einer neuen Kategorie als Objekte betrachtet werden[347] (*slice category*, 4.1.1). Die Unterscheidung zwischen Pfeil und Objekt wird bewußt als Unterschied des Aspekts installiert, weil entsprechend der Maxime der Relativität gerade die prinzipielle Vertauschbarkeit der Blickwinkel methodisch auswertbar ist. Hierbei sind es häufig Objekte solchen Typs (die also von Pfeilen herkommen), die "keine Elemente haben" (wie in den Beispielen gesehen); die Sichtweise der Mengenlehre, wonach eine Funktion auch nur eine Menge ist, wird hier also nicht extrapoliert. (Pfeile sind ferner nicht notwendig Funktionen im mengentheoretischen Sinn; aber es gibt bereits "zahme" Beispiele von Pfeilen — die also sehr wohl Funktionen im mengentheoretischen Sinn sind —, die keine Elemente i.S. der KT haben.)

5.3.2.1 Ist KT durch die Pfeile intuitiv?

> Peirce hat [...] die beste Charakterisierung der Mathematik als die Tätigkeit des "diagrammatischen Denkens" gegeben. Ich konstruiere in der Mathematik Diagramme, die mich eine Anschauung gewinnen lassen von Dingen, die sonst nicht sichtbar werden [Otte 1994, 94].

Mit der philosophischen These, die KT sei durch die Pfeile intuitiv, ist also gemeint: Kategoriell ausdrückbare Sachverhalte werden üblicherweise graphisch, als

[346] Ähnlich funktioniert Mac Lanes Begriff *locally small*; vgl. 7.4.1.

[347] Zugleich werden in einer äquivalenten Definition des Begriffs ◁Kategorie▷ die Objekte der Kategorie als spezielle Pfeile aufgefaßt, nämlich mit den Identitätspfeilen identifiziert.

Diagramme, dargestellt, sind also Bilder, die irgendeine Vorstellung empirisch versinnlichen, sichtbar machen. In diesen Bildern kommen insbesondere Pfeile vor, die beim Betrachter, wird er ihrer ansichtig, die Konnotation einer Bewegung, Dynamik auslösen. Es würde demnach die Vorstellung des *Transports* sichtbar gemacht.

Wie wir in 2.1.4 gesehen haben, begann man kurz vor dem Aufkommen der KT, Pfeile im Sinne der Umgangssprache zur graphischen Darstellung von Funktionen zu benutzen. Es ist unklar, wann man begonnen hat, den Terminus "Pfeil" für die Morphismen einer Kategorie zu verwenden; jedenfalls war von Anfang an die Idee präsent, jene graphische Darstellungsmethode für die Instanzen von ◁Pfeil▷ im Sinne der Kategorientheorie (also für Morphismen) zu verwenden. Die KT hatte von Anfang an die Aufgabe, sich mit Strukturtransportsituationen zu beschäftigen, bei deren graphischer Darstellung als Pfeildiagramm es egal ist, auf welchem von verschiedenen möglichen Wegen man dieses Diagramm durchläuft. Diesen Sachverhalt hätte man stets auch als Identität zweier Kompositionen von Elementen der Morphismenklasse schreiben können; man hat sich aber mit dieser algebraischen Gestalt nicht zufriedengegeben — und dies doch wohl, weil in der Tat in den Bildern die Vorstellung einer Dynamik, die man von der Situation hat, besser sichtbar gemacht wird. So wurde die zugehörige Beweismethode als *diagram chasing* bezeichnet (3.3.4.4). Ich gehe sogar so weit, zu behaupten, daß die KT sich nur aufgrund dieser günstigen graphischen Repräsentation als Beschreibungsmittel für die fraglichen Situationen bewährt hat; eine Darstellung ausschließlich durch Gleichungen hätte an der ursprünglichen Unübersichtlichkeit der Situationen wohl nicht viel geändert.

Diese Behauptung über die Rolle der graphischen Darstellung läßt sich auch auf den Erfolg der durch die KT bereitgestellten Beweistechnik ausdehnen: diese Beweistechnik bezieht sich explizit auf die Diagramme. Diesen Zug der KT heben Eilenberg-Steenrod (wie dargestellt in 2.5.3) und Cartan-Eilenberg ⟨#36 S.102⟩ ausdrücklich hervor als Begründung für ihre Entscheidung, die KT zur Darstellung der jeweils in ihren Büchern behandelten Theorien heranzuziehen: Leitprinzip ist die Vereinfachung von Beweisen[348].

Entwickelt man hingegen Methoden zur mathematischen Behandlung kategorientheoretischer Probleme, die die Diagramme als topologische Gebilde auffassen (Stichwort Inzidenzzahlen), stellt man sich auf eine Ebene oberhalb solcher intuitiven Verwendung, und die Dynamik verschwindet zugunsten einer Statik, die sich der Untersuchung mit geometrischen Methoden anbietet. Klaus Volkert unterstreicht die Bedeutung dieser methodischen Option:

> Im Gegensatz zu $f(x) = y$, das ja als Gleichung "für etwas" — nämlich für den Graphen — gelesen werden kann, steht das neue Symbol $[X \xrightarrow{f} Y]$ "für sich" (es erscheint nicht mehr als Beschreibung eines anschaulichen Sachverhalts). [. . .]
>
> Nicht zuletzt deshalb wird es mit seiner Hilfe möglich, *Abbildungen* als *eigenständige, geometrische Objekte* (nämlich als Pfeile oder als Kanten eines Graphen) aufzufassen und sie damit zum Ausgangspunkt von Konstruktionen zu machen: man denke etwa

[348] Ein solches Prinzip wirkt auch bei der Algebraisierung der Methoden der algebraischen Geometrie (die *Gegenstände* waren schon vorher algebraisch).

> an die Konstruktion des klassifizierenden Raumes einer Kategorie nach Segal. [. . .]
>
> Wurden ursprünglich Funktionen eingeführt, um die Zuordnung konkreter geometrischer Objekte zueinander auszudrücken, so werden nun solche Funktionen zu konkreten geometrischen (genauer: diagrammatischen) Objekten. Sie sind also von der Beschreibungsebene[[349]] auf eine neue Gegenstandsebene gewechselt [Volkert 1986, 73f].

Ich bin gleichwohl der Auffassung, daß Pfeile und kommutative Diagramme nicht reine Symbole sind, sondern ursprünglich Ikone[350], auf denen zwar zuweilen so operiert wird, als seien es Symbole (beispielsweise bildet man die duale Kategorie, indem man "die Pfeile herumdreht"), die aber mit einem ikonischen Rest behaftet bleiben. Volkert hebt zwar völlig zu Recht hervor, daß unter allen Zeichen die Symbole sich besonders einfach selbst zum Gegenstand der Betrachtung machen lassen, da die Beziehung Symbol-Symbolisiertes sehr locker, da konventionell, ist (ebd. S.205f); ich bin auch einverstanden mit Volkerts Einschätzung, daß man zum räumlichen Gebilde des "unterliegenden Graphen" einer Kategorie erst durch eine geeignete Symbolisierung der Morphismen und Objekte der Kategorie (die ja nicht *per se* räumliche Gebilde sind) gekommen ist. Sein historisches Argument dafür, daß die Pfeile als Zeichen "für sich" (unabhängig von ihrer Ikonizität) tatsächlich eine hervorragende Rolle in der Entwicklung der KT gespielt haben sollen, scheint mir aber noch genauerer Überprüfung bedürftig.

Volkert behauptet nämlich (ebd. S.206), Segals Gedanke der Anwendung des Verfahrens des klassifizierenden Raumes auf die KT (wie niedergelegt in [1968]) sei gerade nur dank jener geeigneten Symbolisierung möglich gewesen; hier ist darauf hinzuweisen, daß Segals Konstruktion letztlich an Borels Begriff des klassifizierenden Raums einer Gruppe inspiriert ist[351] (was Segal auch selbst anmerkt; S.107). Im Gruppenkontext gibt es (solange man die Gruppe nicht als Kategorie auffaßt) nicht die in Volkerts Argument bemühte Symbolisierung; die Konstruktion ist dort eine ganz andere. Segal überträgt also eine anderweitig bereits übliche Methode auf einen neuen Kontext[352]; er erhält eine Konstruktion, der *analoge Aufgaben zugedacht* sind wie der ursprünglichen. Die spezielle Symbolisierung ist hierfür möglicherweise nicht so entscheidend wie die Analogiebildung zur Gruppensituation[353]; dies wäre zu gegebener Zeit noch begriffsgeschichtlich zu untersuchen.

Es sei hier noch eine andere Frage besprochen, die nämlich, welche Auswirkung das Training im Umgang mit kategorientheoretischen Methoden auf die Zugänglichkeit anders codifizierter Mathematik hat.

---

[349] Vgl. 1.4.2.

[350] Vgl. zu dieser Terminologie [Volkert 1986].

[351] [Borel 1953, 166].

[352] Er weist darauf hin, daß der Gedanke dieser Übertragung auf Grothendieck zurückgehe.

[353] Damit soll nun nicht gesagt sein, die von Volkert evozierte Interpretation der Symbolisierung habe es historisch nicht gegeben. Z.B. geben Eilenberg-Steenrod bei ihrer Einführung der Sprechweise von der Kommutativität eines Diagramms folgende Hilfestellung: *"The combinatorially minded individual can regard it as a homology relation due to the presence of 2-dimensional cells adjoined to the graph"* (vgl. 2.5.3).

> Der Nachwuchs wird überhaupt nicht mehr imstande sein, etwa in Riemanns oder Hilberts Werken zu lesen, wenn er nur auf exakte Sequenzen oder kommutative
> #72 Diagramme dressiert ist. [Siegel 1968, 6]

Meines Erachtens wäre es falsch, die Kategorientheorie und angrenzende Begriffe abzulegen unter den vielen abstrakten Begrifflichkeiten, durch die die Mathematik dieses Jahrhunderts ihrer unmittelbaren Zugänglichkeit beraubt sei[354]. Im Gegenteil bin ich überzeugt davon, daß es den Mathematikern, die von Garben, Bündeln, Stapeln, *pullbacks* usw. sprechen, gerade darum ging (und auch gelungen ist), Intuition, Anschaulichkeit in komplizierte Sachverhalte einzuführen. Vgl. 1.2.4.

5.3.2.2 Die Gleichheitsbegriffe für Funktionen und Pfeile

Hatten wir beim Identifikationskriterium für Objekte gefunden, daß dieses schwächer ist als das extensionale, so verhält es sich bei Pfeilen in gewissem Sinne umgekehrt. Extensional sind die Funktionen $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ gleich; für die KT sind es verschiedene Pfeile (da sie verschiedene Ziele haben)[355]. Historisch ist dieses stärkere Identifikationskriterium, wie [McLarty 1990, 354f] klarmacht, in Beispielen aus der Topologie motiviert: eine geschlossene Kurve in einem Raum S ist eine Abbildung eines Kreises in den Raum; geht die Abbildung z.B. auf einen Torus, so macht es einen Unterschied, ob man als Zielobjekt der Abbildung den Torus nimmt oder den ganzen $\mathbb{R}^3$ (im zweiteren Fall ist das Bild zusammenziehbar, im ersteren nicht unbedingt). McLarty unterstreicht entsprechend, daß die KT, die ja von der algebraischen Topologie her entwickelt wurde, diese Feinheit notwendig hervorheben mußte. Bei ⟨#107 S.280⟩ geben Eilenberg-Mac Lane diesen Gedanken, übertragen auf Funktoren als Pfeile, sogar als Begründung dafür an, daß sie *“the idea of a category”* überhaupt eingeführt haben: *“The idea of a category is required only by the precept that every function should have a definite class as domain and a definite class as range, for the categories are provided as the domains and ranges of functors”.*

5.3.3 Was ist eine Kategorie?

5.3.3.1 Gibt es einen intendierten Begriffsinhalt?

Was “Struktur”, “Menge” und “Funktion” betrifft, so sind dies Termini, mit denen der arbeitende Mathematiker eine gewisse Bedeutung verbindet, wobei man versuchen

[354] was bei Siegel wohl ernst gemeint ist, während die bekannte Sprechweise vom “*general abstract nonsense”* eher scherzhaft gemeint ist. Diese wird oft Serge Lang zugeschrieben, der sie in seinem Algebra-Buch verwendet; [Hilton 1981, 80] nennt hingegen Mac Lane als Urheber — und Mac Lane selbst nennt Steenrod; dies geht auch aus Eilenbergs Briefwechsel hervor.

[355] Dieses Beispiel läßt vermuten, daß der Gleichheitsbegriff der KT für Funktionen enger ist als der der Mengenlehre. Ein klassischer engerer Begriff von Gleichheit für Funktionen ergibt sich aus der Unterscheidung von Funktionen in Intension und Funktionen in Extension, die bei [Church 1941, 2f] vorgenommen wird und dem Lambda-Kalkül zugrundeliegt. Ich habe mich nicht damit auseinandergesetzt, ob hier ein tieferliegender historischer Zusammenhang besteht; dies liegt allerdings sehr nahe, zieht man die große Bedeutung der *cartesian closed categories* für die Modelltheorie des Lambdakalküls in Betracht.

kann, diese Bedeutung zu explizieren. Bei "Kategorie" scheint dieses Szenario kein stimmiges Bild der Begriffsgeschichte zu ergeben: Die Kategorie-Definition mag etwas explizieren, aber dieses etwas ist wohl nicht in einer vorherigen Verwendungstradition des Terminus Kategorie durch arbeitende Mathematiker angelegt worden[356]. Es ist keine oder nur sehr wenig Ikonizität vorhanden (im auf Begriffe übertragenen Sinn von Ikonizität: Konnotation). Es ergibt sich daher die Frage, ob ◁Kategorie▷ etwas expliziert (und wenn ja, was).

Kann man sagen: "Kategorie" ist nur ein Name, den die Erfinder eines bestimmten abstrakten mathematischen Begriffes in willkürlicher Weise den Vertretern dieses Begriffes gegeben haben? Ich behaupte, der metaphorische Gehalt des Terminus ist in der vorausgehenden Verwendungstradition der Philosophie zu suchen. Immerhin gibt ja Mac Lane einen solchen Bezug an, vgl. ⟨#20 S.73⟩. Die Konnotationen der Metapher wären dann die folgenden:

- Ein in bestimmten Aspekten gegebenes Objekt gehört einer bestimmten Kategorie an;

- Man kann Objekte allerdings als Objekte verschiedener Kategorien auffassen (indem man von bestimmten Aspekten absieht, andere hervorhebt); die Kategorientheorie erlaubt eine explizite, kontrollierte Transformation von Objekten im Sinne solchen "Auffassens";

- Man kann ein Objekt richtig oder falsch sehen (wenn man es nämlich als Objekt der "richtigen" Kategorie auffaßt); die Tradition spräche vom Kategorienfehler. Damit wird jedoch die Möglichkeit des verschiedenen Auffassens nicht obsolet, denn Kriterium der "Richtigkeit" ist hier nicht das Maß der Übereinstimmung mit irgendwelchen wesentlichen Eigenschaften des als anderweitig gegeben gedachten Objekts, sondern die unter den verschiedenen möglichen Aspekten verschieden große Manipulierbarkeit (vgl. 6.5 zu Longos Besprechung dieser Frage).

5.3.3.2 Standard- und Nonstandardkategorien

Man könnte sagen, das intendierte Modell des Begriffs ◁Kategorie▷ war zunächst das folgende: Die Objekte sind die verschiedenen Vertreter eines Strukturtyps, also insbesondere Mengen mit Struktur, die Pfeile sind diejenigen Abbildungen zwischen diesen Mengen, die diese Struktur erhalten. Auf diese Weise kann man jemandem, der mathematisch ausgebildet ist, die Intention des Konzepts kurz und bündig erklären; diese Erklärung kann "bei ihm festmachen". Voraussetzung dafür ist insbesondere, daß er eine Vorstellung davon hat, was man unter "Struktur" versteht. Dies liegt aber keineswegs auf der Hand; auf diese Frage werde ich in 6.2 zurückkommen. Einstweilen stellt man fest, daß Mathematiker den Terminus "Struktur" verwenden

---

[356] Eine solche Verwendungstradition *(informal parlance)* mag es in geringem Umfang schon gegeben haben: 2.4.3.2.

und daß sie bei einer vorliegenden Verwendung auch angeben könnten, ob sie eine sinnvolle ist oder nicht: es liegt ein Sprachspiel vor. Man hat sich im Zuge der mathematischen Ausbildung in der Verwendung des Terminus geübt.

Nun hat ◁Kategorie▷ Instanzen, bei denen die Regeln zur Verwendung des Terminus "strukturierte Mengen mit der Algebra der zugehörigen strukturerhaltenden Mengenabbildungen" verletzt zu sein scheinen — sei es weil in diesen Instanzen die Objekte nicht strukturierte *Mengen* und die Pfeile nicht *Abbildungen* zwischen solchen Mengen sind, oder weil die Objekte zwar mit formaler Gewalt als Mengen identifizierbar sind, der Terminus "Struktur" dann aber nicht mehr sinnvoll verwendbar ist. Ich werde gleich solche Instanzen anführen; die interessante Beobachtung ist, daß u.a. diese Instanzen den Erfolg der KT ermöglicht haben.

Ich spreche bei solchen Instanzen von ◁Kategorie▷ von Nonstandardkategorien, bei den übrigen von Standardkategorien[357]. Das Schema, unter das die Standardkategorien fallen, bezeichne ich kurz als das Standardschema. Ich weise ausdrücklich darauf hin, daß es hier nicht um mehr gehen soll als um eine Interpretation von ◁Kategorie▷, die mit gewissem Recht als Standardinterpretation betrachtet werden kann (z.B. wird sie wohl in didaktischen Situationen üblicherweise der Definition von ◁Kategorie▷ vorausgeschickt); insbesondere soll es nicht um Standard- und Nonstandard*modelle* einer *Theorie* im üblichen Sinn des Terminus (wo Nonstandardmodelle nichtisomorphe Modelle sind) gehen.

Das Bestehen des Prädikats "das und das ist eine Kategorie" hängt bei Standardkategorien nicht so sehr von der speziellen Art der Verknüpfung ab, denn diese erfüllt, aufgefaßt als Hintereinanderausführung der jeweilig unterliegenden Mengenfunktionen, sozusagen *a priori* die Kategoriebedingungen [Pumplün 1999]. Das Bestehen des Prädikats hängt vielmehr davon ab, ob die Verknüpfung mit der Struktur verträglich ist (ob also das Ergebnis einer Verknüpfung noch zur Klasse der *strukturerhaltenden* Abbildungen gehört, die aus der Klasse der Abbildungen insgesamt ausgezeichnet wird). Man hat es hier also gewissermaßen mit Unterkategorien von **Set** zu tun.

Demgegenüber gibt es auch eine ganze Reihe von (für die Anwendungen höchst bedeutsamen) Instanzen von ◁Kategorie▷, deren Bildungsschema[358] ein anderes ist. Hier eine Liste weiterer Schemata:

1) Der Übergang von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Das Schema liefert im Ergebnis zuweilen Kategorien, die nicht Instanzen des Standardschemas sind — selbst für manche Standardkategorien $\mathcal{C}$ (vgl. 3.1.5.2; die dortige Diskussion belegt bereits die methodische Bedeutung der Nonstandardkategorien).

2) Teilgeordnete Mengen etc. werden aufgefaßt als Kategorien mit höchstens einem Pfeil zwischen zwei Objekten; dieses Schema ist uns bereits in 2.4.4 begegnet ⟨#23 S.79⟩.

[357] Die Standardkategorien scheinen als so wichtig angesehen zu werden, daß sie neben der Definition das einzige sind, was [Meschkowski 1976, 137] unter dem Stichwort "Kategorie" erwähnt; ähnlich [Mittelstraß 1980] II 368. Die Standardisierung ist sogar in der Benennung "Morphismus" enthalten — weshalb ich zumeist dem Terminus "Pfeil" den Vorzug gebe.

[358] Mit "Bildung" ist hier nicht zwingend "Herstellung" gemeint; man stellt lediglich fest, daß die Instanzen im Ergebnis unter das Schema fallen, so "gebildet" sind.

3) Monoide etc. werden aufgefaßt als Kategorien mit genau einem Objekt ([Eilenberg und Mac Lane 1945, 256]; Anwendungen werden nicht angegeben. Gebrauch davon macht z.B. [Segal 1968]; vgl. 5.3.2.1).

4) Funktorkategorien (Funktoren werden ja gemeinhin nicht als “Mengen mit Struktur” aufgefaßt, und Transformationen nicht als Mengenabbildungen zwischen ihnen); Spezialfall: simpliziale Mengen etc.

5) Kategorien von Kettenkomplexen [Eilenberg und Mac Lane 1945, 284].

6) Kategorien, in denen die Objekte zwar strukturierte Mengen, die Mengen aber keine strukturverträglichen Abbildungen sind (sondern z.B. Äquivalenzklassen von solchen); hierunter fallen **Htop** [Eckmann und Hilton 1962, 227] sowie manche $\mathcal{C}^{op}$ zu Standardkategorien $\mathcal{C}$.

7) In tieferliegenden kategorientheoretischen Untersuchungen spielen endliche Kategorien, die einfach durch Aufzählen der Objekte, Pfeile und kommutativen Diagramme angegeben werden, eine Rolle: [Kan 1958a], [Lawvere 1966] (vgl. 8.1.1).

8) *slice categories* (vgl. 4.1.1.2) sind für die Anwendungen überaus wichtig. Beispiele dafür, die ich in der vorliegenden Arbeit bespreche, sind neben den S-Schemata die Räume über X (3.2.2.2).

9) Die Konstruktion der Lokalisierung einer Kategorie (im Zusammenhang der Konstruktion der derivierten Kategorie, vgl. Anm.288) ist angelehnt an die der dualen Kategorie.

Dies ist bei weitem keine vollständige Liste und natürlich auch keine strenge Klassifizierung, da die Schemata ja nicht disjunkt sind, wie z.T. schon *en passant* festgehalten. Auch die Grenze zwischen Standard und Nonstandard ist fließend: Die offenen Mengen eines topologischen Raumes fallen unter 2), können aber auch als Standardkategorie gesehen werden, bei der nur bestimmte Morphismen — Inklusionen — zugelassen sind (dies wird auch tatsächlich so gesehen, denn der Übergang zum Situs (4.1.2.2) ist vom Standardschema inspiriert: Lasse mehr Morphismen zu).

Die Rolle des Sprachspiels bei der Einschätzung, hier seien Instanzen nicht nach dem “üblichen” Schema gebildet, läßt sich gut am Fall 2) verdeutlichen. Die Elemente einer geordneten Menge lassen sich in der reduktionistischen Perspektive der Mengenlehre wieder als Mengen auffassen; ebenso ein geordnetes Paar (ein Pfeil in der von einer Menge herkommenden kleinen Kategorie) als Funktion (eine funktionale Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen). Aber: Solche Mengen fallen nicht unter das Sprachspiel <Menge mit Struktur + strukturerhaltende Abbildung>; sie sind im Sinne dieses Sprachspiels pathologisch (vgl. 1.1.2.1).

M.E. sind die Axiome von Eilenberg-Mac Lane bereits von vorneherein auf die Nonstandardkategorien vom Typ 2) hin angelegt. Ich bin dieser Überzeugung nicht, weil bei den Standardkategorien gewisse Axiome *a priori* erfüllt sind (s.o.) und insofern erst bei den Nonstandardkategorien überhaupt relevant werden. Hier könnte man einfach sagen: Eilenberg-Mac Lane wollten eben axiomatisieren; das macht man so[359]. Ich komme zu meiner Überzeugung vielmehr aus dem einfachen Grund, weil Eilenberg-Mac Lane die Nonstandardkategorie sogleich an entscheidender Stelle ihrer Untersuchung einsetzen — nämlich wo es um die intendierte *Anwendung* im Kontext des *universal coefficient theorem* geht. Es war ihnen daran gelegen, eine bestimmte Konstruktion (Limes) als Funktor auffassen zu können. Nicht ein intendierter *Begriffsinhalt* von ◁Kategorie▷ steht also hier im Vordergrund, sondern eine intendierte Anwendung.

Eine rationale Rekonstruktion der Entdeckung[360] der Nonstandardkategorie ◁Gerichtete Menge als Kategorie aufgefaßt▷ könnte also wie folgt aussehen: Eilenberg-Mac Lane hatten das Bedürfnis, die Konstruktion des direkten bzw. inversen Limes als Funktor aufzufassen (weil sie sich für die induzierten Homomorphismen zwischen solchen Limites interessierten). Daher war es notwendig, die Urbildkategorie dieses Funktors anzugeben: die Kategorie der direkten bzw. inversen Systeme. Dort war zu bestimmen, welches die Morphismen zwischen solchen Systemen sind. Da sich herausstellte, daß man (um der Funktorialität des Limes willen) solche Systeme von Homomorphismen als Pfeile nehmen sollte, die sich formal wie natürliche Transformationen verhalten, lag es nahe, die Kategorie direkter bzw. inverser Systeme als Funktorkategorie zu interpretieren. Es blieb hier allerdings anzugeben, zwischen welchen Kategorien die betreffenden Funktoren zu nehmen wären. Um zur Urbildkategorie dieser Funktoren zu gelangen, hatte man zu analysieren, wie der gesuchte Funktor aussehen muß, wenn man als Bildkategorie die Gruppen nimmt und noch die Bedingungen an ein direktes bzw. inverses System beachtet; man kam so zu dem Schluß, daß die Urbildkategorie eine gerichtete Menge ist, in der die Elemente die Objekte sind (denen jeweils eine Gruppe zugeordnet wird; die Menge indiziert ein System von Gruppen) und die Paare der Ordnungsrelation die Pfeile (denen ein Homomorphismus zwischen den zugehörigen Gruppen entspricht)[361].

[359]Man kann diese Beobachtung der Redundanz gewisser Axiome im Blick auf die Standardkategorien zum Anlaß für folgende Unterscheidung nehmen:

- "Gefährliche" Nonstandardkategorien könnte man dann antreffen, wenn man die fraglichen Axiome wegläßt und somit die Tür für Modelle öffnet, in denen sie nicht erfüllt sind.
- "Kontrollierte" Nonstandardkategorien erhält man, indem man die vermeintlich auf der Hand liegende Eigenschaft bewußt unter die Axiome aufnimmt.

[360]Zwar ist der Mathematiker kein Entdecker, sondern ein Erfinder (Wittgenstein); gleichwohl kann beim Erproben formal definierter Begriffe (das ja ein Ermitteln ihrer Extension ist) "gefunden" werden, daß dies oder jenes eine Instanz des Begriffs ist (unter ihn fällt, seiner Extension zugehört).

[361]Diese Rekonstruktion ist in manchen Punkten fraglich:

- die Funktorialität der Limeskonstruktion war bei Eilenberg-Mac Lane zunächst eigentlich nur in einem Spezialfall von Interesse;
- es wird so hingestellt, als habe man zuerst bemerkt, daß Funktoren zwischen gegebenen Kategorien eine Kategorie bilden, deren Pfeile die natürlichen Transformationen sind, und habe dann ausgehend von dieser Feststellung in Analogiebildung die Kategorie direkter bzw. inverser Systeme als Funktorkategorie interpretiert. Es kann aber historisch ebensogut (oder sogar: eher) so gewesen sein, daß man zu den allgemeinen Begriffen natürliche Transforma-

Nonstandardkategorien sind ein weiterer Beleg dafür, daß die *Sätze* über die alten Objekte die eigentlichen neuen Objekte sind; ginge es nur um Standardkategorien, hätte man es einfach mit Abstraktionen aus den alten Objekten zu tun. Man könnte vermuten, die Entdeckung der Nonstandardkategorien und der durch sie eröffneten manipulatorischen Möglichkeiten sei historisch der Auslöser gewesen, von der Vorstellung, strukturmathematische Objekte müßten zwingend eine unterliegende Menge haben, abzukommen. Doch dies ist wahrscheinlich nicht der Fall: für diese Abkehr verantwortlich waren die Kategorien, deren Objekte keine Elemente *im Sinne der KT* haben (5.3.1.2), bei denen die Isomorphismen nicht die mengentheoretischen Bijektionen sind (5.3.1.5), deren Produkte nicht Produkte i.S. der Mengentheorie sind (4.1.1) etc. — und solche Phänomene treten, wie wir gesehen haben, bei Standard- und Nonstandardkategorien gleichermaßen auf.

5.3.3.3 KT-Identifikationskriterium für Kategorien: Äquivalenz

Der historische Ursprung des Begriffs Äquivalenz von Kategorien scheint bei [Grothendieck 1957, 125] zu liegen[362] (vgl. 3.3.4.3). Marquis hält dies für eine erstaunlich späte Untersuchung dieses wichtigen Begriffs.; ich teile diese Auffassung nicht, denn die Thematisierung des Identifikationskriteriums für Kategorien gehört historisch in die Phase, in der man begann, Konstruktionen auf Kategorien selbst vorzunehmen (also in die Tohoku-Phase).

Entsprechend ist bei [Eilenberg und Mac Lane 1945] nicht von der Äquivalenz von Kategorien die Rede. Zwar gibt es S.292ff einen Appendix, der das Ziel hat *"to show that every category is isomorphic with a suitable subcategory of the category of sets"*; hierbei wird aber an keiner Stelle gesagt, was mit *isomorphic* eigentlich gemeint sein soll; was sie zeigen, ist, daß es *faithful representations (functors with values in [***Set***])* gibt; dann heißt es *"it is clear that a faithful representation is nothing but an isomorphic mapping of [the given category] onto some subcategory of [***Set***]"*. *"Mapping"* ist zwar an und für sich ihr primitiver Begriff für Pfeil (Morphismus), aber anstelle des Terminus *isomorphism* wird ja *equivalence* für diejenigen Pfeile benutzt, die man heute Isomorphismen nennt (vgl. Anm.343), und von **Cat** sprechen sie schon

tion, Funktor und Funktorkategorie erst ausgehend von dieser speziellen Beispielsituation (und anderen) gelangt ist;

- durch die skizzierte Konstruktion wird die jeweilige gerichtete Menge ein für alle mal festgelegt. Dies mag in der speziellen historischen Situation (Čech-Theorie) auch naheliegen, da man sich eben mit der gerichteten Menge *aller* Überdeckungen (nach Verfeinerung teilgeordnet) befaßt; gleichwohl scheint es eine im allgemeinen unnötige Einschränkung. Warum sollte man nicht Limites bezüglich verschiedener Indexmengen vergleichen wollen?

[362] *equivalence* war bei [Eilenberg und Mac Lane 1945, 238], [Mac Lane 1950], [Buchsbaum 1955], [Mac Lane 1961] und [Spanier 1966] die Bezeichnung für einen speziellen Typ von Pfeil (heutige Sprache: ein Isomorphismus, vgl. Anm.343). Bei [Grothendieck 1957, 123] steht versehentlich auch einmal *équivalence*, wo *isomorphisme* stehen sollte; trotzdem hat Grothendiecks Verwendung des Terminus "Äquivalenz" für das Identifikationskriterium von Kategorien die offenbar schon ganz gut etablierte abweichende Verwendungstradition in der angelsächsischen *community* verdrängen können.

gleich gar nicht. Der Beweis verwendet eine mengentheoretische Voraussetzung an die gegebene Kategorie, nämlich daß alle Pfeile, die bei einem Objekt ankommen, eine Menge bilden; die Konstruktionen sind in Analogie zu den *"left and right regular representations"* der Gruppentheorie entworfen.

Eine frühe Annäherung an den Begriff findet sich dann bei [Serre 1956, 2]: *"faisceaux algébriques cohérents et faisceaux analytiques cohérents se correspondent biunivoquement, et [...] la correspondance entre ces deux catégories de faisceaux laisse invariants les groupes de cohomologie"*. Der Terminus Kategorie wird hier zwar nur informal benutzt; allerdings beinhalten die Sätze, daß die Kategorien im technischen Sinn äquivalent sind. Grothendieck war zweifellos bei seiner Einführung des Begriffs der Äquivalenz von diesem Ergebnis Serres beeinflußt; sein generelles Ziel war es, Analogien zu vervollständigen, was ihm stets dadurch gelang, daß er von zwei gegebenen Kategorien mindestens eine so umformte, daß die beiden Kategorien äquivalent werden (eventuell nach Dualisierung; vgl. 4.3).

In manchen Lehrbüchern [Gelfand und Manin 1996, Pumplün 1999] wird der Eindruck erweckt, man habe den Begriff der Äquivalenz entwickelt, weil man bemerkt habe, daß der zunächst näherliegende Begriff der Isomorphie von Kategorien nutzlos ist. Ich bin nicht sicher, ob eine solche (didaktisch sicher gerechtfertigte) Begriffsentwicklung historisch tatsächlich stattgefunden hat. Zwar deutet bereits Grothendieck den Unterschied zwischen Äquivalenz und Isomorphie an[363]. Allerdings sagt er zum fehlenden Nutzen des letzteren Begriffs *"Aucune des équivalences de catégories qu'on rencontre en pratique n'est un isomorphisme"*; insofern ist denkbar, daß man gar nicht von dem Gedanken ausging, Isomorphie sei das gegebene Identifikationskriterium für Kategorien, sondern erst aus Rücksichten auf die "systematische Präsentation" auf den Gedanken kam, die Obsoletheit der Isomorphie zu unterstreichen.

Die solchen Rücksichten zugrundeliegende Systematik wäre die, **Cat** selbst unter die Kategorien einzureihen, so daß man also auch erwarten sollte, daß für die Objekte dieser Kategorie das übliche Identifikationskriterium gilt, nämlich die Isomorphie. Später hat man dann allerdings bemerkt, daß eine solche Systematik an der Sache vorbeigeht, was Manin und Marquis so zusammengefaßt haben: Da das gegebene Identifikationskriterium in **Cat** die Äquivalenz ist und *nicht* die Isomorphie, ist **Cat** auch keine Kategorie (sondern eine andere Art von Struktur, eine 2-Kategorie).

Äquivalenz als Identifikationskriterium zeigt die Irrelevanz mengentheoretischer Realisierungen der entsprechenden Kategorien auf[364]: Zu irgendeiner Menge G kann man eine Kategorie $\overline{G}$ mit $\mathrm{Ob}(\overline{G}) = G, \mathrm{Mor}(\overline{G}) = G \times G$ (d.h. zu jedem Paar

[363] Die mathematisch exakte Aufklärung des Verhältnisses der beiden Begriffe findet sich bei [Gabriel 1962]: Äquivalenz ist Isomorphie zwischen denjenigen Kategorien, die man aus den gegebenen erhält, wenn man die Klassen isomorpher Objekte zu den neuen Objekten macht. Dies greift auch Manin auf (s.o.). Es besteht also ein Zusammenhang zwischen diesem Verhältnis einerseits und der Aufgabe des Übergangs zu Isomorphieklassen im allgemeinen, wie dargestellt in 5.3.1.5, andererseits.

[364] Man erinnere sich an Manins Kritik am *"naive view that categories "are" special structured sets"*: *"In fact, if it is natural to identify categories related by an equivalence (not necessarily bijective on objects) [...], then this view becomes utterly misleading"*.

von Elementen aus G gibt es genau einen Pfeil) betrachten. Und diese Kategorie ist äquivalent zu der Kategorie mit genau einem Objekt und genau einem Pfeil [Segal 1968, 107]! Dies scheint den Begriff der Kardinalität in stärkerem Maße zu relativieren, als dies in der Mengenlehre selbst durch Skolems Resultate geschieht.

Teil II

Diskussionen über Kategorientheorie

Kapitel 6

Bourbaki und die Kategorientheorie

Es geht in diesem Kapitel um die Frage, wieso es nie zu einer Aufnahme der KT in das Bourbaki-Projekt kam[365].

6.1 Die Funktionsweise von Bourbaki

Die Funktionsweise von Bourbaki kann man aus Quellen erschließen, die die Arbeit der Gruppe dokumentieren; ein Großteil dieser Quellen wird in Archiven aufbewahrt (vgl. den Anhang). Da diese Quellen, die ganz überwiegend nicht für sich selbst stehen, sondern vorläufige Versionen eines späterhin veröffentlichten Textes darstellen bzw. die Arbeit an einem solchen dokumentieren, mag es erstaunen, daß sie aufbewahrt wurden; es war allerdings für das Funktionieren des gleich noch zu schildernden Verfahrens unabdingbar, einen Überblick über bereits Geschriebenes zu behalten. Für die historische Forschung sind diese Quellen jedenfalls ein großer Gewinn (vgl. 0.2.1): die Entstehungsgeschichte des fertigen Werks liegt gewissermaßen ausgebreitet vor und kann leicht untersucht werden. Die Schwierigkeiten historischer Forschung verlagern sich darauf, daß zum einen nur ein (großer) Teil der Quellen zur Verfügung steht und zum anderen der Kontext der einzelnen Quellen jeweils noch aufgesucht werden muß; man hat es gewissermaßen mit einem Puzzlespiel zu tun.

Die *Éléments de Mathématique* bestehen aus (vom Pseudonym Nicolas Bourbaki abgesehen) anonymen Texten. Diese Texte sind die Gemeinschaftsproduktion der Mitglieder der Gruppe. Sie entstanden in der Regel nach folgendem Schema:

Zunächst beschloß die Gruppe, zu welchem Thema ein Text entstehen soll. Es wurde dann jemand aus ihrer Mitte beauftragt, einen *rapport* zu diesem Thema aufzusetzen, also einen Text, in dem die wesentlichen Resultate und Methoden des zu behandelnden Themas gesammelt werden. Auf der Grundlage dieses *rapport* beschloß dann die Gruppe eine Gliederung des Themas; nun wurde jemand beauftragt, entlang dieser Gliederung einen Entwurf (eine *rédaction*) für ein Kapitel zum Thema zu schreiben. Sobald diese *rédaction* vorlag, diskutierte die Gruppe dieselbe, formu-

[365]Zur Legitimation dieser Untersuchung vgl. Abschnitt 0.2.1.

lierte Änderungswünsche und beauftragte jemand anderen[366] mit einer neuen, auf der alten aufbauenden *rédaction*, die diese Wünsche berücksichtigt. Dies konnte sich mehrfach wiederholen; häufig wird angegeben, welches Stadium (*état*) eines Textes in einer speziellen *rédaction* vorliegt. Irgendwann hatte eine *rédaction* eine solche Qualität erreicht, daß die Gruppe nur noch marginale Änderungswünsche anmeldete; diese wurden dann demjenigen, der mit der Endredaktion — der Vorbereitung der Druckvorlage — beauftragt war[367], anheimgestellt (die Gruppe nahm keinen Einfluß mehr auf diese Endredaktion).

Zur Durchführung der in diesem Verfahren erforderlichen Diskussionen traf sich die Gruppe mehrmals im Jahr (in der Regel dreimal) zu mehrtägigen Kongressen (daraus ergibt sich für das oben skizzierte Verfahren eine eventuell mehrjährige Dauer[368]). Diesen Zusammenkünften lagen die zu diskutierenden *rapports* und *rédactions* in Abzügen vor (sie wurden vermutlich in der Regel bereits vor Kongreßbeginn an die Teilnehmer versandt). Die Beschlüsse eines jeden Kongresses wurden protokolliert und als *La Tribu* nach Ende der Kongresse an die Teilnehmer versandt[369]. Die Protokolle umfassen in der Regel:

- Anwesenheitsliste;
- Anekdotisches zum Kongreßablauf;
- Festlegung der nächsten Kongreßdaten, -orte und -organisatoren;
- *engagements du Congrès*: hier wurde zusammengestellt, zur Verfassung welcher Texte sich die einzelnen Mitglieder verpflichtet haben, und bis zu welchem Zeitpunkt (meist zum nächsten Kongreß) sie ihre Texte jeweils fertigstellen wollen;
- *état des rédactions*: hier wurde aufgelistet, welche Kapitel und Abschnitte in welchem *état* vorlagen;

[366] Chevalley teilt dazu mit: *"It was always someone else who was charged with the next draft"* [Guedj 1985, 20].

[367] Dies war häufig Dieudonné; Cartier sagt: *"when Dieudonné was the scribe of Bourbaki, for many, many years, every printed word came from his pen"* [Senechal 1998, 28].

[368] Wie wir noch sehen werden, beschränkte sich Bourbaki keineswegs auf das Entwerfen von Texten zu bereits fertig dastehenden, etablierten Themen; auch aktuelle Entwicklungen — insbesondere jüngste Arbeiten der Mitglieder — wurden in Betracht gezogen. So hatte es wohl auch mit der Langwierigkeit des Verfahrens zu tun, daß solche Texte von aktueller Relevanz zunächst als *rédactions Bourbaki* präsentiert, dann aber von ihren Verfassern schließlich doch separat veröffentlicht wurden. Beispiele in unserem Zusammenhang sind Samuels Arbeit [1948] (6.3.2.1), Grothendiecks Tohoku-Arbeit (3.3.1.1) und Godements Buch [1958] (6.3.3.3); in den beiden letzten Fällen spielt natürlich auch die Problematik hinein, daß Bourbaki sich letztlich nicht auf einen Umgang mit Kategorien verständigen konnte.

[369] Bourbaki hat die verschiedenen Bände von *La Tribu* durchnumeriert; auf diese Numerierung nehme ich Bezug. Ich schreibe auch abkürzend "Kongreß *X*" für "zu *Tribu X* gehörender Kongreß". Wann und wo diese Kongresse im einzelnen stattgefunden haben, liste ich in Anhang A.2.1 auf. Wo der Nachvollzug einer Argumentation, die Datierung oder chronologische Aspekte betrifft, durch ständiges Nachschlagen in diesem Anhang erschwert werden würde, setze ich ein Datum hinzu, meistens in einer Kurzform, in der z.B. (1951.2) den zweiten Kongreß von 1951 bezeichnet.

- *plan général*: gelegentlich wurde über die Anlage des Gesamtwerks diskutiert; beispielsweise wurden neue Kapitel vorgeschlagen oder die Aufteilung der bereits geplanten Kapitel geändert;

- *décisions*: hier wurden die Ergebnisse aus der Lektüre und Diskussion der einzelnen *rédactions* festgehalten, je nach Umfang innerhalb des Textes der *Tribu* oder als Anlage zu dieser.

Die Schreib-, Vervielfältigungs- und Versandarbeiten übernahm ein Sekretariat, das zunächst in Nancy bei Delsarte angesiedelt war. In Nancy entstand auch ein Archiv, in dem die verschiedenen *rédactions* und *Tribu*-Hefte aufbewahrt wurden; dieses Archiv ging in Delsartes Nachlaß über und befindet sich noch heute in Nancy, vgl. Anhang A.1.1.

Sowohl die *rédactions* als auch die Beiträge in *La Tribu* sind ganz überwiegend anonym. Rückschlüsse auf die Verfasser sind über die *engagements du Congrès* möglich sowie über verstreute Andeutungen in den Texten selbst oder in solchen, die auf sie Bezug nehmen. Bourbaki hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt selbst das Bedürfnis nach einer gewissen Orientierung und führte eine Numerierung der *rédactions* ein (vgl. A.1.2); von diesem Zeitpunkt an wurden die *rédactions* unter Bezugnahme auf ihre jeweilige Nummer diskutiert. Ich verwende in der ganzen Arbeit die abkürzende Schreibweise $n°X$ für das Bourbaki-Manuskript mit der Nummer X; wo diese Manuskripte heute im Einzelfall zu finden sind, liste ich im Anhang A.1.3 auf.

6.2 Bourbakis Philosophie der Mathematik

Vor der Beschäftigung mit der Diskussion bei Bourbaki empfiehlt es sich, daran zu erinnern, von welchen Grundgedanken über Mathematik Bourbaki bewegt war. Die philosophische Position Bourbakis ist vor allem in verschiedenen Vorträgen niedergelegt. Der Vortrag *"Foundations of Mathematics for the Working Mathematician"* [Bourbaki 1949] wurde von André Weil gehalten[370]; in diesem Vortrag wird ein mengenheoretisches Axiomensystem ähnlich zu ZFC aufgestellt. Einen weiteren Vortrag mit dem Titel *"L'Architecture de la mathématique"* hielt Dieudonné [Bourbaki 1974].

6.2.1 Strukturalistische Ontologie

Im Strukturalismus wird die Mathematik als eine Wissenschaft von Strukturen wahrgenommen. Als Strukturalismus bezeichne ich also i.d.v.A. die philosophische Position, die in den Strukturen den Gegenstand der Mathematik sieht — nicht den methodischen Ansatz, der in einer gegebenen Problemstellung "nach der Struktur

[370]dies jedenfalls teilt Mac Lane mit; [1988a, 345]. Der Titel des Vortrags macht unmißverständlich klar, daß es um Grundlagen für den arbeitenden Mathematiker geht. Damit sind in unserer Terminologie mathematische Grundlagen gemeint (nicht philosophische); insbesondere soll es nicht darum gehen, die praktizierte Mathematik einer metamathematischen Analyse zugänglich zu machen (das ist ja nicht das, was der arbeitende Mathematiker tun will). Es geht also um Entwicklung des Wissens, die von seiner Begründung getrennt ist.

sucht" (was die Wortbedeutung von "Strukturalismus" in den Humanwissenschaften zu sein scheint); diesen methodischen Ansatz in der Mathematik bezeichne ich als Strukturmathematik. Strukturalismus ist also die Behauptung, Mathematik sei im wesentlichen Strukturmathematik. Dies ist, in Corrys Worten, Bourbakis *image of mathematics*. Es ist fraglich, ob hier bereits von einer erkenntnistheoretischen Position gesprochen werden kann — immerhin bleibt der Terminus Struktur zunächst unexpliziert; der Strukturalismus macht also eine *unvollständige* Aussage darüber, was der Gegenstand mathematischer Erkenntnis ist. Entsprechend unternimmt Bourbaki einen Explikationsversuch des Begriffs "Struktur" (6.2.2).

Nach außen behauptet Bourbaki, die Sichtweise der strukturalistischen Ontologie erlaube es, bestimmte Probleme der mengentheoretischen Ontologie zu umgehen:

> Wir nehmen hier einen naiven Standpunkt ein und befassen uns nicht mit den dornigen, halb philosophischen, halb mathematischen Fragen, die durch das Problem der 'Natur' der mathematischen 'Wesen' oder 'Gegenstände' aufgeworfen werden [...]. Der Begriff der Menge, der lange Zeit als undefinierbar galt, ist der Gegenstand endloser Auseinandersetzungen gewesen, infolge seines außerordentlich allgemeinen Charakters [...]. Die Schwierigkeiten verschwanden erst, als im Licht der jüngsten Arbeiten über logischen Formalismus der Mengenbegriff selbst verschwand und mit ihm auch alle metaphysischen Pseudoprobleme bezüglich mathematischer 'Wesen' untergingen. *Nach diesem Standpunkt sind mathematische Strukturen eigentlich die einzigen 'Gegenstände' der Mathematik.* Der Leser findet weitere Ausführungen zu diesem Punkt bei [[Dieudonné 1939]] und [[Cartan 1943]]. [Bourbaki 1974, 148 Anm.1].

Wir werden allerdings gleich sehen, daß von einem Verschwinden des Mengenbegriffs in Bourbakis Definition des Begriffs "Struktur" keine Rede sein kann[371]. Möglicherweise unterscheidet Bourbaki latent zwischen *mathematischen* Grundlagen (mengentheoretischer Art) und *philosophischen* (Strukturalismus); daß die mathematischen Grundlagen die Mengenlehre nötig haben, wäre dann eine Anerkennung von Quines Position, wonach man über Struktur wie über alles andere auch nur in Extension sprechen kann.

Was die zitierten Texte betrifft, in denen *"der Leser [...] weitere Ausführungen zu diesem Punkt [findet]"*, so bespricht [Volkert 1986, 278ff] ausführlich den Text [Cartan 1943] im Kontext eines Vergleichs von Bourbakis Strukturalismus mit Formalismus und Logizismus (Volkert zeigt insbesondere die Differenzen dieser Positionen auf); insofern halte ich eine eigene Untersuchung dieser Fragen nicht für erforderlich.

6.2.2 Der Terminus "Struktur" und Bourbakis Versuch einer Explikation

◁Struktur▷ bleibt in der Rede des Mathematikers eigentlich verschwommen. Diese Verschwommenheit des Begriffs drückt sich darin aus, daß es schwierig ist, ihn

[371] Wang bezeichnet diese Inkonsequenz Bourbakis als *"basic inconsistency"* ⟨#75 S.238⟩.

in allen Facetten seiner Verwendung zu definieren (d.i. abzugrenzen). Wittgenstein würde davon sprechen, zwischen den einzelnen Vertretern bestehe eine Familienähnlichkeit[372]; es wird ein Sprachspiel gespielt. Gleichwohl nimmt der Begriff im Denken vieler Mathematiker der in Rede stehenden Epoche einen illustren Platz ein. Besonders weit geht der Einfluß dieses Begriffs in Bourbakis Auffassung von Mathematik[373], weshalb die Gruppe sich wohl auch an die Aufgabe gewagt hat, den Begriff mathematisch zu definieren[374].

Eine solche explizite mathematische Definition von "Struktur" gibt Bourbaki in E IV[375] an. Zunächst wird eine Menge aus einfacheren Mengen durch geeignete Schachtelung von Potenzmengen- und Produktbildung hergestellt *(« échelle »)*; dann werden diejenigen Elemente der so entstandenen Menge T ausgezeichnet, die bestimmte Eigenschaften haben. Jedes solche Element ist dann ein Vertreter eines bestimmten Strukturtyps auf den Basismengen. Denn die Elemente von T sind gerade diejenigen Teilmengen der in der *échelle* erhaltenen Mengen, für die bestimmte Formeln gelten. Geht es z.B. um eine bestimmte algebraische Verknüpfung, die bestimmten Regeln folgend Elemente einer Menge M_1 mit solchen einer Menge M_2 verbindet, indem sie sie auf Elemente einer Menge M_3 abbildet, so findet das angegebene Verfahren diejenigen Teilmengen von $(M_1 \times M_2) \times M_3$, für deren sämtliche Elemente die jeweiligen Regeln gelten.

Dieses Verfahren wird in E IV allgemein beschrieben; um in völliger Allgemeinheit alle Vertreter von ◁Struktur▷ abzudecken, die Bourbaki als solche abgedeckt wissen möchte, ist eine sehr viel detailliertere Schilderung der Bildungsprozesse notwendig. Nicht nur muß die Anzahl der beteiligten Basismengen und die Stelligkeit der Relationen völlig beliebig gehalten werden, es bedarf auch einer völlig allgemeinen Beschreibung dessen, was man unter einem *« schéma explicite »* zur Herstellung der Mengen der *« échelle »* verstehen will. Dies wird in E IV tatsächlich erreicht — eine für sich genommen beachtliche mathematische Leistung; dies macht dann auch die "Unlesbarkeit" von E IV aus.

Man hat es hier zu tun mit einer Zusammenstellung *aller möglichen Arten, auf die man eine gegebene Menge mit einer bestimmten Struktur versehen kann*. Strukturen werden hier also nur in Verbindung mit unterliegenden Mengen erfaßt[376]; unklar

[372][Wittgenstein 1984c] §67ff; vgl. auch 1.1.2.1.

[373]Zu Bourbakis Adoption des Terminus vgl. [Houzel 2002a].

[374]An manchen Stellen der vorliegenden Arbeit benötige ich selbst eine Definition des Terminus "Struktur"; ich verwende eine solche in Anlehnung an Ferdinand de Saussure (1857-1913), der als der Begründer des *linguistischen* Strukturalismus gilt. Laut dem Saussure-Artikel von [Lutz 1995, 782] ging es Saussure um Sprache als Zeichensystem, wobei die *"genaueste Eigenschaft [eines Zeichens darin] liegt [. . .], etwas zu sein, was die anderen [Zeichen darin] nicht sind"*. Ein solches Zeichensystem, so der Artikel weiter, bezeichnete man von den zwanziger Jahren an als "Struktur" (demnach hat Saussure selbst gar nicht von "Struktur" gesprochen).

[375]Ich übernehme Bourbakis eigene Abkürzungstechnik: E IV bezeichnet *Théorie des Ensembles, Chapitre IV*. Die Entstehungsgeschichte dieses Textes läßt sich aus den Bourbaki-Quellen rekonstruieren, ist aber kompliziert und hier nur in Teilen wichtig (vgl. 6.3); ich beabsichtige, dazu zu einem späteren Zeitpunkt eine Veröffentlichung vorzulegen.

[376]Genauer treten in der *espèce de structure* anstelle der Basismengen der Konstruktion Variablen $x_1, \ldots, x_n$ der zugrundeliegenden formalen Mengenlehre auf, die erst beim Übergang zur *structure*

bleibt, wieso hier eigentlich der Anspruch erhoben wird, ◁Struktur▷ expliziert zu haben[377]. Explizit wird die Situation charakterisiert, daß eine *Menge* mit einer Struktur versehen ist, beginnend mit der Codierung der Abfolge von Operationsschritten, durch die die auf der Menge ausgezeichnete Struktur mengentheoretisch hergestellt wird[378]. Die Aufgabe des Explikationsversuchs scheint denn auch von daher zu verstehen zu sein, daß Bourbaki in den Strukturen die Gegenstände der Mathematik sieht; das "Versehen einer Menge mit Struktur" dient dann der Einbettung dieser Gegenstände in die mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik (die Bourbaki als mathematische Grundlagen beibehält, ohne ihnen als philosophische Grundlagen Bedeutung zuzumessen, s.o.).

Durch Bourbakis Definitionsversuch wurde dem Begriff seine Verschwommenheit genommen. Nimmt man Wittgenstein ernst, kann man also hier höchstens von einem Teilerfolg sprechen (da die Verschwommenheit dem Explikandum ja wesentlich war und nun verloren ist). Anders gesagt: man wird, wenn überhaupt, nur dann erwarten können, mit diesem Begriff etwas nützliches anfangen zu können, wenn man die informellen Regeln, die Regeln der *sinnvollen* Verwendung des Terminus "Struktur" (wie sie sich unter Mathematikern eingebürgert hat), mitberücksichtigt.

Zusammengefaßt: Bourbaki nimmt eine reduktionistische Perspektive ein. Die bei Bourbaki zentrale Operation ist die des Versehens einer Menge mit einer Struktur; die unstrukturierten Mengen werden in der Behandlung der Strukturen als das Rohmaterial freigelegt, das Allgemeinste, das man in einem Neuaufbau der Mathematik sukzessive mit immer spezielleren und reicheren Strukturen versehen kann. Hierbei sind die verschiedenen klassischen Zahlensysteme (die historischen Vorläufer der Mengen als Grundobjekte) als schon sehr spezielle Strukturen aufzufassen. Denn es handelt sich um "Kreuzungspunkte" der verschiedenen Strukturtypen[379]: $\mathbb{R}$ ist *der* archimedische geordnete vollständige Körper etc. (E IV.7).

Bourbaki geht also davon aus, daß man alle mathematischen Objekte letztlich als Objekte einer bestimmten Form sehen kann, nämlich als Mengen, auf denen eine bestimmte Struktur vorhanden ist, oder als Elemente solcher Mengen. Hierbei bestimmt Bourbaki die verschiedenen Möglichkeiten des Vorhandenseins einer Struktur eines vorgegebenen Typs auf gegebenen (Grund-)Mengen als die Elemente einer speziellen Menge, die man mit bestimmten Mengenoperationen aus den jeweiligen Grundmengen konstruiert.

---

interpretiert werden durch Terme $E_1, \ldots, E_n$ (E IV.4). Dies ändert aber nichts daran, daß sich die Struktur grundsätzlich auf eine unterliegende Menge bezieht.

[377] Ich übergehe hier die Untersuchung der systematischen und historischen Einordnung von Bourbakis Theorie der *structures* in die Explikationen von ◁Struktur▷ in der mathematischen Logik. Solche Explikationsversuche finden sich etwa bei [Bridge 1977, 6f] (vgl. auch S.16) oder bei [Thiel 1995, 261ff]. Systematisch scheint mir Bourbakis Explikation von ◁Struktur▷ mit solchen Explikationen auf einer Stufe zu stehen — nicht mit der KT.

[378] Es ist allerdings hervorzuheben, daß es Bourbaki auf *Transportabilität* ankommt als etwas, was Struktur charakterisiert; dies weist in die Richtung der kategorientheoretischen Sichtweise, wonach es auf die Strukturtransporte ankommt (6.5). Dies steht aber nicht im Widerspruch zu meiner Behauptung, es gehe Bourbaki stets darum, eine Menge mit einer Struktur zu versehen — eventuell mit einer von woanders her transportierten Struktur.

[379] Vgl. Thiels Bezugnahme auf diesen Gedanken Bourbakis, wie besprochen bei 1.2.3.1.

6.2.3 Die hypothetisch-deduktive Doktrin

Beruht nach Bourbaki die Mathematik also auf den Mengen, hat man sich mit der Frage der Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Mengenlehre auseinanderzusetzen. Als Reaktion auf die Unmöglichkeit des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die Mengenlehre[380] entwickelte Bourbaki die *hypothetisch-deduktive* Position[381]: bei fehlendem Widerspruchsfreiheitsbeweis gilt ein System als "sicher", das mannigfach erprobt ist; bei Problemen bemüht man sich um *ad hoc*-Lösungen. Bourbaki legt diese Position nieder in der Einleitung zur *Théorie des ensembles* (S.9); eine andere Stelle, wo das Thema implizit angesprochen wird, ist die folgende:

> Absence of contradiction, in mathematics as a whole or in any given branch of it, [...] appears as an empirical fact, rather than as a metaphysical principle. The more a given branch has been developed, the less likely it becomes that contradictions may be met with in its further development. [Bourbaki 1949, 3].

Diese Position hat großen Einfluß ausgeübt; beispielsweise haben relative Konsistenzbeweise (also Beweise, daß die jeweils untersuchten Annahmen konsistent mit ZF sind) einige Bedeutung erlangt[382].

[380]Wie Gödel in [1931] gezeigt hat, kann über die Konsistenz von ZF nicht innerhalb von ZF entschieden werden. Es könnte insbesondere sein, daß ZF inkonsistent ist; dies könnte jedoch nur so gezeigt werden, daß eines Tages einmal ein Widerspruch entdeckt wird (vgl. z.B. [Ebbinghaus et al. 1992, 216 Satz 7.11]); dies ist bekanntlich bisher nicht geschehen.

[381]Der frühe Hilbert wollte die idealen Elemente der Mathematik (die fraglich sind, über das inhaltliche hinausgehen) mit einer inhaltlichen (zunächst glaubte er: finiten) Beweistheorie als widerspruchslos erweisen *(reductive proof theory)*. Gödel stellte heraus, daß finit nicht genügt. Bourbakis Reaktion darauf scheint gewesen zu sein, ein hypothetisch-deduktives System aufzustellen und bei Widersprüchen *ad-hoc*-Lösungen anstelle prinzipieller Lösungen (wie es z.B. Konstruktivismus und Prädikativismus wären) zu suchen. Gentzen schlug statt dessen vor, nicht auf Widerspruchsfreiheitsbeweise zu verzichten, sondern vielmehr den Hilbertschen Begriff von "inhaltlich" zu erweitern: Induktion bis ϵ_0 für die elementare Arithmetik, bis Γ_0 für die reelle Analysis (Feferman). Gegenüber dem Ansatz des frühen Hilbert einer fundamentalen Beweistheorie (Suche nach Widerspruchsfreiheitsbeweis) hat man es also hier mit einer *general proof theory* zu tun: "Was braucht man minimal für einen Widerspruchsfreiheitsbeweis?"; "später Hilbert".

[382]Bénabou zählt unter seinen Bedingungen an eine Grundlegung der KT (vgl. 7.4.4) relative Konsistenz auf und hält insbesondere ZF für eine "sichere" Theorie:

> "foundations"[...] for category theory [should be] consistent, or at least relatively consistent with a well-established and 'safe' theory, e.g. [...] ZF [Bénabou 1985, 10].

Für die verbreitetste mengentheoretische Grundlegung der KT, die Annahme eines Universenaxioms, ist kein Beweis relativer Konsistenz möglich (7.3.2.2); dies interpretiere ich in 6.4.5 als Grund für Bourbakis Ablehnung dieses Verfahrens. Reflektionsprinzipien (7.4.3) liefern den Beweis relativer Konsistenz mit (in Form eines Metatheorems dahingehend, daß bestimmte Erweiterungen des Sprachrahmens konservativ sind); dies mag aus der Sicht der Logiker der entscheidende Vorteil dieses Verfahrens sein. [Sonner 1962, 163] und Ehresmann (vgl. 7.4.2) nehmen, im Einklang mit Bourbaki, im Falle eines auftretenden Widerspruchs *ad hoc*-Lösungen in Kauf.

6.2.4 Überprüfung der strukturalistischen Sicht der Mathematik

Corry hat herausgestellt, daß Bourbakis Versuch einer Übertragung des *structural image of mathematics* in den *body* artifiziell war [1996]. Man ist aber außerdem noch mit der weitreichenderen Frage konfrontiert, ob das *structural image of mathematics* die Mathematik überhaupt zutreffend beschreibt. Diese Frage kann natürlich nicht aus dem Stand beantwortet werden (insbesondere nicht ohne eine Definition von "Struktur"...); die zugehörige Diskussion muß uns hier aber zumindest am Rande interessieren, da ja auch die KT in Verbindung mit einem solchen *structural image* entwickelt wurde[383].

Eine der möglichen Antworten auf die Frage *"What is mathematics"*, die [Wang 1971] zur Diskussion stellt (vgl. auch 1.4.3), ist die folgende:

> #73 Mathematics is the study of abstract structures. This appears to be the view of Bourbaki. [...] A conscious attempt to divorce mathematics from applications is not altogether healthy. The inadequacy of this outlook is revealed not only by the
> #74 omission of various central results of a more combinatorial sort, but especially by the lack of intrinsic justification in the selection of structures which happen to be important for reasons quite external to this approach. [...] There is also a basic inconsistency insofar lipservice is paid to an axiomatic set theory as the foundations,
> #75 while serious foundational researches are frowned upon. It would conform more to the general spirit if number, set, function were treated in a more intuitive manner. That would at least be more faithful to the actual practice of working mathematicians today. [Wang 1971, 49]

An Wangs Stellungnahme ist offenbar entscheidend, daß eine solche strukturalistische Ontologie nicht in der Lage ist, dem Philosophen bei seiner Aufgabe zu helfen (nämlich die Kriterien aufzufinden, die bei der Auswahl des Mathematikers wirksam sind). Ein anderes Problem ergibt sich aus den Nonstandardmodellen der Mengenlehre, denn für einen konsequenten Strukturalisten gibt es keine Struktur ohne Isomorphie. Gleichwohl bleibt die strukturalistische Sicht verlockend; insgesamt erklärt sich so die massive aktuelle Aktivität der Mathematikphilosophen auf diesem Feld (Shapiro, Hellman, Maddy etc.; vgl. z.B. [Carter 2002]). Mit der vorliegenden Arbeit will ich eine andere Perspektive zu dieser Debatte beitragen, nämlich die, daß die Strukturmathematik als Beschäftigung ausgezeichnet ist durch einen *Umgang mit den Dingen, als habe man es mit Strukturen zu tun* (6.5).

6.3 Bourbaki und Themen, für die KT nützlich ist

6.3.1 *limites inductives et projectives*

Wie wir gesehen haben, waren die Begriffe projektiver und induktiver Limes von entscheidender Bedeutung für die Hervorkehrung des kategoriellen Standpunktes in

[383]*"Mathematics is a network of hidden structures"* [Mac Lane 1980, 362].

verschiedenen Situationen. Befaßt man sich nun mit der Frage, wieso es nie zu einer Aufnahme der KT in das Bourbaki-Projekt kam, so liegt es demgemäß nahe, auch die Auseinandersetzung der Gruppe mit diesen Begriffen zu untersuchen. Es wird sich herausstellen, daß die Behandlung dieser Begriffe in einem kategorientheoretischen Rahmen einer der stärksten Antriebe für eine Einführung der KT bei Bourbaki war, ohne indes verhindern zu können, daß diese Unternehmung aufgegeben wurde.

Erstmals scheint in *Tribu 24* (1951.1) von *limites inductives* die Rede zu sein, und zwar auf S.5 im Zusammenhang mit EVT, Chapitre II. §1 (ensembles convexes). Dort steht — in einer Aufzählung von zu behandelnden Dingen — nichts weiter als das Stichwort. Die Planung eines Abschnitts über *limites inductives* im EVT-Kontext setzt sich fort in *Tribu 26* (1951.3), wo es auf S.7 zu *"Espaces vectoriels topologiques. Fascicule de résultats"* heißt:

> Chapitre II [. . .] On réserve les limites inductives (p.18) jusqu'à examen d'un exposé Grothendieckien.

und ähnlich auf S.10 zum *Texte du chap.II: Ensembles convexes et espaces localement convexes*:

> On décide de généraliser, fonctoriser er grothendieckiser le n° des limites inductives, d'y mettre les limites projectives [. . .]

In *Tribu 27* fehlt dann allerdings jede Erwähnung des *exposé Grothendieckien* aus *Tribu 26*; vielmehr heißt es S.11 zu EVT: *"Un comité a revu la rédaction définitive des chap.I et II qui sont adoptés modulo des virgules"*; schließlich *Tribu 28* S.3 *"Les chap.I et II [de EVT] sont en épreuves"*. Dies muß nun nicht etwa heißen, daß Grothendiecks Beitrag in ähnlicher Form abgelehnt worden wäre wie später im Zusammenhang der algebraischen Geometrie: Die hier besprochenen *Tribu*-Bände weisen in die Jahre 1951-1952, und es liegt auf der Hand, daß Grothendiecks Beitrag hier im großen und ganzen in den begrifflichen Innovationen seiner (mit EVT befaßten) Dissertation mag bestanden haben; insbesondere mag es ihm also schwerlich um eine "rein kategorielle" Definition des Begriffs Limes im allgemeinen (im Stil Kans) gegangen sein, sondern vielmehr um die die Konstruktion einer bestimmten Topologie, die als induktiver Limes lokalkonvexer Topologien bezeichnet wird (vgl. [Grothendieck 1955b, 12]). Immerhin: *fonctoriser* deutet darauf hin, daß es tatsächlich um die Einführung eines kategorientheoretischen Rahmens in der ein oder anderen Form ging. Die veröffentlichte Fassung von EVT schließlich enthält keine allgemeine Behandlung der *limites*; in Kapitel II, §2 n°2 wird — in Parallele zu Grothendiecks Dissertation — die Konstruktion der *"topologie limite inductive"* besprochen.

Damit scheint aber eine allgemeine Behandlung keineswegs vom Tisch. In *Tribu 30* (1953.1) heißt es auf S.6 zu *Ensembles IV*: *"Faire les limites inductives et projectives dans les structures"*. Dieses Vorhaben wurde in *Tribu 34* (1954.2) bekräftigt, aber jedenfalls nicht unmittelbar ausgeführt, denn ein *Appendice des limites inductives* von Samuel wird erst in *Tribu 38* (1956.1) bestellt (vgl. *Engagements*) und in *Tribu 39* besprochen. In *Tribu 38* wird aufgrund eines neuen Resultats nochmals unterstrichen, daß es wünschenswert ist, die Thematik in größtmöglicher Allgemeinheit zu behandeln; und zwar heißt es in den *Décisions sur les appendices d'Algèbre multilinéaire (Rédaction n°235)*:

> Le Congrès ayant découvert un résultat ultra général sur la commutation des problèmes universels avec les limites inductives, il s'est avéré que l'App. des limites inductives est quelque chose de très général, qui devrait venir, en partie au Chap.IV des Ensembles, en partie au chap.I d'Algèbre. [. . .]
>
> NB — Grothendieck remarque que la recherche d'une limite inductive est un probleme d'application universelle, et que le fourbi ci-dessus de commutativité pourrait bien être un cas particulier d'une propriété de commutativité des problèmes universels. Au concours.

Auf diesen *concours* geht Cartier ein, wie aus *Tribu 39* hervorgeht:

> #76 Chap.IV (Structures) — Un papier de Cartier montre que les résultats de Samuel
> sur les limites inductives sont des cas particuliers de fourbis ultra-généraux sur la
> #77 commutation des problèmes universels. Ces fourbis ne s'énoncent bien que dans le
> #78 cadre des catégories et foncteurs.

Es kann Cartier durchaus um eine Verallgemeinerung im Stile Kans (beliebige Indexkategorien) gegangen sein; Cartier hat mir im Gespräch mitgeteilt, was er da vorgeschlagen habe, seien implizit adjungierte Funktoren[384]. Der Text gibt in der Folge eine Diskussion wieder, die sich — angesichts des geäußerten Bedürfnisses nach dem *cadre des catégories et foncteurs* — um die Frage der mengentheoretischen Grundlegung der KT im Einklang mit dem *"système logique"* von Bourbaki dreht; vgl. 6.4.3[385]. Hier ist zunächst noch anzumerken, daß die *résultats de Samuel*, von denen die Rede ist, höchstwahrscheinlich in dem bereits in *Tribu 38* besprochenen Text zu finden sind[386] — denn der Text *n°235* (den ich leider nicht habe einsehen

[384] Cartier hat mir erklärt, daß es in dem Text Samuels um *« doubles limites »* ging, was offensichtlich auf ein Problem der *commutation des problèmes universels* führt. Cartier hat die Tatsache, daß seine Ideen dazu später nicht veröffentlicht wurden, so begründet, daß es sich im Grunde um eine Situation handelt, die man mit dem bald darauf eingeführten Begriff des adjungierten Funktors viel besser beschreiben kann. Er denkt hier an die Formel $(AB)^* = B^*A^*$. Das *papier de Cartier* ist übrigens derzeit nicht auffindbar.

[385] Das oben wiedergegebene Zitat sowie den unmittelbar anschließenden Abschnitt zu der besagten Diskussion ⟨#85 S.257⟩–⟨#91 S.258⟩ findet man auch bei [Corry 1996, 379 Anm.52] — inklusive einer englischen Übersetzung.

[386] Corry scheint hingegen anzunehmen, es ginge um Resultate aus [Samuel 1948]. Er schreibt nämlich

> Publication of a final version of the results announced in 1939 concerning *structures* was delayed, among other reasons, because of unsolved questions suggested by category theory, on the one hand, and by ideas such as developed by Samuel in his article, on the other. This is indicated by the following report of 1956 on the tentative contents of *Theory of Sets* [*Corry zitiert dann Tribu 39 ⟨#76 S.240⟩–⟨#78 S.240⟩ und ⟨#85 S.257⟩–⟨#91 S.258⟩*] [Corry 1996, 378f].

Corry scheint also den Text aus *Tribu 39* dahingehend zu interpretieren, daß Samuel *"in his article"* können) stammt zweifellos von Samuel: in der Besprechung dieses Textes in *Tribu 38* scheint durch, daß er in Samuels Sprache aus [1948] abgefaßt ist: *S-T-applications* etc.[387].

Entsprechend dem Ausgang der Diskussion in *Tribu 39* bleibt das Problem der *limites inductives* vorerst offen. In *Tribu 40* heißt es zur *rédaction n°242 limites inductives de structures algébriques*:

> [. . .] cette rédaction [. . .] ne se rattache plus à rien : il n'y a plus de limites inductives "relatives à une espèce de structure" [. . .], et il n'y a pas encore de limites inductives "dans une catégorie". La manière de rédiger ce "supplement" [. . .] dépend donc essentiellement de ce que Bourbaki décidera de faire sur les catégories.

Bei dem erwähnten *supplement* geht es nicht etwa um eines zu E IV, sondern, wie aus *n°242* leicht hervorgeht, um ein *supplement* zur *Algèbre multilinéaire* (wir sind also in einer Linie zu *n°235*).

Im Zusammenhang der EVT und der *Algèbre multilinéaire* wurde also das Problem der Darstellung der *limites* einfach auf E IV verschoben. Wie sieht dies in anderen Bereichen aus? *Tribu 47* (1959.1) hat auf S.3 unter den *Décisions générales et géniales* betreffend *Algèbre* die Passage

> On a envisagé un moment un chap.X ("Problèmes universels en Algèbre") contenant les limites inductives et projectives [. . .] Cette suggestion n'a pas été retenue : Les limites inductives iront plutôt aux catégories [. . .].

Dem entspricht eine Bemerkung im vom selben Kongreß stammenden Text zur *Réédition du chap.III de Topologie générale (n°s 305, 306, 314 et 315)*, wo es auf S.1 um den Text *n°315* zu *Limites inductives* geht: *"Ce n'est manifestement pas ici le lieu de parler des limites inductives; ce n'est d'ailleurs le lieu nulle part, sauf aux Catégories"*. In *Tribu 53* (1961.1) geht es um die *réédition d'algèbre linéaire*, die schon in *Tribu 51* (1960.2) angesprochen worden war. Hier (zu *n°347*) tauchen plötzlich die *limites inductives et projectives* wieder auf; dies paßt nicht gut zum vorherigen Vorhaben, sondern deutet auf eine Abkehr von dem Plan eines eigenen KT-Kapitels hin — zeitgleich mit Grothendiecks Abkehr von Bourbaki.

Festzuhalten: Es wurde für die *limites inductives* zunächst in speziellen Anwendungssituationen ein Text wünschenswert, bis man schließlich auf den Gedanken kam, die Thematik in E IV aufzunehmen[388]. Die Perspektive für E IV war also tatsächlich ein *Arsenal für den Umgang mit immer wiederkehrenden strukturmathematischen Konstruktionen*. Wohl von daher ergab sich die Konkurrenz zur KT (6.4.2). Es ist unklar, was in E IV aus den *limites* letztlich geworden ist: keine der beiden Auflagen enthält etwas dazu.

die Ideen entwickelt habe, die Cartier nun zu verallgemeinern versucht; der einzige *"article"*, den Corry zitiert, ist aber [Samuel 1948]. Dort findet man jedoch keine Ideen (oder gar *résultats*) zu *limites inductives*. *Cartier* ist es erst, der das ganze (bei ⟨#77 S.240⟩) mit *problèmes universels* in Verbindung bringt (bzw. Grothendieck, s.o.). Corrys Vermutung scheint also nicht sehr sinnvoll. (Richtig ist natürlich, daß die Ideen aus [Samuel 1948] ihren Weg in E IV gefunden haben. Aber wieso sollen sie die Publikation von E IV verzögert haben?).

[387] Zu Samuels Artikel vgl. eingehend 6.3.2.1.

[388] ähnlich wie für die *applications universelles* (wie dargestellt in 6.3.2.1).

6.3.2 *applications universelles*

Die Strukturmathematik in ihrer heutigen Ausprägung kennt zahlreiche Beispiele von sogenannten "universellen Abbildungseigenschaften" (vgl. 5.2.2.2). Die Rede von der "universellen Abbildung" stammt von Bourbaki, und diese Rede ist auch in eine präzise Definition gegossen worden und hat als solche Einzug in die *Éléments* gefunden. Der Weg dorthin ist historisch interessant; zugleich ist es hier wichtig, zu sehen, wie weit die Berührungspunkte des von Bourbaki Unternommenen zur KT gehen.

6.3.2.1 Ein *appendice*, sein Ort, seine Resonanz und zwei auf ihm basierende Texte

Der erste Text in der *nomenclature*, der etwas mit *applications universelles* zu tun hat, ist *n°41*; ich habe mich mit diesem Text noch nicht befassen können. Der nächste Text ist *n°100*; dieser Text ist offensichtlich die Vorlage zum *Appendice III: Sur les applications universelles*[389] in der 1.Auflage[390] der *Algèbre multilinéaire* (1948). Dieser *Appendice III* beginnt folgendermaßen (S.131):

> Plusieurs des questions traitées dans ce chapitre (produit tensoriel, extension de l'anneau d'opérateurs d'un module, puissances extérieures) et dans les précédents (monoïde libre, corps des fractions d'un anneau d'intégrité, module libre) rentrent dans un même schéma, que nous retrouverons assez souvent par la suite, et qu'on peut appeler "recherche d'applications universelles". Tout problème de ce type, que nous conviendrons d'appeler "problème (U)", comporte les données suivantes :
>
> 1°- On se donne deux *espèces de structures* (*Ens.*R, §8, n°2) S et T [. . .]
>
> 2°- On suppose qu'on a défini, pour tout couple d'ensembles E et F, respectivement munis de structures d'espèces S et T, une famille d'applications, dites (S,T)-*applications*, de E dans F. [. . .]
>
> 3°- On suppose qu'on a défini, pour tout couple d'ensembles F et F' munis de structures d'espèce T, une famille d'applications, dites T-*applications*, de F dans F'. [. . .]

[389] Im Manuskript *n°100* war ein Text zu *applications universelles* als *Appendice I* vorgesehen; ferner sollte in einem *Appendice II* ein *Produit tensoriel d'une infinité d'algèbres sur un corps* behandelt werden. Demgegenüber kommen in der publizierten Fassung zunächst zwei Anhänge über ein solches Tensorprodukt und über das Tensorprodukt zweier Moduln und *dann erst* die *Applications universelles*. Im *Manuskript* bezieht sich *Appendice II* (das unendliche Tensorprodukt) zwar nicht direkt auf den *Appendice I* (die universellen Abbildungen), aber das Tensorprodukt wird mithilfe der universellen Eigenschaft der Tensorprodukte der Komponenten definiert; im *publizierten Appendice I* zum unendlichen Tensorprodukt steht eine andere Definition.

[390] In den weiteren Auflagen (1958, 1970) entfällt dieser Anhang; dies wird in der veröffentlichten Fassung nicht weiter kommentiert. Allerdings erwähnt es der *Review* der zweiten Auflage (MR 30 #3104). Der Satz "Instead of Appendices II (Produit tensoriel de deux modules sur des anneaux non commutatifs, 11 pages) and III (Sur les applications universelles, 6 pages), there is a new Appendix II (Produits tensoriels sur un anneau non commutatif, 23 pages)." läßt zumindest die Vermutung zu, der neue Appendice II umfasse irgendwie Material des alten Appendice III; dies ist aber nicht der Fall. Wir werden noch sehen, daß dieses Material in erweiterter Form nach E IV gekommen ist.

Diese Daten werden gewissen Bedingungen unterworfen, auf die ich gleich zurückkomme. Es kann dann formuliert werden, was unter einem Problem des in Aussicht genommenen Typs und unter einer Lösung des Problems zu verstehen ist; auch hierauf komme ich unten zurück. Es folgt noch der Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung unter den vorausgesetzten Bedingungen; es gibt jedoch kein allgemeines Lösungsverfahren. Interessant ist hier der *Review* zu dieser ersten Auflage (von Mac Lane; MR 10,231d): dort findet der Anhang nur in dem lapidaren Satz "Appendices treat [...] the "universal mapping" question" Erwähnung. Darf man dies so lesen, daß diese Bezeichnung damals allgemein bekannt war? Mac Lane zieht an dieser Stelle keine Parallele zur KT[391].

Neben dem Anhang zur ersten Auflage der *Algèbre multilinéaire* und den Abschnitten in E IV gibt es auch einen publizierten Artikel zum Thema *applications universelles* von Pierre Samuel [1948]. Dieser Text wurde zwar nicht als expliziter Bourbaki-Text publiziert, doch war Samuel in jenen Jahren aktives Bourbaki-Mitglied, und der Text bezieht sich auch stark auf die Arbeit Bourbakis. Ähnlich wie der oben besprochene *Appendice* beginnt auch Samuels Text mit einer (allerdings abweichenden) Aufzählung von Beispielen universeller Konstruktionen.

> It has been observed [*originale Anm.1:* Unpublished manuscripts of N.Bourbaki.] #79
> that constructions so apparently different as Kronecker products, extension of the ring of operators of a module, field of quotients of an integral domain, free groups, free topological groups, completion of a uniform space, Čech compactification enter in the same frame. We intend in this paper to explain a rather general process of construction which may be applied to most of the examples quoted above. #80
>
> This paper will proceed axiomatically. In fact the problem under question (problem #81
> of a "universal mapping") can only be stated after a certain number of axioms.
>
> [...]
>
> **1. Problems of universal mappings.** Given a set E it is possible to define on it certain kinds of structures [...] [*originale Anm.3:* For precise definitions of the words "structure", "kind of structure", "isomorphism" see [E IV, *fascicule de résultats*]]. We shall denote by S or T certain kinds of structures. A set with a structure T will be called a T-*set* [...]. An isomorphism for the structure T will be called a T-isomorphism.
>
> Given a kind of structure T it happens very often that, for every pair $E_1 E_2$ of T-sets, #82
> there has been defined a family of mappings of E_1 into E_2 satisfying the following axioms:
>
> A_1 : *Every T-isomorphism is a T-mapping.* #83
>
> A_2 : *If $f : E_1 \to E_2$ and $g : E_2 \to E_3$ are T-mappings, then the composite mapping $g \circ f : E_1 \to E_3$ is a T-mapping.*
>
> A_3 : *A necessary and sufficient condition for a one-to-one mapping f of E_1 onto E_2 to be a T-isomorphism is that f and f^{-1} be T-mappings.*
>
> Example. If T is the structure of group the T-mappings are the homomorphisms; #84

[391] Vgl. hier 3.4.2.

> if T is the structure of topological space the T-mappings are the continuous ones. [S.591f]

Diese Eigenschaften A_1-A_3 sind auch im *Appendice* enthalten. Samuel fährt nun mit drei weiteren Gruppen I, S, P von Bedingungen fort, die im *Appendice* fehlen. Diese Gruppen haben im einzelnen folgende Aufgaben:

- Die Bedingungen der Gruppe I legen fest, was es heißen soll, daß auf $E' \subset E$ eine T-Struktur von einer T-Struktur auf E "induziert" wird (die Festlegung erfolgt darüber, daß bestimmte Abbildungen *T-mappings* sind);

- Die Bedingungen der Gruppe S zeichnen Teilmengen, auf denen solch ein Induzieren möglich ist, als *"T-closed"* aus; daraus ergibt sich die Konstruktion des Abschlusses einer gegebenen Teilmenge;

- Die Bedingungen der Gruppe P regeln das Versehen des kartesischen Produkts einer beliebigen Familie von Mengen mit einer T-Struktur (hierbei sind wieder bestimmte Bedingungen über *T-mappings* erfüllt).

Schließlich nimmt Samuel noch an, es gebe ferner *mappings of S-sets into T-sets*, die sogenannten *(S-T)-mappings*, und diese Klasse von Abbildungen sei stabil unter Komposition mit *T-mappings* sowie unter Produktbildung. Damit sind die Vorbereitungen getroffen; Samuel formuliert:

> The [...] "problem of universal mappings" [...] is the following: given any S-set E to find a T-set F_0 and an *(S-T)*-mapping ϕ_0 of E into F_0 such that: [...]
>
> *Every (S-T)-mapping ϕ of E into any T-set F has the form $\phi = f \circ \phi_0$ where f is a T-mapping of F_0 into F.*

Aus dem Erfülltsein von I, S, P kann Samuel eine Konstruktion einer Lösung (F_0, ϕ_0) herleiten; hierbei ist F_0 das kartesische Produkt[392] derjenigen *T-sets*, deren Kardinalität eine bestimmte Schranke nicht überschreitet.

Es ist anzunehmen, daß sich Samuel mit seiner Erwähnung von *Unpublished manuscripts of N.Bourbaki* in Anm.1 auf *n°100* bezieht; ein Bezug auf die veröffentlichte *Algèbre multilinéaire* war zum Zeitpunkt des Einreichens seiner Arbeit beim *Bulletin of the AMS* (12.08.1947) noch nicht möglich. Daß *n°100* in der Tat älter ist als [Samuel 1948], liegt nahe, denn:

- Der Verweis auf [Markoff 1945], der in [Samuel 1948] bereits recht weit ausgeführt ist, erscheint im *appendice III* von 1948 auf S.135 (also innerhalb der Beispiele) unter Vorausschickung folgender Bemerkung:

  > Un intéressant "problème (U)" vient seulement d'être posé et résolu tout récemment [...]

[392] So erklärt sich die Bemerkung in der Einleitung, der Konstruktionsprozeß sei für "die meisten" Beispiele anwendbar ⟨#80 S.243⟩: im Falle des *field of quotients of an integral domain* sind die Axiome der Gruppe P nicht erfüllt, da ein kartesisches Produkt von Körpern kein Körper ist.

- Während in [Samuel 1948] ein allgemeines Konstruktionsverfahren entwickelt wird, liest man auf S.135 des *appendice III* von 1948:

  > [...] Dans l'état actuel des mathématiques, il ne saurait guère être question de traiter un tel problème que pour des espèces de structures et d'applications *explicitées*. [...]

  Es liegt nahe, daß Samuel erst im weiteren Verlauf seiner Untersuchung auf das Verfahren gekommen ist; und es erscheint demgegenüber weniger sinnvoll, anzunehmen, er habe im Text *n˚100* aus irgendwelchen Gründen nicht nur auf die Angabe des Verfahrens verzichtet, sondern auch noch so getan, als kenne er keines.

n˚100 könnte also zwischen 1945 und 1948 entstanden sein.

Wieso hat Samuel sich entschieden, einen Text außerhalb Bourbakis zu publizieren? Ein interner Grund mag gewesen sein, daß Bourbaki die Besprechung des Themas wegen der Vielzahl der in den Beispielen gestreiften Bereiche nicht an dem ursprünglich vorgesehenen Ort lassen, sondern bei den *structures* behandeln wollte; diese waren jedoch damals noch nicht im Ansatz zur Publikation reif, und Samuel wollte nicht warten, bis dies der Fall sein würde. Möglicherweise hat er angenommen, sein Konzept könnte unterdessen von jemand anderem publiziert werden (z.B. von Markoff).

Damit sind wir beim in der Chronologie dritten Text, dem Abschnitt über *applications universelles* in den veröffentlichten Fassungen von E IV (§3). Dies ist im wesentlichen eine neue Fassung von Samuels Publikation, in der die Bezüge zu den grundlegenden Definitionen des Kapitels über *structures* expliziter zum Tragen kommen. Hierbei verzichtet man auf die Unterscheidung zweier Strukturtypen (sondern geht davon aus, daß — in Samuels Terminologie — E und F zum selben Typ gehören); dies bedingt eine Neufassung des Begriffs der (S-T)-*mappings* (hier: α-*applications*). Hinreichende Existenzbedingung und Konstruktionsverfahren der Lösung werden aus [1948] übernommen (Stichworte Produkte und Kardinalitätsbetrachtungen). Es gibt auch eine neuerlich erweiterte Liste von (jeweils auch diskutierten) Beispielen.

In der folgenden Tabelle ist zusammengestellt, welche Beispiele für universelle Probleme in den drei Texten jeweils gegeben werden. Samuels Liste von Beispielen umfaßt hauptsächlich Konstruktionen, die, kategoriell formuliert, Funktoren in *einer* Variable sind. Dies stellt aber keine Einschränkung gegenüber *n˚100* dar, da z.B. auch das Tensorprodukt zweier Moduln in diesen Rahmen paßt (man nimmt als E das direkte Produkt dieser Moduln; vgl. z.B. Bourbaki E.IV.25)

Instanz	im *Appendice* behandelt	in [Samuel 1948] behandelt	in E IV behandelt	der Konstruktionsmethode aus [Samuel 1948] zugänglich
Produit tensoriel des modules	+	−	+	+
Monoïde libre	+	−	+	+
Module libre	+	−	+	+
Structure uniforme universelle	+	−	−	?
Kronecker product (?)	−	+	−	+
extension of the ring of operators of a module	−	+	+	+
field of quotients of an integral domain	+	+	−	−
anneau et corps de fractions[393]	−	−	+	+
free group	+	+	+	+
free topological group	−	+	+	+
completion of a uniform space	+	+	+	+
Čech compactification	+	+	+	+
fonctions presque périodiques sur un groupe topologique	−	−	+	+
variété d'Albanese	−	−	+	−

Die explizite Zuweisung des Gegenstands zu den *structures* scheint in *Tribu 25* (1951.2) zu erfolgen; man liest S.9 zu E IV *"On y ajoutera l'appendice des applications universelles"*. Wichtig erscheint mir an der Formulierung *"l'appendice"* die Verwendung des bestimmten Artikels: Ein solcher *Appendice* lag demnach zum Zeitpunkt dieser Diskussion schon vor; es könnte sich dabei um *n°100* bzw. den *appendice* in der *algèbre multilinéaire* handeln. Der Abschnitt in E IV sollte auch benutzt werden: Auf S.12 von *Tribu 31* (1953.2) heißt es zu *"Algèbre 3, Appendices"*: *"Appendice 3: après référence aux structures, on définira les algèbres tensorielles, extérieures et symétriques comme solutions de problèmes universels"*. Genaueres zu diesem Vorhaben steht dann in *Tribu 32* S.19f.

Der Kernpunkt ist, daß ein Text über *applications universelles* zunächst als Anhang für diejenigen Kapitel konzipiert war, in denen er benutzt wurde; im Zuge der Einsicht, daß es sich um ein allgemeineres methodisches Prinzip der Strukturmathematik handelt, sollte der Gegenstand schließlich an die Stelle abwandern, die für solche allgemeinen methodischen Prinzipien gedacht war: E IV. Eine solche Entwicklung haben ähnlich auch die *limites inductives et projectives* durchgemacht (vgl.

[393] Es scheint, daß hier E IV einfach die vorangehende Fragestellung so abgeändert hat, daß sie doch vom Konstruktionsverfahren erfaßt wird.

6.3.1); im Falle der *applications universelles* hat die Abwanderung allerdings auch tatsächlich stattgefunden.

6.3.2.2 In welchem Maße hat man es hier implizit mit KT zu tun?

[Corry 1996, 358] bespricht, inwieweit die Fragestellung der "universellen Probleme", wie sie in [Samuel 1948] behandelt wird, geeignet ist, die Nützlichkeit von Bourbakis Theorie der *structures* zu belegen:

> The problem [of universal constructions] had arisen in diverse branches of mathematics. This problem could therefore be seen as a real test for the usefulness of *structures* and related concepts. But what Samuel actually did in addressing the problem was to adopt a categorical perspective, albeit couched in Bourbakian language. Although the words category or functor do not appear in the article the emphasis throughout is on morphisms as the key concept in elucidating the problem. Samuel's article, then, underscores the limitations of *structures*, rather than showing any of its advantages.

Es ist nicht ganz einfach, diesem Argument Corry's zu folgen. Denn zunächst ist das Problem selbst ja bereits als Problem über Abbildungen formuliert (ich werde gleich noch untersuchen, ob man hier schadlos von "Morphismen" statt "Abbildungen" sprechen kann); da erstaunt es nicht, daß diese in der Behandlung des Problems eine wichtige Rolle spielen. Es ist mir nicht bekannt, daß zuvor über irgendeine "neutrale" Fassung des Problems gesprochen worden wäre, der Samuel erst bewußt die auf Abbildungen bezogene Ausformung gegeben hätte.

Die Hauptfrage muß aber lauten: Ist Samuels Argumentation wirklich implizit kategorientheoretisch? Zwar macht Samuel Aussagen über Hintereinanderausführung. Aber:

- Es geht Samuel stets um Abbildungen zwischen strukturierten Mengen (und zwar strukturiert i.S. von E IV); seine "Axiome" sind eher Basis der Deduktion als Definition der Grundobjekte: die Axiome der Gruppe A regeln zwar, wann von T-*mappings* die Rede sein soll, aber es ist vorher klar, daß es um Abbildungen zwischen Mengen geht, und dies wird auch benutzt (wenn typische Konstruktionen mit Mengenabbildungen oder auch Kardinalitätsbetrachtungen herangezogen werden).

- Samuel nimmt an, daß eine gegebene Familie von Abbildungen zwischen strukturierten Mengen[394] wenigstens die in den Axiomen A_1-A_3 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt. Ginge man von den bei Samuel betrachteten Strukturtypen zu den entsprechenden Kategorien über, so wäre für die jeweils in der üblichen Weise festgelegten Morphismen offensichtlich A_2 erfüllt; was A_1 und A_3 betrifft, so hängt dies davon ab, ob in der fraglichen Kategorie der Begriff des Isomorphismus im Sinne der KT mit dem von E IV (der stets Bijektivität im mengentheoretischen Sinn beinhaltet) übereinstimmt. Ebenso ist umgekehrt

[394] genauer: eine gegebene Familie von Familien von Abbildungen zwischen je zwei strukturierten Mengen.

keinesfalls klar, daß ein Strukturtyp mit einer Familie von T-mappings eine Kategorie bildet[395]; es könnte solche Familien geben, die die Kategorieaxiome nicht erfüllen.

- Samuel orientiert sich am "Versehen einer Menge mit Struktur" (so betreffen die Axiomengruppen I und P das Übertragen einer Struktur auf bestimmte Mengen — im Falle von I auf eine Teilmenge der ursprünglichen Menge, im Falle von P auf das kartesische Produkt von Mengen). Samuels hinreichendes Existenzkriterium für die Lösung des universellen Problems hängt davon ab, daß man zu einer Familie von mit der fraglichen Struktur versehenen Mengen das kartesische Produkt dieser Mengen mit der nämlichen Struktur versehen kann. Dies muß keinesfalls gleichbedeutend sein mit der Existenz eines Produkts im kategorientheoretischen Sinn in der entsprechenden Kategorie.

An dieser Stelle ist eine Bemerkung über Bourbakis eigenes Konzept von "Morphismus" anzubringen. In *n°188*, einem Entwurfsmanuskript zu E IV (wie ähnlich auch in der veröffentlichten Fassung von E IV und in dem von [Corry 1996, 379] erwähnten Brief von Weil an Chevalley — vgl. 6.4.2) heißt es, ein Begriff von Morphismus gehöre zu den *meisten* Strukturen (nicht etwa zu *allen*):

> Pour la plupart des espèces de structure usuelles Σ, on introduit une nouvelle notion, celle de *morphisme* de l'espèce de structure Σ [. . .].

Diese Einschränkung geht wohl auf folgende Diskussion in *Tribu 31* (1953.2) S.8 zurück:

> Le point de vue des structures est plus gênant qu'utile pour l'intégration et les variétés. On est spécialement canulé par le fait que les représentations sont imposées une fois choisie la structure. [. . .]
>
> En conséquence, au chapitre des structures :
>
> 1) [Représentation] sera appelée "morphisme". [. . .]
>
> 3) Les "morphismes" seront dissociés des structures (voir plus loin)

Die theoretische Abtrennung der Morphismen von den Objekten erfolgte also, um zu vermeiden, daß man sich zu einem vorgegebenen Strukturtyp von vorneherein auf einen zugehörigen Morphismentyp festlegen muß. Der Akzent bei der Aussage, nur zu den "meisten" Strukturtypen gehörten Morphismentypen, liegt also eigentlich darauf, daß man nur bei den meisten (und nicht bei allen) von vorneherein einen eindeutigen (kanonischen) solchen Typ hat.

Das voranstehende Zitat weist den Kontext der *variétés* als einen Kontext aus, von dem Corry mit Fug und Recht behaupten könnte, die *structures* hätten in ihm mehr *limitations* als *advantages* (hier: *plus gênant qu'utile*). Die Frage, ob auch der Kontext der *applications universelles* ein solcher Kontext ist, ist noch zu klären. Bourbakis Begriff der universellen Abbildung kann als spezifische Form des Begriffs

[395] Dies wird in Eilenbergs unveröffentlichtem Papier besprochen, das in 6.4.2 wiedergegeben ist.

der Adjunktion von Funktoren gesehen werden[396] — eine Form, die übrigens auch heute noch von eigener Relevanz ist. [Mac Lane 1971b, 103] gibt an, daß das in Bourbakis *Algèbre multilinéaire* vorgestellte Konzept aus einer bestimmten Absicht etwas allgemeiner gehalten ist, als es hätte sein müssen, um das Finden des Begriffs des adjungierten Funktors zu ermöglichen[397]. Diese Absicht sei *"to include the ideas of multilinear algebra which were important to French Mathematical traditions"*. Nun wird Mac Lane wohl kaum von Bourbaki erwarten, in einem Appendix zur *Algèbre multilinéaire* darauf zu verzichten, die Verbindung zu solchen *ideas of multilinear algebra* herzustellen — es ist ja aller Wahrscheinlichkeit nach genau der *Sinn* des Appendix, dies zu tun. Mac Lanes weiteres Argument verläuft dann so, daß es wohl erst eines jüngeren, weniger den Traditionen verpflichteten Forschers bedurfte, um die *basic discovery* zu machen. Ich nehme eher an, Kan war eben einer *anderen* Tradition verpflichtet (der angelsächsischen, in der zu jener Zeit ein stärkerer Akzent auf algebraische Topologie gelegt wurde als in Frankreich). Das Argument wirkt auf mich, als habe demnach Bourbaki die Bedeutung der multilinearen Algebra überbewertet. [Mac Lane 1981, 24] dagegen stellt die Bedeutung der multilinearen Algebra in der homologischen Algebra heraus; vgl. auch [Mac Lane 1976a, 6].

6.3.3 *algèbre homologique*

Daß Grothendieck versuchte, den Tohoku-Text als *rédaction Bourbaki* einzureichen, wurde schon in 3.3.1.3 angesprochen. Hier soll es noch um drei andere Annäherungen Bourbakis an homologische Algebra gehen.

6.3.3.1 Der Bourbaki-Text über homologische Algebra bis zu seiner Veröffentlichung

Durch die Bourbaki-Akten zieht sich eine immer wieder aufkeimende Beschäftigung mit Fragen der homologischen Algebra. In vielen Fällen wurde ein kategorieller Rahmen angeregt, etwa um aktuelle Errungenschaften (wie in Tohoku niedergelegt) einbeziehen zu können. Ähnlich wie in anderen Bereichen kann sich diese Sichtweise jedoch nicht bis in die publizierte Fassung durchsetzen: in der schließlich 1980 erscheinenden homologischen Algebra Bourbakis beschränkt man sich auf Moduln[398] (also grob die Situation von [Cartan und Eilenberg 1956]).

Die Frage betreffend, welche *rédactions* im einzelnen unternommen wurden, ergeben die *Engagements du Congrès* grob folgendes Bild (vgl. Anhang A.2.2): Zunächst wurde Eilenberg in *Tribu 25* (1951.2) und *28* (1952.2) aufgefordert, einen *Rapport sur l'algèbre homologique* zu verfassen; sodann sollte laut *Tribu 31* (1953.2) Chevalley den *Etat 1 d'Algèbre homologique* aufsetzen[399]; in *Tribu 37* (1955.3) war dann wieder

[396]wenn man die eben besprochenen Unterschiede zwischen der KT und Bourbakis Strukturtheorie außer Acht läßt.

[397]Diese Argumentation gibt auch [Corry 1996, 372] wieder.

[398]dazu ausführlicher [Corry 1996, 332].

[399]In *Tribu 31* ist auf S.30 eine knappe Besprechung eines Textes zu dem Thema enthalten. Dieser Text hat mindestens 14 Seiten; nach BKI 00 Cote 485 ist es der *preliminary report on homological*

Eilenberg zuständig für *Algèbre homologique* — gleichzeitig wird Grothendieck mit *Homologie des faisceaux* beauftragt.

Den letztgenannten Text Eilenbergs glaube ich in den Manuskripten *II. Abelian Categories* und *IV. Resolutions* zu erkennen, die in seinem Nachlaß zu finden sind. Diese sind zwar anonym, Eilenbergs Autorschaft liegt aber nahe. Zum einen findet sich oben auf der ersten Seite eine handschriftliche Eintragung von Eilenbergs Hand *"Only Ch II & IV exist/ Only copy/ Sammy"* und darunter ausradiert, aber noch lesbar *"What about the rest? J.D."*; der ausradierte Schriftzug scheint mir von Dieudonnés Hand zu sein. Zum andern deuten *Tribu 39* und *Tribu 47* darauf hin: Zu *Tribu 39* gehören *Décisions sur l'algèbre homologique (papiers tirés en noir et en anglais, intitulés "II Abelian Categories", "IV Resolutions")*; im *Plan* heißt es *"Sammy continuera à envoyer des papiers ; il résumera les parties I et III manquants, et fera une rédaction détaillé de V ; détails plus loin sur II et IV."* Weiter heißt es bei *Tribu 47* S.6: *"catégories additives et abéliennes [:] on a déjà une rédaction Sammy"*. Inhaltlich gibt der Text im wesentlichen den Stand von Buchsbaums Dissertation wieder.

Bourbaki hat offenbar auch bei der Reedition der linearen Algebra auf homologische Algebra Rücksicht genommen; im *Review* zur *troisième édition* der *Algèbre linéaire* (von 1962) heißt es:

> Compared with the previous (1955) edition [...], the present edition of Chapter 2 has new material, in particular, the properties concerning inductive and projective limits, projective and graded modules as well as tensor products of modules (over commutative or non-commutative rings).

Es war (was im Blick auf Eilenbergs Mitgliedschaft auch nicht erstaunt) auch ein Buch über algebraische Topologie im Gespräch[400]. In diesem Zusammenhang heißt es in *Tribu 45* (1958.2) S.6:

> Sammy fait un laius d'òu il ressort que l'Algèbre Homologique et les Complexes semi-simpliciaux sont les deux mamelles de la Topologie Algèbrique. Comme l'Algèbre Homologique continue à se généraliser, on décide d'attendre encore pour la rédiger.
>
> Pour l'instant on charge Sammy de rédiger les complexes semi-simpliciaux [...]

(wegen der *Complexes semi-simpliciaux* und ihrer Bedeutung für die algebraische Topologie, die hier etwas drastisch hervorgehoben wird, vgl. 2.6.1.) An dieser Stelle enden die mir zugänglichen Quellenzeugnisse zum Thema Homologische Algebra.

---

algebra n°178. Unklar ist, ob Chevalley abgegeben hat.

[400] Auch die axiomatische algebraische Topologie im Stil Eilenbergs und Steenrods wurde von Bourbaki rezipiert. Der Kongreß *24* fand vom 27.01. bis zum 03.02.1951 statt, also während Eilenbergs Parisaufenthalt und seiner prägenden Teilnahme am *Séminaire Cartan*. Eilenbergs Einfluß auf die Gestaltung dieses Seminars wird an der Hervorkehrung des Aspekts der Axiomatisierung von Homologietheorien deutlich (vgl. 3.2.2). Auf S.3 von *Tribu 24* (1951.1) ist zu erkennen, daß sich Bourbaki mit *homologie axiomatique* auseinandersetzte; da Eilenberg bei diesem Kongress anwesend war, ist wohl anzunehmen, daß hier an Dinge im Stil von [Eilenberg und Steenrod 1952] gedacht war. Vgl. auch 6.4.2.

Der entscheidende Satz ist hier *"Comme l'Algèbre Homologique continue à se généraliser, on décide d'attendre encore pour la rédiger"*; dieser Satz macht die Zielrichtung des Projekts sehr deutlich: es geht um eine abschließende Darstellung. Umso mehr erstaunt, wie bescheiden man sich in der schließlich und endlich publizierten Fassung zeigt (wie eingangs erwähnt).

6.3.3.2 Bourbaki zu exakten Sequenzen

Es hat offenbar Unstimmigkeiten über die Anwendung des Begriffs exakte Sequenz gegeben (welcher in der homologischen Algebra wohl noch weit weniger verzichtbar ist als der Begriff abelsche Kategorie). Mac Lane führt die entsprechende Auseinandersetzung sogar als Beispiel für den zuweilen heftigen Diskussionsstil an:

> Debate at Bourbaki meetings could be vigorous. For example, in one such meeting (about 1952) a text on homological algebra was under consideration. Cartan observed that it repeated three times the phrase "kernel equal image" and proposed the use there of the exact sequence terminology. A. Weil objected violently, apparently on the grounds that just saying "exact sequence" did not convey an understanding as to why that kernel was exactly this image [Mac Lane 1988a, 337].

Zu Weils Opposition vgl. auch die Anmerkung 157. Es ist im übrigen schwer zu sagen, von welchem Treffen die Rede ist. Mac Lane selbst hat laut den Anwesenheitslisten der Tribu (vgl. Anhang A.2.1) nur an einem Treffen teilgenommen, nämlich am Kongreß *34* im Jahre 1954; insbesondere hat er 1952 an keinem Treffen selbst teilgenommen. Es ist ferner ausgeschlossen, daß Mac Lane in obigem Zitat an das Treffen gedacht hat, bei dem er selber anwesend war, denn daß er 1954 dort war, sagt er selbst kurz zuvor im selben Text (vgl. 6.4) — wieso sollte er jetzt von *"about 1952"* sprechen? Er kann also nur aus Erzählungen von dieser Diskussion erfahren haben, z.B. durch Eilenberg oder auch Cartan. Daher kommt wohl auch das Wort *"apparently"*.

Es liegt nahe, die Episode mit folgender Notiz in Verbindung zu bringen: *Tribu 30* (1953.1) S.6 *Algèbre II. [...] Les possibilités sont les suivantes : 1) Réédition sans changements. 2) Si on décide des changements, ils peuvent porter sur les points suivants : [...] d) Introduction du langage des suites exactes.* (*Algèbre II* ist natürlich gerade *Algèbre linéaire*; von der Reedition dieses Buchs mit stärkerem Akzent auf Begriffen der homologischen Algebra war schon die Rede.) Außerdem sind natürlich Entwürfe für homologische Algebra der gegebene Kontext für eine solche Diskussion. In *Tribu 31* (1953.2) gibt es, wie in 6.3.3.1 ausgeführt, ein Protokoll zu einer Besprechung über einen Text zur homologischen Algebra; eine Diskussion über die Anwendung des Begriffs exakte Sequenz kommt in diesem Protokoll nicht vor. In der letztlich publizierten Fassung der homologischen Algebra ist übrigens von exakten Sequenzen die Rede.

Es bietet sich an, den wiedergegebenen Diskussionsausschnitt als erkenntnistheoretische Stellungnahme Weils aufzufassen. Relevant ist hier Mac Lanes Vermutung, Weil sei gegen eine Verwendung der Terminologie "exakte Sequenz" gewesen *"on the grounds that just saying "exact sequence" did not convey an understanding as to why* *that kernel was exactly this image"*. Weil würde demnach nach einer Terminologie suchen, die ein Verständnis dafür ermöglicht, daß die mit ihr bezeichnete Situation gerade dort eintritt, wo sie eintritt. Weil geht es gewissermaßen (auf der begrifflichen Ebene) um Ikonizität (vgl. 5.3.2.1). Aber gibt es solche Terminologien überhaupt? Kann man ernstlich behaupten, die sonstige Terminologie von Bourbaki entspräche diesem Anspruch? Meines Wissens geht es insbesondere auf Bourbaki zurück, Strukturtypen nach ihren Urhebern zu benennen — und bei solchen Terminologien kann von Ikonizität wohl keine Rede sein.

6.3.3.3 *Faisceaux* bei Bourbaki

Der Begriff *« faisceau »* scheint in den *Éléments* nicht vorzukommen. Cartier hat mir mitgeteilt, daß Godements Buch [1958] ursprünglich als Text innerhalb Bourbakis gedacht war. Hierfür sprechen zwei Stellen aus *Tribu 34* (1954.2): auf S.3 in den *Engagements du congrès* liest man *Godement: Faisceaux*; auf S.8 steht zu *Livre XI (Homologie des faisceaux): On utilisera le bouquin de Godement.* Entsprechend ist wohl die Briefstelle ⟨#57 S.124⟩ zu interpretieren. Allerdings ist in Godements Buch selbstverständlich kein *structure*-Ansatz gewählt.

Es gibt weitere Erwähnungen des Themas. Bei *Tribu 31* (1953.2) heißt es auf S.5 *"Faisceaux: On utilisera la rédaction Cartan-Serre pour Nancago"*. Hier ist unklar, welches die *rédaction Cartan-Serre* ist, die hier für *Nancago* gedacht ist[401]. *Tribu 41* (1957.1) bespricht *n°239*.

6.3.4 Grothendiecks algebraische Geometrie bei Bourbaki

Grothendieck konnte die Gruppe zunächst mitreißen in seinem Überschwang der Umgestaltung der algebraischen Geometrie. Mit seinem Ausscheiden fielen jedoch die großen Vorhaben Bourbakis auf diesem Gebiet weitgehend aus. Wie wir noch sehen werden (6.4), spricht vieles für die Hypothese, daß André Weil, der selbst umfassende Beiträge zur algebraischen Geometrie geleistet hatte, sich insbesondere in diesem Zusammenhang nicht mit Grothendiecks Sicht der Dinge anfreunden konnte; insofern mag der entscheidende Bruch (6.4.4) auch genau durch eine Diskussion in diesem Zusammenhang entstanden sein.

Ich habe keine *rédactions* zu Gesicht bekommen, die aus dem Versuch, SGA im Rahmen des Bourbaki-Projekts zu machen, hervorgegangen sein mögen (da diese Texte, falls sie entstanden sind, zu spät entstanden sind, als daß sie schon freigegeben wären). Ich kann nur einige Zeugnisse aus *La Tribu* hierhersetzen. Bereits in *Tribu 35bis* (also 1955) ist auf S.2 die Rede von *Géométrie algébrique; Schémas*; hier sind zweifellos Schemata i.S. Chevalleys gemeint (vgl. 4.1.1.1). Im *Plan général — État des rédactions*, in *Tribu 42* (1957.2) ab S.3 enthalten, liest man auf S.5 den

[401] Es ist bekannt, daß manche unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki erschienenen Texte den Vermerk *"Université de Nancago"* tragen — aufgrund der Tatsache, daß André Weil in Chicago angestellt war und viele der übrigen in Nancy. Es wäre noch weiterzuverfolgen, an welchen Text über Garben für die Schriftenreihe *Publications de l'Université de Nancago* gedacht ist, wenn es heißt, er sei *pour Nancago.*

Plan, ein *Livre de Géometrie Algébrique* zu schreiben, und den bemerkenswerten Satz *"la tendance actuelle de Bourbaki est d'en faire le livre central"*. Damals waren wichtige Arbeiten von Serre (GAGA, FAC) und Grothendieck (Riemann-Roch) abgeschlossen, aber das neue Begriffssystem der Schemata etc. lag wohl noch nicht vor (4.1.1.2). Doch dies läßt nur bis Sommer 1958 auf sich warten; in *Tribu 45* findet sich auf S.3f unter *Livre de Géométrie Algébrique* ein detaillierter Plan von Grothendieck, in dem der Begriff des Schemas i.S. Grothendiecks enthalten ist. Dieses Vorhaben klingt noch im Text zu Grothendiecks Ausscheiden nach, der *Tribu 53* (1961.1) beiliegt (vgl. 6.4.4): in einer Schlußbemerkung wird die Bedeutung der Kategorienmethoden für das Weil-Programm (in Grothendiecks Sicht) hervorgehoben.

6.4 Die Diskussion über die KT bei Bourbaki

6.4.1 Befürworter und Gegner

Pierre Cartier hat die "Parteien" aus dem Gedächtnis wie folgt aufgelistet: *Pro* Cartan, Eilenberg, Grothendieck; *contra* Weil; der Rest (darunter er selbst) blieb eher indifferent. Für Weils Opposition lassen sich indirekte Zeugnisse angeben: Am 02.02.1956 schreibt Serre aus Princeton an Grothendieck[402]: *"je me réjouis fort de voir cette « hypercohomologie » donner des résultats tangibles en géométrie algébrique — Weil sera furieux!"* Serre nimmt also an, es könne Weil keineswegs freuen, daß Grothendiecks kategorientheoretisch geprägte homologische Algebra Auswirkungen auf die algebraische Geometrie — Weils Arbeitsgebiet — habe[403]. Weitere Zeugnisse für Weils Haltung sind in den folgenden Abschnitten zu finden; vgl. auch seine Bedenken gegen eine Verwendung der Terminologie "exakte Sequenz", dargestellt in 6.3.3.2, und seine vermutliche Opposition gegen das Buch [Cartan und Eilenberg 1956], dargestellt in Anm.157.

Auch Mac Lane scheint sich in die Debatte eingeschaltet zu haben; er gibt dazu folgendes Zeugnis: *"1954 [. . .] I was invited to attend one of the private meetings of Bourbaki, perhaps in the expectation that I might advocate [the introduction of category theory to the Éléments]."* [1996a, 132]. In der Tat hat er wohl auch genau das versucht; an anderer Stelle bemerkt er zur selben Episode: *"Bourbaki did not then or later admit categories to their volumes; perhaps my command of the French language was inadequate to the task of persuasion"* [1988a, 337]. Aus den Anwesenheitslisten (vgl. A.2.1) geht hervor, daß es sich um den Kongreß *34* (1954.2) handelt. Eine Diagonallektüre dieser *Tribu* deutet allerdings nicht darauf hin, daß Mac Lanes Bemühungen überhaupt vermerkt sind. Vor diesem Hintergrund erstaunt Mac Lanes Version, er habe sich dort als Missionar betätigt, ja er sei gar deswegen dazugebe-

[402] Zur Korrespondenz Grothendieck-Serre vgl. 3.3.1.1.

[403] In einem vorangegangenen Brief hatte Serre an Grothendieck geschrieben *"Ton papier sur l'Algèbre homologique a été lu soigneusement, et a converti tout le monde"* (vgl. ⟨#47 S.123⟩); da hierbei der Kongreß *36* gemeint ist (vgl. 3.3.1.1), ist wohl davon auszugehen, daß bei diesem Weil nicht anwesend war. Genaueres ist über diesen Kongreß derzeit nicht in Erfahrung zu bringen; vgl. wieder 3.3.1.1.

ten worden — wenngleich man natürlich leicht vermuten kann, wer ihn in solcher Absicht hätte eingeladen haben können.

6.4.2 Der Konflikt der KT mit den *structures*

Ein Punkt, der in der Diskussion über die Aufnahme der KT eine Rolle spielte, war die Frage des Verhältnisses dieser Theorie zu Bourbakis Konzept *structure*. Hierauf hat Leo Corry hingewiesen; auch Cartier geht in [Senechal 1998] darauf ein[404]. Dies war allerdings keineswegs der einzige Grund, wie wir noch sehen werden.

Bereits in *Tribu 25* (1951.2) finden sich Ansätze zu einer Einbeziehung zumindest des Funktorbegriffs in die (damals noch rudimentären) Entwürfe zu E IV: *Sammy fera un rapport sur ce qu'on pourra y dire des foncteurs, homomorphismes, variances, structures induites, etc.* (S.9). Dieser bei Eilenberg bestellte Text ist m.E. tatsächlich entstanden, und zwar als *Concerning functors and Livre I.*, einem zu Eilenbergs Nachlaß gehörenden kurzen Manuskript. Da der Text sehr kurz ist, kann ich ihn hier *in extenso* wiedergeben:

> Here are some remarks concerning the possibility of including categories and functors in Bourbaki. There are two places at which this could take place
>
> 1° Livre I
>
> 2° part II, Homologie algebrique
>
> In homologie algebrique, functors should be used systematically to unify the various homology theories. I argue that this should be the point at which functors and categories should be introduced. Here are my reasons.
>
> The method of functors and categories is in some sort of "competition" with the method of structures as developed at present. Unless this "competition" is resolved only one of these methods should be presented at the early stage. Bourbaki is committed by structures for all the material of part I at least.
>
> The resolution of the "competition" is only possible through the definition of the notion of "structural homomorphism" which would convert each type of structure into a category. This missing definition would certainly require a serious modification of the present concept of structure. It would certainly complicate further this already complicated concept. Despite my willingness to complicate things I am still unable to produce a general definition that would fit known typical cases. I have discussed the matter with Mac Lane and Chevalley without great success. Until this mathematical question is solved, functors belong to part II.

[404]Cartier stellt dort darauf ab, daß die *structures* deshalb so unhandlich geraten sind, weil man versucht hat, ohne Kategorien auszukommen. Als äußerer Grund für die Nichtaufnahme der KT wird angeführt, daß das Unternehmen vor der KT begonnen wurde und zum Zeitpunkt der Entwicklung des Kapitels E IV schon weit vorangetrieben war.

Hier wird klar, wieso im weiteren Verlauf der Arbeit an *structures* zunächst nichts mehr mit Kategorien passierte: Eilenberg riet ab[405]! Mit *Homologie algébrique* meint Eilenberg entweder homologische Algebra in Stil von [Cartan und Eilenberg 1956] oder die axiomatischen Homologietheorien im Stile von [Eilenberg und Steenrod 1952][406]; so könnte man jedenfalls den Passus *unify the various homology theories* verstehen. Dies führt auf die Bemerkung, daß mit der Annäherung an Themenkreise, bei denen die Bedeutung eines möglichen KT-Anteils hinausgeht über die, die ein solcher Anteil im Zusammenhang mit Cohomologie von Moduln oder axiomatischen Homologietheorien hat, — also Themenkreise wie *applications universelles* oder *limites inductives* — auch die Frage der Einbeziehung von KT in einem neuen Licht zu diskutieren gewesen wäre; wir hatten gesehen, daß dies teilweise der Fall war.

Jedenfalls gilt: Bourbaki glaubte wohl mehrheitlich, es könne nur entweder von *structures* oder von *catégories* die Rede sein. Bei Cartiers Angabe, Bourbaki habe den kategoriellen Standpunkt nicht angewandt, weil die bereits abgeschlossenen oder sogar veröffentlichten Teile des Werks hätten neu geschrieben werden müssen, kann aber die Unvereinbarkeit der KT mit den *structures* eigentlich nicht ins Gewicht fallen, denn Corry hat gerade nachgewiesen, daß der schließliche *structure*-Begriff im restlichen Werk eine völlig marginale Rolle spielt[407]; wenn aber *structures* sowieso keine Rolle spielen, kann man sie auch durch *catégories* ersetzen, ohne viel anderswo ändern zu müssen. Allerdings läßt sich in der Tat rekonstruieren, daß man glaubte, die *structures* selbst in diesem Fall umschreiben zu müssen — wovor man zurückschreckte ⟨#88 S.257⟩.

Es bleibt zu klären, welche Rolle die inhaltliche Konkurrenz (im Anschluß an Eilenbergs Text) spielte. In *Tribu 43* (1957.3) wird ein Text *"Notes sur les catégories et foncteurs"* (*n°279*) besprochen. Auf S.1 heißt es: *"Le point de vue adopté dans le chapitre paraît être incompatible avec celui des structures, et Bourbaki ne veut pas abandonner ce dernier sans de très sérieuses raisons".* Demgegenüber bezeichnet Grothendieck[408] in *n°307* das vorhandene Kapitel IV der Mengenlehre (also die *structures*) als *"inutilisable de toutes façons"* und schlägt vor, lieber das Universenaxiom und KT dort einzuführen ⟨#100 S.260⟩. Im Blick auf die Vermutung, daß der Konflikt in der Hauptsache ein Konflikt zwischen Weil und Grothendieck war, ist festzuhalten, daß Weil beim Kongreß *43* anwesend war — Grothendieck allerdings auch. Es ist zu fragen, wieso Grothendieck seine Einschätzung des *point de vue [. . .] des structures* nicht zu Protokoll gab, als Bourbaki festhielt, diesen nicht ohne sehr dringende Gründe aufgeben zu wollen. Ich habe den Text *n°279* nicht einsehen können; aber aus seiner Besprechung gewinnt man einen Eindruck. Auf S.1 heißt es dort: *"Le Congrès a été assez effrayé de ce "diplodocus qui trotte" [. . .]"*; die Besprechung

[405]Eilenberg war keineswegs ein ausdrücklicher Gegner der *structures*; er beteiligte sich aktiv an der Erarbeitung des Kapitels — vgl. etwa Corrys Wiedergabe (S.378) einer Passage aus *Tribu 28* (1952.2).

[406]In Anm.400 gebe ich einen Beleg, daß zu diesem Zeitpunkt tatsächlich über einen Bourbaki-Text zu diesem Thema nachgedacht wurde.

[407]Damit weist er historisch nach, was Chevalley im Interview [Guedj 1985] philosophisch kritisiert.

[408]Zum folgenden, insbesondere zu Grothendiecks Autorschaft von *n°307*, vgl. eingehender 6.4.3.

enthält auch *Notes de détail*, wo auf 3 Seiten die Einzelheiten des Textes sehr kompetent und im Grunde offen für eine Kategoriensprache diskutiert werden; es werden sowohl Fehler oder Änderungswünsche angemerkt, als auch Ergänzungsvorschläge gemacht und gelungene Passagen hervorgehoben. Als Autor käme gemäß den *Engagements* der vorangehenden Kongresse eigentlich vor allem Cartier in Frage (vgl. Anhang A.2.2); dies ist aber nicht der Fall: wie mir Hélène Nocton freundlicherweise mitgeteilt hat, stammt der Text von Cartan.

Es gibt erwartungsgemäß nur wenige explizite Zeugnisse für Weils Haltung zur KT (und zu *structures*); eine Quelle für beides (die allerdings zeitlich recht lange vor der eigentlichen Diskussion entstanden ist) erwähnt Corry:

> Evidence of the interplay between structural and categorical concepts is provided by the following letter of Weil to Chevalley, dated October 15, 1950, and distributed among the members of Bourbaki as an appendix to one of the issues of "la tribu". [Corry 1996, 379]

In den *Archives Delsarte* konnte ich in keinem der denkbaren Bände einen solchen Brief finden[409]. Es seien hier zwei Passagen nach Corry zitiert:

> Je viens de recevoir les chap. II-III des Ensembles. [...] faut-il réserver le mot "fonction" à une application d'un *ensemble* dans l'univers, comme tu as fait [...] ou bien convient-il de nommer "fonction" tout ce à quoi on attache un symbole fonctionnel, e.g. $\mathfrak{P}(E), A \times B, A \bigcirc B$ [...] etc. ? Evidemment "fonction" dans le second sens ne serait pas un objet mathématique, mais un vocable métamathématique ; c'est sans doute pourquoi il existe (je ne veux nommer personne...) des gens qui disent "foncteur" ; devons-nous accepter ce terme ? Il semble qu'on ait besoin d'un mot pour cette notion. "Fonction" dans les deux sens aurait peut-être plus d'avantages que d'inconvénients. [...]
>
> [...] Comme tu sais, mon honorable collègue Mac Lane soutient que toute notion de structure comporte nécessairement une notion d'homomorphisme [...] Que pensestu qu'il y ait à tirer de ce genre de considérations ?

Weils Mißtrauen gegenüber kategorientheoretischen Auffassungen ist deutlich zu spüren; er geht sogar so weit, die Verwendung des Terminus "Funktion" anstelle von "Funktor" zu befürworten trotz des von ihm aufgezeigten Nachteils (daß man es bei einer solchen Verwendung von "Funktion" nur noch mit einer Verwendung als "metamathematische Vokabel" zu tun habe). Was war für ihn so schlimm an "Funktor"? Wieso glaubt er überhaupt, die Verwendung des Terminus "Funktion" für Dinge wie $\mathfrak{P}(E), A \times B, A \bigcirc B$ mache diesen zu einer "metamathematischen Vokabel"? — ist doch eine mathematische Theorie vorhanden, in der solche Operationen als mathematische Objekte (Funktoren) beschrieben werden (die KT)! Chevalleys Antwort auf Weils abschließende Frage hätte also sein können, daß, wenn man Mac Lanes Behauptung zum Ausgangspunkt einer Strukturtheorie macht, man die

[409] Die Nachweisung *"one of the issues of "la tribu" "* läßt philologisch etwas zu wünschen übrig. Denkbar ist frühestens *Tribu 23* als Protokoll zu dem Kongreß, der genau am 15.10.1950 zu Ende ging.

Operationen $\mathfrak{P}(E), A \times B, A \bigcirc B$ zu mathematischen Objekten (in dieser Strukturtheorie beschrieben) machen kann. Zwar hat Bourbaki mehrfach betont, nicht zu jedem Strukturtyp gehöre automatisch ein "gegebener" Morphismenbegriff — dies aber eher, um zu vermeiden, daß man von vorneherein festgelegt ist und nicht mehr wechseln kann (6.3.2.2).

6.4.3 Die mengentheoretische Grundlegung der KT

Eines der Themen, die Bourbaki im Zusammenhang einer eventuellen Einführung der KT schwerpunktmäßig diskutiert hat, ist die Frage der mengentheoretischen Grundlegung der KT. Solche Fragen nehmen im Fall der KT auch *mainstream*-Mathematiker, die sich eigentlich nicht für axiomatische Mengenlehre interessieren, stärker in Anspruch, als dies durchschnittlich in üblichen mathematischen Arbeitssituationen der Fall ist; ich widme der historischen und systematischen Darstellung dieser Debatte im Ganzen daher ein eigenes Kapitel 7. Hier soll zunächst nur aus den Quellen belegt werden, daß die Frage bei Bourbaki keineswegs marginal war (während Corry darauf verzichtet hat, sich mit diesem Aspekt der Diskussion zu befassen); die technischen Einzelheiten der zur Sprache kommenden Vorschläge werden im nächsten Kapitel klarer.

Bei *Tribu 24* (1951.1) S.3 wird zu Logique et Ensembles notiert:

> certains ont bien envie de "gödeliser" pour traiter plus commodément de choses comme l'homologie axiomatique ou les applications universelles, mais se demandent si classes et ϵ sans restrictions, mis ensemble, ne vont pas canuler. Enfin Cartan se méfie d'un système "fermé" où tout est donné dès le début.

Mit *gödeliser* ist offensichtlich die Einführung einer Mengenlehre vom NBG-Typus im Anschluß an [Gödel 1940] gemeint, also einer Unterscheidung von Mengen und Klassen, nicht etwa die Verwendung einer Gödelisierung (Gödel-Nummern i. S. von [Gödel 1931]). Das Problem, das gesehen wird, bezieht sich darauf, ob Hilberts Auswahloperator ϵ gefahrlos auf Klassen ausgedehnt werden kann.

Die nächste Berührung mit dem Fragenkomplex findet sich erst in *Tribu 39* (1956.2); der im folgenden wiedergegebene Textabschnitt schließt im Original unmittelbar an den hier im Zusammenhang mit der *commutation des problèmes universels* wiedergegebenen Text (vgl. ⟨#76 S.240⟩–⟨#78 S.240⟩) an:

> Cartier propose une méthode métamathématique d'introduire [les catégories et fonc- #85
> teurs] sans modifier notre système logique. Mais ce système est vomi car il tourne #86
> résolument le dos au point de vue de l'extension [. . .] On décide donc qu'il vaut #87
> mieux élargir le système pour y faire rentrer les catégories ; à première vue le système Godel semble convenir. Afin de n'être pas le cul entre deux chaises, et aussi afin de ne
> pas retarder la publication d'un chapitre sur lequel on a beaucoup travaillé on décide #88
> (malgré le véto de Dixmier, retiré in extremis) d'envoyer le chap. IV à l'impression
> sans modifier les limites inductives, et en ajoutant les petites modifications relatives #89
> aux solutions strictes des problèmes universels. Quant aux catégories et foncteurs, on est finalement convaincus que c'est très important. D'où :

> Chap. V (Catégories et foncteurs) — Pour commencer Grothendieck rédigera une #90
> espèce de Fascicule de Résultats en style naïf, afin que Bourbaki se rende compte de
> #91 ce qu'il est utile de pouvoir faire. On formalisera ensuite.

Dixmiers Veto beruhte, wie dieser mir mitgeteilt hat, auf einer grundsätzlichen Ablehnung der *structures*.

Erinnern wir uns: Cartier schlug die Einführung der Kategorien und Funktoren vor, um Resultate über die *commutation des problèmes universels* zum Ausdruck bringen zu können, die Resultate Samuels über die *limites inductives* verallgemeinern. Die Notwendigkeit, diese Einführung der Kategorien und Funktoren mit Bourbakis *système logique* in Einklang zu bringen, ergibt sich aus dem Umstand, daß die *théorie des ensembles* zu diesem Zeitpunkt bereits vorlag (I-III) bzw. so gut wie druckreif war (IV); doch Cartiers Versuch, diesen Einklang herzustellen, erscheint nicht akzeptabel[410]. Man beschließt, E IV wie geplant zu publizieren; in einem zusätzlichen Kapitel V sollten dann Kategorien und Funktoren eingeführt werden, und zwar mit einem geeignet erweiterten logischen System; man denkt hier wieder an "Godel", also NBG.

Die Einschätzung *le système Godel semble convenir* konnte nicht mehr lange aufrecht erhalten werden[411]. In *Tribu 44* (1958.1) S.2 heißt es:

> Malgré le quiétisme de Cartan et d'une partie des jeunes couches, Chevalley, Serre, Dixmier et Samuel sont nettement d'avis qu'il faut une base logique solide pour les opérations qu'on veut se permettre de faire dans les catégories et foncteurs. On rejette le procédé artificiel consistant à limiter les cardinaux au moyen d'une astuce ad hoc (alephs inaccessibles par exemple). On a évoqué le système de Gödel, mais Chevalley doute qu'il soit assez puissant. En tout cas c'est une chose qu'il faut regarder. Dixmier en parlera avec Chevalley et fera un rapport pour l'an prochain.

Dixmier konnte mir nichts näheres dazu sagen, ob dieser *rapport* entstanden ist. Jedenfalls werden hier erstmals unerreichbare Kardinalzahlen ins Spiel gebracht — und als *ad hoc* zurückgewiesen (vgl. dazu eingehend 7.3.3). Diese Entscheidung wird nicht unangefochten bleiben; für den Augenblick beschließt man allerdings, auf die Vorschläge eines *"logicien professionnel"* zu warten (*Tribu 45* S.6):

> #92 Sammy essaye [. . .] de vendre un tapis sur les fondements logiques des catégories et foncteurs. La tribu ne le reproduit pas, car il a été vomi. On attend un papier de

[410] Es ist hier ein Kommentar zum Wortlaut der Passage *"Cartier propose une méthode métamathématique d'introduire [les catégories et foncteurs] sans modifier notre système logique. Mais ce système est vomi car il tourne résolument le dos au point de vue de l'extension"* ⟨#87 S.257⟩ angebracht: *"Ce système"* bezieht sich hier nicht auf *"notre système logique"* — nicht das logische System Bourbakis kehrt dem Gesichtspunkt der Extension den Rücken. *"Ce système"* hieße besser *"cette méthode"*, da nicht etwa *"notre système logique"* ausgespien wird, sondern Cartiers *"méthode métamathématique"*; *diese* kehrt vermutlich der extensionalen Sicht der Mathematik den Rücken, während es Bourbaki offenbar auf diese extensionale Sicht besonders ankommt. Im nächsten Satz *(élargir le système)* ist dann wieder *notre système logique* gemeint.

Es ist schwer zu sagen, welche *méthode métamathématique* Cartier vorgeschlagen hat. Cartier konnte mir einen betreffenden Entwurf nicht zeigen, erinnerte sich aber, daß er versucht hat, Kategorien im Stil der *structures* einzuführen; es müßte dazu nur noch die zugrundegelegte Mengentheo-

> Lacombe, qui a été consulté par Serre et Dixmier sur l'avis des logiciens professionnels.

Es ist unklar, welchen *tapis* Eilenberg da verkaufen wollte; ob es zu Eilenbergs Vorschlag überhaupt ein Papier gegeben hat (oder er ihn einfach an der Tafel unterbreitet hat), ist mir unbekannt (die bis dato bekannten Teile seines Nachlasses enthalten keine Notizen dazu). Das Papier von Lacombe ist tatsächlich entstanden und hat als *rédaction n˚301* Eingang in die *nomenclature* gefunden. Die Konsultation von Lacombe in dieser Frage ist zweifellos eine der frühesten Kontaktaufnahmen zur Fachdisziplin mathematische Logik in Sachen Grundlegung der KT[412].

Lacombe präsentiert in seinem Papier verschiedene Möglichkeiten; insgesamt zielen seine Vorschläge auf eine Unterscheidung von Mengen und Klassen und auf die Repräsentation problematischer Konstruktionen durch geeignete genügend kleine Vertretersysteme. Ich gehe an dieser Stelle nicht näher auf die Einzelheiten ein; entscheidend ist, daß ein anonymes Papier *n˚307* als Antwort auf *n˚301* erscheint. Die dort geäußerten Kritikpunkte geben indirekt auch einen Eindruck von Lacombes Vorschlägen; zugleich enthält das Papier wohl die erste Skizze des später so bezeichneten Verfahrens der Grothendieck-Universen (7.3). Das Papier beginnt so:

> Préambule —
>
> Il est certain qu'il faut pouvoir considérer les catégories, foncteurs, homomorphismes
> de foncteurs etc ... comme des objets mathématiques, sur lesquels on puisse quan- #93
> tifier librement, et qu'on puisse considérer à leur tour comme formant les éléments
> d'ensembles. Deux raisons à cette nécessité : Pour pouvoir effectuer sans contrainte
> pour les foncteurs les types de raisonnement (induction, etc ... proprement mathé-
> matiques, sans interminables contorsions pour sauve-garder la fiction du foncteur qui
> ne serait qu'un objet spécifié de la métamathématique ; parce que les ensembles de #94
> foncteurs ou d'homomorphismes fonctoriels, avec les diverses structures naturelles
> qu'on a sur eux (groupe d'automorphismes d'un foncteur donné, etc) sont d'un inté-
> rêt mathématique évident, et que bien des structures (structures semi-simpliciales,
> etc) s'expriment le plus naturellement en regardant les nouveaux objets à définir
> comme des foncteurs. #95
>
> Aussi la "solution" suggérée par Lacombe semble-t-elle tout à fait inadéquate. D'autre
> part, si on veut introduire une nouvelle catégorie d'objets mathématiques, les classes,
> qui seraient des "ensembles" trop gros pour qu'on ose les appeler par ce nom, la seule #96
> façon de les distinguer formellement des "vrais" ensembles semblerait d'interdire qu'ils #97
> puissent être eux-mêmes éléments de quelque chose (l'axiome de l'ensemble à un
> élément devenant donc la définition de la notion d'ensemble.) Or, on a dit qu'on ne

---

rie (ein Modell) gewählt werden, aber nichts am Grundlagenschema (Deduktion, Modelltheorie) geändert werden (insofern *sans modifier notre système logique*).

[411]Vgl. dazu die Parallele in der allgemeinen Entwicklung, dargestellt in Kapitel 7.

[412]Zur Datierung von *no˚301*: Das Papier ist nach dem Kongreß *45* (1958.2) entstanden wg. ⟨#92 S.258⟩; wahrscheinlich vor dem Kongreß *47* (1959.1) wg. ⟨#101 S.261⟩. Bei *Tribu 47* muß *n˚307* (eine Antwort auf *n˚301*, s.u.) vorgelegen haben; daher wurde wohl auf dem Kongreß *46* (1958.3) über *n˚301* gesprochen bzw. dieses zumindest ausgeteilt. In *Tribu 46* gibt es allerdings keine Erwähnung von Lacombe oder Universen.

> pouvait tolérer une telle interdiction. Donc il faut pouvoir considérer des classe de classes, et il serait naïf de croire qu'il sera possible de s'arrêter à ce second cran. Dès lors, on ne voit plus ce qui distingue les soit-disantes classes, hyperclasses etc. des vulgaires ensembles, étant tout comme ceux-là caractérisés par la collection de leurs éléments et étant tout comme ceux-là éléments d'autres collections ; si ce n'est qu'il apparaît dans l'Univers Mathématique une sorte de filtration naturelle. Les
> #98 opérations *coutumières* de la théorie des Ensembles (i.e. celles résultant de la stricte application des axiomes de Notre Maître) ne font pas sortir d'un cran donné U_i de la filtration, et il faut de nouvelles opérations comme celle correspondant à la notion intuitive de "formation de la catégorie de tous les objets" — plus correctement, de tous les objets de U_i — pour sortir de U_i, et entrer dans U_{i+1}. En vertu de ce qu'on vient de dire, de telles opérations ne pourront s'effectuer que moyennant un *nouvel axiome* dans la théorie des Ensembles, qui sera formulé plus bas. Ainsi, la formalisation des catégories, contrairement à ce qu'on a pu croire, se fait en réalité
> #99 dans une théorie *plus forte* que la théorie des Ensembles. Dans cette théorie chaque U_i pourra être considéré comme un modèle de la Théorie des Ensembles "affoiblie". [affaiblie ?]
>
> Bien entendu, quand on viendra à appliquer les notions et résultats de la "théorie des catégories" (une catégorie étant désormais comme tout le monde un ensemble, muni de certaines structures)[, il] ne peut pas être question, pas plus que par le passé, de parler de la catégorie de "tous" les ensembles, ou de "tous" les groupes abéliens etc. . . , si ce n'est encore qu'à titre d'objet purement métamathématique. Ce qui aura cependant un sens mathématique, c'est que pour chaque U_i, notre "hypercatégorie" induit sur U_i une véritable catégorie, à laquelle les résultats de la théorie sont applicables. Un certain nombre de théorèmes mathématiques assureront que ces résultats "s'induisent bien" quand on change d'Univers U_i. Ainsi, on pourra énoncer et démontrer des théoremes du type : Si C est une catégorie abélienne, satisfaisant des axiomes raisonnables (vérifiées par exemple pour la catégorie des faisceaux abéliens sur X qui se trouvent dans un univers donné), alors pour tout Univers U_i, tout objet injectif de la catégorie $C \cap U_i$ est aussi injectif dans C. (N.B. L'existence d'un générateur pour C doit être le genre d'hypothèses convenable ici). Il s'ensuit que les foncteurs dérivés s'induisent bien etc.. . .
>
> [. . .] Pour conclure, il me semble donc point qu'on soit obligé de rien changer aux trois premiers chapitres du Livre I [. . .] Il sera suffisant d'introduire au nouveau
> #100 chapitre 4 (qui remplacera l'ancien inutilisable de toutes façons) les axiomes supplémentaires de la théorie des ensembles, et y développer la théorie des catégories aussi loin qu'il semble désirable ; [. . .]

Der Text wendet sich, wie man sieht, ausdrücklich gegen die Vorstellung eines Funktors als metamathematisches Objekt ⟨#94 S.259⟩ — vgl. hier Weils Position, dargestellt in 6.4.2! Der Text ist zwar anonym; es ist aber bekannt, daß Grothendieck der Autor ist — Hélène Nocton hat eine Liste der *rédactions* geführt und dort auch die Autoren festgehalten. Diese Autorschaft liegt ohnehin sehr nahe, denn:

- es wird Wert darauf gelegt, daß mindestens der Apparat von [Grothendieck 1957] (Existenz eines *générateurs*, Beweisbarkeit der Existenz genügend vieler injektiver Objekte) den Universentransport heil überstehen sollte;

- an die wiedergegebene Präambel schließt die Definition und die Behandlung einiger grundlegender Eigenschaften der Universen an; dieser Teil des Textes sieht dem später in SGA 4 aufgenommenen Text sehr ähnlich[413].

- die im Text vorgeschlagene Konstruktion der Hierarchie von Universen wird später unter dem Namen "Grothendieck-Universen" bekannt — und zwar noch vor dem Erscheinen von SGA 4, dem ersten publizierten Text Grothendiecks, in dem die Universen eingeführt werden (vgl. 7.3.1).

Die Vorschläge erhalten Beifall; *Tribu 47* (1959.2) hat auf S.4 unter den *Décisions générales et géniales* betreffend *Catégories*:

> La mirifique théorie des univers, acclamée par tous, Cartan dissenting, permet maintenant de rédiger les catégories dans un cadre mathématique commode." #101

Man ist erstaunt über diesen Sinneswandel[414] gegenüber der Ablehnung des *astuce ad hoc* der *alephs inaccessibles* in *Tribu 44*; es ist allerdings nur ein Sinneswandel, wenn man Universen und Inakzessible in einen Topf wirft. Vielleicht erschien den Bourbaki-Mitgliedern tatsächlich der eine Zugang artifiziell und der andere überzeugend, obwohl beide im Ergebnis äquivalent sind (7.3.2.2). Zudem waren ja nicht beide Male die selben Bourbaki-Mitglieder anwesend[415]; auch gibt das Protokoll in der Regel wohl nur Ergebnisse von Mehrheitsentscheidungen wieder und keine einmütigen Beschlüsse[416]. Weil war jedenfalls beim Kongreß *47* nicht da[417]!

Der zitierten Passage aus *Tribu 47* folgen sehr detaillierte Bemerkungen. Außerdem ist in *Tribu 47* im Text *Réédition du chap.III de Topologie générale (n°s 305, 306, 314 et 315)* auf S.1 von *Univers, Ensembles artiniens, cardinaux inaccessibles* die Rede. Der Text *n°313 "Sur la signification intuitive des axiomes de la théorie des univers"* diskutiert das Problem der unbefriedigenden Vorläufigkeit von *n°307* und andere Fragen.

Damit endet der mir zugängliche Quellenbefund zur Diskussion Bourbakis über die mengentheoretische Grundlegung der KT; da schließlich doch kein Text über

[413]Die Reihenfolge und Benennung der Axiome ist etwas umgestellt; *n°307* hat — entsprechend dem Bourbaki-Brauch — Paare als Grundbegriff; entsprechend sind manche Axiome des SGA 4-Textes Sätze in *n°307* und umgekehrt.

[414]Cartans Dissens widerspricht nur scheinbar seinem *quiétisme* in *Tribu 44*; er ist vermutlich seiner Auffassung treu, einem *système "fermé" où tout est donné dès le début* zu mißtrauen, und dies betrifft natürlich ebenso den Ruf nach einer *base logique solide (=fermée)* aus *Tribu 44* wie die *mirifique théorie des univers.*

[415]Die Anwesenheitslisten — vgl. Anhang A.2.1 — geben nur ungefähren Aufschluß, da manch einer als nur partiell anwesend geführt wird (und also bei den entsprechenden Entscheidungen gefehlt haben mag).

[416]dies natürlich nicht im vorliegenden Fall *(acclamée par tous)*, aber womöglich bei *Tribu 44*.

[417]Offenbar war es Weil, der den Vortrag *"Foundations of Mathematics for the Working Mathematician"* [Bourbaki 1949] gehalten hat (vgl. 6.2). Dies könnte bedeuten, daß er dem dort gesagten besonders verbunden war und ihm dementsprechend alles suspekt war, was über die Möglichkeiten der dort gegebenen Grundlagen (grob gesagt ZFC) hinausgeht. *Nicht suspekt* war ihm ganz offensichtlich die Haltung des *working mathematician* zu Grundlagen, was eine Opposition gegen Kategorien verwirrender macht.

die KT entstanden ist, ist wohl davon auszugehen, daß an dieser Frage nicht mehr weitergearbeitet wurde[418].

6.4.4 Grothendiecks Trennung von Bourbaki

Dem *Tribu 53*-Paket (1961.1) in den *Archives Delsarte* liegt ein Text *"Ad majorem fonctori gloriam"* bei. Ein Autor ist nicht genannt; man hat das (zugegeben nicht sehr sensationelle) Indiz, daß es sich höchstwahrscheinlich um einen französischen Verfasser handelt (ein anderer hätte das pseudolateinische *"fonctori"* sicher *"functori"* geschrieben, da nicht von *foncteur*, sondern von *functor* abgeleitet.). Der Text beginnt (S.1) mit den Worten

> J'apprends que Grothendieck n'est plus membre de Bourbaki. Je le regrette beaucoup, ainsi que les circonstances qui ont amené cette décision.
>
> [...] Ce qui importait, c'est une opposition systématique, plus ou moins explicité selon les uns ou les autres, contre son point de vue mathématique, ou plutôt son emploi par Bourbaki.
>
> Or, comme l'a très bien remarqué Kaplanski dans sa dernière review, Bourbaki n'est plus le youth impétueux qu'il était il y a vingt ans, mais une fixture moyenne-ageuse [...]
>
> C'est un scandale que Bourbaki, non seulement ne soit pas à la tête du mouvement fonctoriel, mais encore n'y soit même pas à la queue. [...] Si certains membres fondateurs (e.g. Weil) désirent revenir sur leur décision de ne pas influencer Bourbaki dans la direction qu'il désire prendre, qu'ils le disent explicitement. [...]
>
> Comme suggestion pratique, je commence par proposer que Bourbaki adopte le livre de Grothendieck sur les catégories, ou toute autre variante, par exemple un fascicule de résultats extrait dudit livre.
>
> Si Bourbaki refuse, non pas de se mettre dans le nouveau mouvement, mais d'en prendre la tête, alors les traités visant à la rédaction des éléments de mathématiques (et pas seulement à ceux de la géométrie algébrique) seront rédigés par d'autres, qui s'inspireront non pas de l'esprit de Bourbaki 1960, mais de son esprit 1936. Ce serait dommage.
>
> Je prends l'occasion pour indiquer une liste de questions catégoriques qu'on peut poser systématiquement dans bon nombre de catégories.

Es sind hier einige Anspielungen zu erklären. Auf einen Vorschlag Weils geht das ungeschriebene Bourbaki-Gesetz zurück, Bourbaki-Mitglieder sollten sich im Alter von 50 Jahren aus der aktiven Teilnahme zurückziehen; diesen Vorschlag machte Weil in einem Brief, den Cartan auf dem Kongreß *39* (1956.2) vorlas, vgl. *Tribu 39* S.3. Zum Zeitpunkt des Kongresses *53* (1961.1) war Weil (Jahrgang 1906) bereits über 50 Jahre alt; insgesamt erweckt der Text den Eindruck, Weil habe (anstatt

[418][Sonner 1962] ist als ein Lösungsvorschlag für die Einbeziehung von KT in die *Éléments* angelegt, vgl. insbesondere ebd. S.173. Vor diesem Hintergrund erstaunt übrigens Sonners Angabe, Grothendiecks parallele Unternehmungen nur vom Hörensagen zu kennen.

seiner Selbstverpflichtung zur Zurückhaltung nachzukommen) weiterhin mit Nachdruck versucht, Einfluß auf die Entscheidungsprozesse Bourbakis zu nehmen, insbesondere was die Beurteilung von Grothendiecks Vorschlägen angeht. Auch läßt der Text vermuten, der Streit habe sich insbesondere an der algebraischen Geometrie entzündet[419]. Mit dem *review* von Kaplanski ist zweifellos [1960] gemeint, da die Formulierungen, auf die hier angespielt wird, dort zu finden sind. Allerdings ist in Kaplanskis *review* nicht der Vorwurf zu finden *que Bourbaki, non seulement ne soit pas à la tête du mouvement fonctoriel, mais encore n'y soit même pas à la queue*; in Kaplanskis Text kommt die KT überhaupt nicht zur Sprache. Von der zitierten und einigen anderen etwas spöttischen Bemerkungen abgesehen ist die betreffende Rezension übrigens ziemlich positiv.

Die Diskussion über die KT war jedenfalls mit Grothendiecks Ausscheiden nicht beendet. Es ist unklar, welches *livre de Grothendieck sur les catégories* oben gemeint ist; bei *Tribu 54* scheint auf S.6 die Rede von diesem Buch zu sein:

> Commentaires sur les Catégories et Foncteurs (3 cahiers polycopiés en noir, sans n°)
>
> Il s'agit d'un cavenas, envoyé par Grothendieck à l'un de ses scribes, qui doit en extraire un article ou un livre (15000 pages, in folio). Le Congrès l'a lu pour s'instructionner, mais Bourbaki ne sait encore si, quand et comment il fera les catégories et foncteurs.

Die Identität des *scribe* ist unklar; zugleich hätte man damit womöglich den Autor des *Ad majorem fonctori gloriam*-Textes. Für Chevalley spricht, daß es in *Tribu 56* (1962.1) auf S.2 zu *Ensembles* heißt:

> Pour les catégories et foncteurs, on regardera le bouquin de Chevalley-Grothendieck, mais la place d'un tel chapitre n'a pas été décidé (utilité d'y savoir un peu d'algèbre).

(die letzte Bemerkung ist wohl so zu verstehen, daß man der Auffassung ist, von den Kategorien könnte innerhalb der Hierarchie der Kapitel erst nach der Algebra sinnvoll gesprochen werden). Man vergleiche hier auch SGA 1 *Exposé VI* S.2 zu *Univers: "pour les définir, voir un livre en préparation par C.Chevalley et le conférencier* [Grothendieck]". Mit *Tribu 56* enden die mir zugänglichen Quellen zu Bourbaki.

Abschließend noch einige Bemerkungen zum Ausscheiden Grothendiecks. Viele der wiedergegebenen Passagen sprechen eine gutgelaunte, zuweilen rüde Sprache (*fourbi, canuler*, die Sache mit dem *scribe* u.v.a.m.). Aus dem *Ad majorem fonctori gloriam*-Text geht an einer (hier nicht zitierten) Stelle hervor, daß Grothendieck Mühe hatte, mit dem Bourbaki-typischen Humor zurechtzukommen[420]. Grothendiecks

[419] Eine Schlußbemerkung auf S.3 hebt die Bedeutung der Kategorienmethoden für die Bearbeitung der Weil-Vermutungen nach dem Plan Grothendiecks hervor; die an diese Passage anzulegende Hermeneutik ist wohl, daß die KT relevant ist für ein wichtiges (sogar vom KT-Opponenten Weil formuliertes und für wichtig gehaltenes) Problem.

[420] Der spezifisch rüpelhafte Umgangston bei Bourbaki hat nach [Beaulieu 1999] eine bestimmte Funktion, und zwar eine konservative (Stichwort *normaliens*). Beaulieus Beobachtung läßt sich an den hier betrachteten Texten gut bestätigen.

Ausscheiden mag auch noch andere Gründe haben, etwa daß er eine illusorische Zahl von Vortragsterminen im Séminaire Bourbaki einklagte und diese nicht bekam.

Es ist mir keine direkte Quelle zu Weils Reaktion auf die Vorgänge bekannt, aber wenn man das Vorwort von [Weil 1962] aufmerksam liest, spürt man, daß Weil im Grunde nicht bereit war, sein Buch in der neuen Auflage den neuen Sichtweisen der algebraischen Geometrie zu unterwerfen.

Im übrigen soll hier nicht der Eindruck entstehen, es habe sich bei den Beteiligten eine andauernde Verbitterung gegeneinander eingestellt. In der Spätphase der Grothendieck-Serre-Korrespondenz (also demjenigen Teil dieser Korrespondenz, der sich in den achtziger Jahren um *Recoltes et semailles* entsponnen hat) zeigt sich Serre erfreut über das, was Grothendieck über Dieudonné, Cartan und Weil im Blick auf seine frühe Zeit bei Bourbaki geschrieben habe (dies kann also wohl nichts Verbittertes gewesen sein; 23.07.1985) und teilt Grothendieck Einzelheiten zum Gesundheitszustand der drei Genannten mit; Grothendieck äußert sich in seiner Antwort, er habe sich gefreut, Neuigkeiten über die drei (darunter ausdrücklich auch Weil) zu erfahren (08.02.1986). Es scheint also selbst ein profunder Dissens in der Sache nicht ausgereicht zu haben, die Bande zwischen diesen beiden Menschen ganz durchzutrennen.

6.4.5 Die erkenntnistheoretischen Implikationen des Streits

Fassen wir Teile der Diskussion bei Bourbaki nochmals zusammen: KT wird zwar von vielen als sinnvollster Rahmen für die Entwicklung der Mathematik aus strukturalistischer Sicht angesehen, aber die Verträglichkeit der KT mit den bei Bourbaki gewählten mengentheoretischen Grundlagen steht in Frage (6.4.3); es wird eine Änderung dieser Grundlagen vorgeschlagen; diese Änderung kann sich aber nicht durchsetzen. Insgesamt können die Haltungen der Diskutanten von verschiedenen Gründen bestimmt sein: Weil hält an einem "Versehen mit Struktur" fest, ist Grothendiecks Methodik abgeneigt. Cartan ist gegen ein von Anfang an festgelegtes System (ihm ist vermutlich nicht an philosophischen Grundlagen gelegen). Ein möglicher erkenntnistheoretischer Grund (der in den Quellen nicht explizit benannt wird): Die hypothetisch-deduktive "Minimalforderung" ist bei Grothendieck-Universen nicht mehr erfüllt.

Welche Minimalforderung ist gemeint? Es ist zu klären, welche Probleme die Verfechter einer hypothetisch-deduktiven Linie mit zusätzlichen Axiomen der Mengenlehre wie dem Universenaxiom haben können. Diese Position besteht ja darin, zu sagen "es geht, da bisher noch nichts passiert ist"; man kann den *üblichen* Existenzannahmen, die mannigfach erprobt sind, trauen. Diese (ohnehin schon sehr eingeschränkte) Gewißheit verliert man natürlich, wenn man neues hinzunimmt, das bisher noch nicht der Erprobung anheimgestellt war und für das auch kein relativer Konsistenzbeweis möglich ist (7.3.2.2). Grothendieck bezieht also eine Position jenseits der hypothetisch-deduktiven: Er verzichtet auf die Rückbindung an Wohlerprobtes durch einen Beweis relativer Konsistenz; der letzte verbleibende "Garant" ist dann vielleicht noch, daß die eingeführten Konstrukte gerade zur *Vermei-*

dung von (aus der naiven KT resultierenden) Widersprüchen eingeführt wurden. Insgesamt scheint es aber eine Position der Indifferenz zu sein, die sich bezüglich der Widerspruchsfreiheit auf ihre "Intuition" (i.S. von Spürsinn) verläßt (vgl. auch ⟨#131 S.319⟩).

Grothendieck hält sich eher daran, ob ein Begriff der "richtige" ist; Kriterien dafür sind z.B. die Möglichkeit, durch reine Entfaltung des Begriffs Beweise wichtiger Aussagen zu erbringen, die Möglichkeit der Herstellung einer Analogie zwischen Disziplinen (zum Zwecke des "Methodenverleihs"), das Maß, in dem die zur effektiven Nutzung des Begriffs erforderliche Information verfügbar ist. Auch Grothendieck stellt grundsätzlich nicht den Gedanken in Frage, daß man es in einer "typischen" Arbeitssituation mit einer strukturierten Menge zu tun hat; er scheint es aber nicht so zu sehen, daß die Ausgangsobjekte der Untersuchung Mengen sind, die mit einer Struktur "versehen" werden, sondern höchstens Strukturen, zu denen man eine unterliegende Menge auszeichnen kann. Ihm geht es um "geometrische" Objekte, und was damit gemeint ist, kann gesondert gekennzeichnet werden (z.T. unabhängig von den "Punkten" der unterliegenden Punkt-Menge). Das Auszeichnenkönnen unterliegender Mengen ist wichtig im Blick auf bestimmte Methoden und Techniken (Kardinalitätsbetrachtungen, infinitäre Konstruktionen, die Existenz von Äquivalenzklassen für bestimmte Äquivalenzrelationen).

6.5 Stellungnahme: KT und Strukturmathematik

In einem zweiten Stadium der Strukturmathematik kam ein Interesse daran auf, über die Idee der mathematischen Struktur *innerhalb* der Mathematik zu sprechen (und nicht mehr nur, wie zuvor, über spezielle Strukturbegriffe), einen allgemeinen *mathematischen* Begriff ◁Struktur▷ zu haben. Meine darüber hinausgehende historische These ist die, daß ein solcher Begriff selbst *struktur*mathematisch hat sein sollen, so daß er nur dann seinen Zweck erfüllt, wenn er auf die von den einzelnen Strukturen insgesamt gebildete Struktur geht, also — vgl. Saussures Begriffsbestimmung, dargestellt in Anm.374 — die Verhältnisse dieser einzelnen Strukturen zueinander thematisiert. Dies scheint über eine reine Explikation hinauszugehen (die eher eine isolierte Untersuchung des Begriffs ◁Struktur▷ ermöglichen würde).

Die Grundidee der KT ist: Struktur ereignet sich im Strukturtransport (Pfeile). In der Strukturmathematik sind Konstrukte relativ charakterisiert, also durch ihr Verhalten unter Manipulationen; hierbei stellt man dieses Verhalten fest, indem man die Ergebnisse verschiedener Manipulationen vergleicht. Man kann die Gattung von Manipulationen, die man gerade betrachtet, wechseln. Die Perspektive des Versehens einer Menge mit Struktur leistet in der Strukturmathematik wichtige Dienste, ist aber letztlich artifiziell[421]; die Verwendung des Wortes Struktur ist in Wahrheit

[421]Es ist in einer allgemein kategorientheoretischen Situation nicht automatisch sinnvoll möglich, von einem Objekt als von einer mit Struktur versehenen Menge zu sprechen. Deshalb heißt es bei [Gelfand und Manin 1996, 78]

> We have to learn to treat an object of a category as if this object were a set endowed with

durch die Handlungsstrategien im Umgang mit "Struktur" abgegrenzt.

Ist man in der Erkenntnistheorie an Ontologie orientiert, so könnte man hier den Vorwurf erheben "Man muß erst wissen, was Struktur *ist*, bevor man wissen kann, wie man mit Strukturen umgeht". Ich behaupte, daß ein solcher Vorwurf nicht statthat, sondern daß man vielmehr das klarere durch das obskurere zu erklären versucht, wenn man in dieser Frage der Ontologie Priorität einräumt. Struktur ereignet sich im Umgehen mit etwas und "ist" nicht unabhängig von diesem Umgehen (Ockhams Rasiermesser).

Der Gedanke, die Thematisierung einer unterliegenden Menge könne obsolet sein, geht auf Lawvere zurück.

> In the mathematical development of recent decades one sees clearly the rise of the conviction that the relevant properties of mathematical objects are those which can be stated in terms of their abstract structure rather than in terms of the elements which the object were thought to be made of. The question thus naturally arises whether one can give a foundation for mathematics which expresses wholehartedly this conviction concerning what mathematics is about [...]. ⟨#121 S.306⟩

Longo greift die Aufgabenstellung, diese *conviction* zum Ausdruck zu bringen, auf und bewertet die jeweilige Eignung von Mengenlehre und Kategorientheorie als Rahmen für eine Theorie mathematischer Strukturen. Er geht aus von Cantors Satz, daß man eine bijektive Abbildung der reellen Gerade auf die reelle Ebene hat.

> Le théoreme de Cantor est donc un résultat négativ : il nous dit que la Théorie des Ensembles est un cadre fondationnel insuffisant pour les mathématiques, car elle est tout d'abord une théorie des ensembles de points où « tout se fonde » sur les points. En mathématiques, il y a *en premier lieu* des structures [...], tandis qu'en Théorie des ensembles celles-ci sont « superposé », chaque fois ad hoc, par rapport au cœur de la Théorie elle-même, les points sans dimension ni structure, dans son univers absolu de référence, la collection de tous les ensembles [Longo 1997, 15f].

Longos Sicht der Dinge ist also, daß die Mengenlehre insofern mit der strukturellen Sicht der Mathematik nicht gut zusammengeht, als sie zuallererst eine Theorie von aus Punkten bestehenden Mengen ist und solche Mengen immer erst *ad hoc* mit einer Struktur "versehen" werden müssen (in seinem Beispiel: die metrische Struktur, der es zu verdanken ist, daß trotz Cantors Satz der Dimensionsbegriff einen Sinn hat). Longo hält dafür (und begründet), daß die Kategorientheorie diese *"carences"* der Mengenlehre überwindet; er geht sogar so weit zu sagen:

> some structure. We have to be able to define the direct product or the limit of a projective system of objects, to define what one would call a group object, and so on. In classical constructions we use that objects are composed of elements (points), and that these points can be processed in various manners: one can form pairs or sequences, choose elements with a given property, etc.

Der Punkt ist, daß es eben auch nichtklassische Konstruktionen gibt, in denen dies nicht der Fall ist, und in denen man sich daher überlegen muß, wie man zu vergleichbaren Ergebnissen kommen kann.

> [...] en Théorie des Catégories on n'aurait même pas conjecturé le théorème de Cantor, car le plan et la droite y apparaissent dans les "bonnes catégories" [...] dans ces catégories, le plan et la droite [...] sont loin d'être isomorphes.

Es ist bezeichnend, daß Longo ein so weit zurückliegendes[422] Beispiel dafür anführen kann, daß die Zurückführung mathematischer Konstruktionen auf diskrete "Punkte" an ihre Grenzen kommt; auch bei [Poincaré 2002, 107] finden sich solche Gedanken — die *conviction* tritt also keineswegs erst in jüngster Zeit zutage[423].

[422]Randbemerkung: Longo geht es bei seiner Aussage *"en Théorie des Catégories on n'aurait même pas conjecturé le théorème de Cantor"* wohl darum, die durch die KT gegenüber der Mengenlehre gewonnenen Unterscheidungsmöglichkeiten zu preisen; *historisch* hat es nicht allzuviel Sinn, sich eine Mathematik vorstellen zu wollen, in der die KT vor Cantors Satz entstanden wäre. Im Gegenteil sehe ich es so, daß Cantors Satz genau zu den Ergebnissen gehört, die erst das Augenmerk auf die Bedeutung der Strukturen (Metrik, Topologie) gelenkt haben, und nach dieser Fokussierung hat ja erst die Strukturmathematik und dann die KT als deren "Ausgeburt" entstehen können. Nach meiner Hypothese hat Cantors Satz also erst gefunden werden *müssen*, bevor die anschließende Strukturmathematik hat konzipiert werden können.

[423]Dennoch wird diese *conviction* sehr kontrovers diskutiert. Harvey Friedman bestreitet, es könne noch etwas anderes "geben" als Punkte. Auf McLartys Bemerkung *"I do not believe that discrete structureless collections stand out among mathematical objects as the ones you have to know about to understand a foundation"* erwidert er *"The finite structureless collections seem to play a special role in thought and intellectual development. Bow to the inevitable!"* (`http://www.math.psu.edu/simpson/fom/postings/9801/msg00185`).

Kapitel 7

Mengentheoretische Grundlegung der KT

Die Möglichkeiten und Probleme einer mengentheoretischen Grundlegung der KT und das Interesse solcher Grundlegungen waren Gegenstand ausgedehnter Debatten. Ich werde die historische Entwicklung dieser Debatten etwas eingehender besprechen, als dies in bisherigen Arbeiten zur Geschichte der KT geschehen ist. Deren Desinteresse an der Frage steht im Einklang mit der häufig vertretenen Ansicht, die problematischen Konstruktionen seien für die mathematischen Anwendungen der Theorie ohne Bedeutung. Dennoch bin ich überzeugt, daß die Auseinandersetzung mit der Geschichte der Probleme und Lösungsversuche sowohl aus historischer wie aus philosophischer Sicht geboten ist.

Das Interesse des *Historikers* an der Frage beruht auf folgender Sachlage: Man hat es hier zunächst damit zu tun, daß mathematische Errungenschaften einerseits von großer Bedeutung, gleichzeitig unter einem bestimmten Blickwinkel aber auch kritikwürdig sind. Man kann hier also studieren, auf welche Weise die Rahmenbedingungen geändert werden, um die Ergebnisse beibehalten zu können; das Zusammentreffen von Relevanz und Kritik wirkt als Motor von Veränderung. Im speziellen vorliegenden Fall ist ferner der Blickwinkel, unter dem die Errungenschaften kritikwürdig sind, ein mengentheoretischer. Dadurch bleibt die Diskussion der Kritik nicht auf die Mitglieder der *community* beschränkt, die von Hause aus an den betreffenden Errungenschaften arbeitet, sondern auch Angehörige der Fachdisziplin Mengenlehre mit ihrer spezifischen Vermischung von mathematischen und philosophischen Inhalten fühlen sich auf den Plan gerufen. Ein Konflikt zwischen beiden *communities* entsteht (vgl. 7.1.5).

Welches Interesse hat der *Philosoph* an der Darstellung dieser Geschichte? Von der in der vorliegenden Arbeit bezogenen erkenntnistheoretischen Position scheint es unerheblich zu sein, daß sich bei der mengentheoretischen Realisierung der KT bestimmte Probleme stellen. Es steht außer Frage, daß sich solche Probleme stellen, wenn man KT mengentheoretisch fassen will; andererseits kann man auch fragen, was eine solche mengentheoretische Fassung aus erkenntnistheoretischer Sicht einbringt. Eine verbreitete Richtung in der herkömmlichen Philosophie der Mathematik sieht in der widerspruchsfreien Zurückführbarkeit auf Mengentheorie die Bedingung für die Möglichkeit des Erkennens der fraglichen Gegenstände. Ich habe bereits betont, daß ich dieser Auffassung nicht zustimme; aber gerade deshalb ist die Darstellung der Geschichte der Grundlegungsdebatte von großer Bedeutung für die erkenntnistheoretischen Überlegungen der vorliegenden Arbeit.

Mir scheint nämlich, daß sich aus dem entsprechenden historischen Befund ein weiterer Beleg ergibt für die These, in der Kategorientheorie sei man zur Konstruktion von Objekten in Bezug auf einen *common sense* auf technischer Stufe übergegangen. Denn die Probleme stellten sich ein, als man begann, Konstruktionen *auf* Kategorien vorzunehmen, als man auch diese Konstruktionen wie gewöhnliche mathematische Objekte behandeln, insbesondere mengentheoretische Operationen auf sie anwenden wollte, um sie ihrerseits zum Ausgangspunkt neuer Konstruktionen zu machen. Es ist richtig, daß die Mathematiker, die mit den Begriffen arbeiten, im Grunde weiterhin nach dem Muster "Menge mit Struktur" denken. Doch die Bemühung der Kategorientheoretiker — beginnend mit Grothendieck und fortgesetzt in der Theorie des elementaren Topos —, mengentheoretische Sprechweisen in der KT zu *simulieren*, die Möglichkeit solcher Sprechweisen zur wünschenswerten Situation zu machen (Stichwort repräsentierbarer Funktor), zeugt nicht allein von der Bedeutung des Mengenbegriffs für mathematisches Denken, sondern eben auch davon, daß KT als etwas begriffen wird, was die Verfügbarkeit mengentheoretischer Methoden nicht automatisch voraussetzt (sonst würde es sich erübrigen, diese zu simulieren oder überhaupt für etwas Wünschenswertes, also nicht selbstverständlich Verfügbares zu halten), was aber zugleich als legitimer Begriffsrahmen gilt (sonst würde die erwünschte Simulation nicht dort vorgenommen).

Das Kapitel beginnt mit einer kurzen Darstellung, welcher Art die auftretenden Probleme sind (7.1) und in welcher Form diese von den verschiedenen historischen Akteuren wahrgenommen wurden (7.2). Beginnend mit dem Abschnitt 7.3 kommen dann die wichtigsten Lösungsvorschläge für die mengentheoretischen Grundlegungsprobleme der KT eingehend zur Sprache.

7.1 Die Probleme und ihre Interpretation

7.1.1 KT und Probleme des "Selbstenthaltens"

Zur Darstellung der Probleme stellen wir uns zunächst, wie dies auch die Akteure der Frühphase getan haben, auf einen völlig naiven Standpunkt. Eine Kategorie ist, wie andere strukturmathematische Konstruktionen auch, eine Menge mit Struktur; sie hat also eine unterliegende Menge. Dieser Standpunkt bereitet allerdings bereits bei solchen Standardkategorien wie **Set** oder **Top** Probleme, denn **Set** müßte insbesondere die ihr unterliegende Menge als Objekt enthalten, und da jede Menge als diskreter topologischer Raum aufgefaßt werden kann (also auch die Menge, die **Top** unterliegt), müßte **Top** "sich selbst" (genauer: die ihr unterliegende Menge) als Objekt enthalten. Doch Phänomene im Zusammenhang mit Mengen, die sich selbst enthalten, haben in der Mengenlehre zu Problemen geführt, weswegen solche

Mengen dort explizit ausgeschlossen wurden. Eilenberg-Mac Lane sind sich dieser Problematik von Anfang an bewußt und halten fest: *"The difficulties and antinomies here involved are exactly those of ordinary intuitive Mengenlehre; no essentially new paradoxes are apparently involved"* ⟨#104 S.280⟩[424]. Unter ihren Lösungsvorschlägen findet sich der, eine andere Form von Mengenlehre anzuwenden, nämlich NBG. Dieses System beruht darauf, daß man, will man die Mengenlehre als Theorie der Extensionen von (in der Sprache der Mengenlehre formulierbaren) Prädikaten benutzen, zur Vermeidung von Widersprüchen innerhalb der Mengenlehre zwischen Mengen und echten Klassen unterscheiden kann, wobei echte Klassen dadurch ausgezeichnet sind, daß sie zwar Elemente haben, nicht aber selbst Element von etwas sein dürfen. Die oben genannten Kategorien werden dann unproblematisch[425]: **Set** unterliegt keine Menge, sondern eine echte Klasse, die folglich nicht Objekt von **Set** zu sein braucht; entsprechend tritt auch bei einer Kategorie der topologischen Räume kein Problem auf: es kann zwar jede *Menge* als diskreter topologischer Raum aufgefaßt werden, doch gerade deswegen unterliegt der Kategorie keine Menge, sondern eine echte Klasse. Für Eilenberg-Mac Lane waren die Probleme damit erledigt.

In einer zweiten Phase[426] des Arbeitens mit Kategorien traten allerdings Situationen immer mehr in den Vordergrund, in denen ein bestimmtes Prädikat zwar prinzipiell auch auf eine echte Klasse anwendbar zu sein scheint, durch eine solche Anwendung die Extension des Prädikats allerdings nicht mehr im Rahmen von NBG angebbar wäre, weil dann ja die echte Klasse Element dieser Extension sein müßte. Ein Spezialfall dieses Typs von Situationen (bei dem eine zusätzliche Schwierigkeit auftritt) ist die Anwendbarkeit eines Prädikats auf seine eigene Extension (die eine echte Klasse ist), also "Selbstenthalten" in einem naiv–klassentheoretischen Sinn. Eine Kategorie **Cls** der Klassen und Klassenabbildungen müßte die ihr unterliegende Klasse als Objekt enthalten. Eine Kategorie **Cat** der Kategorien und Funktoren müßte "sich selbst" als Objekt enthalten. Ein andere Situation dieses Typs ist die Kategorie aller Funktoren (zwischen gegebenen Kategorien) und natürlichen Transformationen: dort müßten (sollte der Urbildkategorie eine echte Klasse unterliegen) echte Klassen als Elemente der unterliegenden Morphismenklasse auftreten (weil eine natürliche Transformation eine Familie von Pfeilen ist, indiziert nach der Objektklasse der Urbildkategorie)[427].

Es ist natürlich die Frage zu stellen, ob diese "Problemfälle" in der Praxis nicht einfach umgangen werden konnten, d.h. ob man nicht einfach auf ihre Verwendung hat verzichten können. In der Tat hat man es in der *mainstream*-Mathematik ei-

[424]Zur Haltbarkeit und zur Hermeneutik dieser Aussage vgl. die Anmerkungen 436 und 439.

[425]In einer verbreiteten Terminologie ausgedrückt, die ich gelegentlich verwenden werde: es sind "große" Kategorien mit "kleinen" Objekten.

[426]Methodologisch läßt sich die Existenz zweier verschiedener Phasen z.B. so erarbeiten, daß man eine der beiden hier gegebenen Darstellungen der Probleme — die naive oder diejenige, die Mengen und echte Klassen unterscheidet — an den Befund als "Muster", Vergleichsmittel anlegt. Eine ähnliche Rolle kann ein solches Muster dabei spielen, verschiedene Parteien in der Diskussion zu identifizieren.

[427]Dieses Problem bespricht erstmals [Mac Lane 1961] (vgl. 7.4.1); [Isbell 1963] unterscheidet feiner verschiedene Typen von Problemen mit Funktorkategorien.

gentlich selten mit **Cls** zu tun und kommt zumeist mit **Set** aus. Es verbleiben die beiden "KT-internen" Fälle — Funktorkategorien und **Cat** —; für diese bespreche ich in 5.2.3.2 bzw. 5.2.3.3, daß (und wann genau) sie sehr wohl wünschenswert waren. Daß ich hier einen Akzent auf die KT-internen Konstruktionen setze, hat damit zu tun, daß ich den Paradigmenwechsel im Übergang zu Konstruktionen *auf* Kategorien erblicke (7.2).

Es sind verschiedene Auswege für die Probleme ausprobiert worden. Müller skizziert die Situation folgendermaßen:

> If we insist that category theory should be closed under any desired diagonalisation (self application), we have to pay some price for this, e.g. inconsistency, some sort of type raising, some restriction to partially defined objects or some artificial devices. [Müller 1976] vii

Die verschiedenen Vorschläge sind jeweils parallel zu bestimmten Richtungen in der modernen Forschungsdisziplin "Mengenlehre"; insofern ergibt sich im Folgenden auch eine partielle Übersicht über die moderne Entwicklung der Mengenlehre[428] in ihren verschiedenen Facetten.

Bell stellt den Zusammenhang her zwischen den Grundlegungsproblemen der KT und dem Fehlen einer allgemeinen Theorie von "Eigenschaften".

> [...] the failure of set theory to justify the unlimited application of category-theoretic operations is a consequence of its success in eschewing the overcomprehensive collections which were originally deemed responsible for the paradoxes. [...] In fact, set theory's failure to embrace the notion of arbitrary *category* (or structure) is really just another way of expressing its failure to capture completely the notion
> #102 of arbitrary *property*. This suggests the possibility that a suitable framework for 'full' category theory could reasonably be sought within a theory of such arbitrary properties [1981a, 356].

Bells implizite Annahme, es könne eine solche *proper presentation* jenseits der üblichen Mengenlehren überhaupt geben, ist berechtigt, denn das Problem besteht ja unter anderem darin, daß es in den üblichen Mengenlehren für eine echte Klasse nicht "legitim" (im Sinne von 7.1.2) ist, Element von etwas zu sein (d.h. man trifft die Konvention, dies nicht zuzulassen[429]) — doch nichts *zwingt* einen dazu, diese Konvention zu treffen; sie erfüllt eine Aufgabe (nämlich die von Bell benannte des Ausschlusses der Paradoxe), doch es gibt keinen Anhaltspunkt dafür, daß diese Aufgabe nicht auch anders erfüllt werden könne. Dies ist sogar für das als "besonders problematisch" erscheinende Selbstenthalten der Fall, wie wir gleich sehen werden.

7.1.2 Legitime Mengen

Ob bestimmte Mengen "legitim" sind, hängt davon ab, welche Mengentheorie man zugrundelegt. Denn es gibt ja nicht "die" Mengentheorie. Es gibt einmal einen naiven Mengenbegriff (die Menge aller Dinge mit einer gegebenen Eigenschaft) und

[428] In 1.2.2.2 wird daran erinnert, daß das Auftreten der Probleme des Selbstenthaltens die Mengenlehre nachhaltig verändert hat.

[429] Die Akzentuierung, daß diese Konvention "störend" ist, findet sich schon bei *n°307* (vgl. 6.4.3).

zum anderen, da dieser Begriff auf bekannte Probleme führt, verschiedene präzise Explikationen des Begriffs. Eine Menge im Sinne *einer* solchen Explikation ist nicht notwendig eine solche im Sinn einer anderen.

Der Begriff “legitim” kann nicht einfach den Begriff “unproblematisch” ersetzen. Einmal kann es Konstruktionen geben, die vielleicht unproblematisch sind, von der gewählten Fassung des Axiomensystems aber trotzdem als illegitim abgestempelt werden, weil es ein “vorsichtiges” System ist, das mit bekanntermaßen problematischen Konstruktionen gleich auch noch alle verwandten Konstruktionen ausschließt. Zum andern weiß man über die Widerspruchsfreiheit der verschiedenen Mengentheorien nichts: sie könnten sehr gut neue problematische Konstruktionen zulassen, die man nur noch nicht entdeckt hat.

Russells Kollektion <Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten> führt auf einen logischen Widerspruch[430]; sie ist also nicht einfach nur illegitim in der einen oder anderen Axiomatisierung der Mengenlehre, sondern grundsätzlich problematisch. Es ist jedoch lediglich ein weitverbreiteter Irrtum, anzunehmen, dies sei zugleich auch schon mit *jeder* Form von Selbstenthalten automatisch der Fall. Beispielsweise scheint die Kollektion “Die Menge aller Mengen” (die weit weniger “pathologisch”[431] ist als Russells Kollektion) oft deshalb abgelehnt zu werden, weil sie sich insbesondere selbst enthalten müßte, aber dies ist zunächst kein zwingender Grund, eine solche Menge abzulehnen. Ein solcher ergibt sich vielmehr aus dem Satz von Cantor (für jede Menge M gilt $|\mathfrak{P}(M)| \gneqq |M|$); das Argument ist das folgende: Die Kardinalität der Menge aller Mengen *kann* (in Widerspruch zu dem bewiesenen[432] Satz) gar nicht kleiner sein als die ihrer Potenzmenge, weil ja jedes Element der Potenzmenge (also jede Teilmenge der Menge aller Mengen) Menge ist und damit Element der Menge aller Mengen [Copi 1971, 7].

Vor diesem Hintergrund ist das generelle Verbot von Selbstenthalten, wie es bei ZF im Fundierungsaxiom (FA) enthalten ist, ein “starker” Ausweg aus den Problemen mit Selbstenthalten; einen solch starken Ausweg *muß* man aber nicht wählen. (Das ist fast trivial, denn wenn FA oder sonst irgendein Axiom der Mengenlehre eine logische Wahrheit wäre, gäbe es keinen Grund, es *anzunehmen*.) Ich vermute, das Axiom FA hat, obgleich selbst aus Gründen anderer Art formuliert[433], manch einen auf die irrige Annahme geführt, die Menge aller Mengen sei grundsätzlich problematisch, weil sie sich insbesondere selbst enthalten müßte — richtig ist nur, daß unter Annahme von FA für *alle* Mengen gilt, daß sie sich nicht selbst enthalten, die beiden Begriffe <Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten> und <die Menge aller Mengen> also zusammenfallen. Das Selbstenthalten der Menge aller Mengen wäre also gewissermaßen *erst durch* FA problematisch.

[430] Man muß allerdings vorab folgendes akzeptiert haben: Zu einer Menge kann man stets sinnvollerweise die Frage stellen, ob sie ein vorgelegtes Objekt enthält oder nicht. Es ist die Intention des (naiven) Mengenbegriffs, daß diese Frage für eine Menge eine sinnvolle Frage ist.

[431] Vgl. 1.1.2.1.

[432] mit dem üblichen Diagonalargument; vgl. auch 7.4.2.

[433] Der tatsächliche Grund für die Einführung dieses Axioms waren Unentscheidbarkeitsfragen [Quine 1958, 156].

Es wurden Mengenlehren ohne FA vorgeschlagen[434]. Auch in solchen Mengenlehren ist die Menge aller Mengen illegitim; im Beweis des Satzes von Cantor kommt FA nicht zum Tragen.

7.1.3 Die Widersprüchlichkeit der unbeschränkten KT

Leider kann man bei der Bemerkung, illegitime Mengen seien noch nicht automatisch problematisch, nicht stehenbleiben. Es lassen sich in einer unbeschränkten KT (wo also so getan wird, als seien alle vorkommenden Kollektionen unproblematisch) Widersprüche ableiten. Beispielsweise kann man ableiten, daß jeder Funktor auf einer vollständigen[435] Kategorie einen Adjungierten hat (was offensichtlich falsch ist); die Ableitung ist möglich, da, wenn alle Kollektionen Mengen sind, Freyds *solution set condition* immer erfüllt ist. Dieser Widerspruch spielt natürlich eine Rolle für die Praxis; die Aussage betrifft keine pathologischen Konstruktionen, sondern würde zahlreiche Argumente von praktischer Relevanz unbrauchbar machen[436].

7.1.4 Der *common sense* der Kategorientheoretiker

Doch selbst vor dem ernüchternden Resultat aus 7.1.3 bleibt der Eindruck bestehen, "im Prinzip" sei mit solchen Konstruktionen wie Funktorkategorien oder **Cat** alles in Ordnung. Man erinnere sich an Lawveres Aussage *"Our intuition tells us that whenever two categories exist in our world, then so does the corresponding category of all natural transformations between the functors from the first category to the second"* (vgl. 1.2.4). Ähnlich hat Grothendieck reagiert, als Lacombe[437] feststellte, die Aussage *"la composition de foncteurs se comporte formellement comme un bifoncteur"* (also die Bildung beliebiger Funktorkategorien) sei nicht *"exprimable à l'aide des classes"* (vgl. 7.2.2): dann erfasse ein Ausdrücken mithilfe von Klassen eben nicht das intendierte Modell, denn: *"il est certain qu'il faut pouvoir considérer les catégories, foncteurs, homomorphismes de foncteurs etc ... comme des objets mathématiques, sur lesquels on puisse quantifier librement, et qu'on puisse considérer à leur tour comme formant les éléments d'ensembles"* ⟨#93 S.259⟩. Es geht dem Mathematiker nicht um Ontologie, sondern um ein Fortfahren in einem Konstruktionsprozeß, in dem Resultate einer Konstruktion Ausgangspunkte einer neuen

[434] Quines *stratification* ist z.B. cleverer als FA [1958, 157]. [Müller 1981, 265] weist darauf hin, Bernays habe 1958 gezeigt, daß man FA in der Mengenlehre praktisch nicht braucht. In jüngerer Zeit ist der Vorschlag der *"hypersets"* recht populär geworden; vgl. [Barwise und Moss 1991]. Natürlich wird FA nicht einfach nur fallengelassen, sondern durch ein anderes Axiom — das *anti-foundation axiom* AFA — ersetzt, das weiterhin in der Lage ist, bekannte problematische Kollektionen auszuschließen (indem der Aufbau einer Hierarchie der *hypersets* kontrolliert wird) und Entscheidbarkeit sicherzustellen. Vgl. auch 7.4.2.

[435] wobei es vermutlich sogar überflüssig ist, diese Präzisierung vorzunehmen, da in der KT erster Stufe Vollständigkeit als Begriff trivalisiert wird; vgl. ⟨#113 S.301⟩.

[436] Zugleich stellt man fest, daß in diesem Stadium der Begriffsentwicklung das Eilenberg-Mac Lane-Diktum *"no essentially new paradoxes are apparently involved"* ⟨#104 S.280⟩ nicht mehr stehen bleiben kann.

[437] Vgl. 6.4.3.

werden können (aufgrund ihres "rein formalen Verhaltens"). So ist auch Lawveres Aussage zu verstehen — jene Intuition bezieht sich auf *Formales*, ist ein *common sense* auf *technischer* Stufe[438].

Dieser *common sense* wird spürbar, wenn folgender Unterschied zwischen den problematischen Konzepten in der KT und den Antinomien der Mengenlehre behauptet wird:

> The restrictions employed [by Grothendieck-Universes or NBG] seem mathematically unnatural and irrelevant. Though bordering on the territory of the paradoxes, it is felt that the notions and constructions [as the category of all structures of a given kind or the category of all functors between two categories] have evolved naturally from ordinary mathematics and do not have the contrived look of the paradoxes. Thus it might be hoped to find a way which gives them a more direct account [Feferman 1977, 155].

Was ist mit dem *contrived look of the paradoxes* gemeint? Wo eine Frage im Zusammenhang der Erprobung eines formal definierten Konzepts beantwortet werden soll, bedient man sich meist eines möglichst direkten Wegs und versucht, eine Situation zu konstruieren, die zwei Eigenschaften hat: sie erfüllt die in der formalen Definition des Konzepts gegebenen Kriterien für dessen Anwendbarkeit, und es kann für sie nur eine der möglichen Antworten auf die Frage zutreffen. Bei der Konstruktion der Situation läßt man sich also allein davon leiten, daß das Konzept auf sie anwendbar ist und daß sich die in Rede stehende Frage klar beantworten läßt. Nun sind Fragen, die sich aus der metamathematischen Analyse eines Konzepts ergeben, häufig von anderer Art als solche, die sich aus seiner Verwendung als Werkzeug zur Bearbeitung mathematischer Fragestellungen ergeben. Daher führt dort der beschriebene Konstruktionsweg häufig auf Situationen, die sehr verschieden sind von den Situationen, in denen das Konzept gewöhnlich als ein solches Werkzeug genutzt wird. Es haftet dann den Konstrukten aus der Sicht des Benutzers etwas "pathologisches" an (1.1.2.1). Doch genau dies ist bei den problematischen Konstrukten der KT nicht der Fall[439]!

Hier kommt eine interessante Konsequenz der Vorstellung von einem *common sense* auf technischer Stufe zum Vorschein: Nicht die "rein formalen" Konstruktionen werden als pathologisch wahrgenommen, sondern diejenigen Manipulationen, die geeignet wären, darzulegen, daß die Konstruktionen problematisch sind (das sind die Manipulationen, die die Konstruktionen dem Zustand des "rein Formalen" entreißen und sie mengentheoretisch realisieren). Man ist durch das erfolgreiche Arbeiten mit den Konstruktionen darauf trainiert, sie nur in bestimmter, vermutlich

[438] Man denke hier auch an Grothendiecks Ziel im Tohoku-Artikel, eine *formale* Analogie auszubeuten.

[439] Dies ist also durchaus ein "wesentlicher" Unterschied zu den mengentheoretischen Antinomien, im Gegensatz zum Eilenberg-Mac Lane-Diktum (das jene Konstrukte natürlich noch nicht mit im Blick hatte). Es ist indessen klar, welche Funktion dieses Diktum hatte: Etwaige Zweifel an der neuen Theorie sollten zerstreut werden; sie sei höchstwahrscheinlich relativ konsistent zur Mengenlehre. Man muß hier bedenken, daß damals die Mengenlehre bereits gut etabliert war, während man der neuen Theorie recht skeptisch gegenüberstand (2.4.1).

unproblematischer Weise zu benutzen, und kann folglich die vorgeschlagenen Manipulationen nicht in Einklang bringen mit der (technischen) Intention. Die Rede vom "rein formalen Verhalten" ist vergleichbar mit dem Rechnen mit formalen Potenzreihen, wo man sich nicht um Konvergenzbetrachtungen schert. Die KT will keine Aussagen machen über mengentheoretische Realisierung (also gewissermaßen über das Verhalten unter Einsetzen von Werten für die Unbestimmten).

Ähnlich wie Feferman angesichts der Komplikationen mit Universen[440] die Hoffnung auf einen *more direct account* artikuliert, interpretiert Isbell die Situation:

> The well known fact that some basic constructions applied to large categories take us out of the universe seems to me to indicate that the constructions are not yet
> #103 properly presented. The discovery of proper presentations is too difficult, though, for all work on these constructions to wait for it [Isbell 1966, 620].

Die intendierten Konstruktionen werden also als *basic* empfunden; hier besteht offensichtlich ein Bezug auf einen technischen *common sense*. Die Unvereinbarkeit der Konstruktionen mit einer anderen Basis (der Mengenlehre) ist Indiz des "Basiswechsels", des Einführens neuer Grundobjekte jenseits von Abstraktion. Isbells Position ist letztlich eine neue hypothethisch-deduktive Position: Die Konstruktionen sind "klar", lediglich noch nicht *"properly presented"* — doch deshalb kann die Arbeit mit diesen Konstruktionen nicht aufgehalten werden. Die Zulässigkeit solcher Arbeit hängt also nicht von der *proper presentation* ab, sondern von einem neuen *common sense*. Die Aufgabe einer Grundlegung ist demnach lediglich, diesen *common sense* zum Ausdruck zu bringen, d.h. den Eindruck, den die Kategorientheoretiker aus ihrer Arbeit haben, daß nämlich mit den Konstrukten, die sie verwenden, "alles in Ordnung" ist, formal überprüfbar zu machen (Kommunikationsanteil; vgl. 1.3.4).

Es besteht nun allerdings die Gefahr, daß der *common sense* sich über den möglichen Beitrag einer metamathematischen Analyse der Situation zu leichtfertig hinwegsetzt. Darauf weist [Blass 1984, 6] hin; zunächst liest man: *"What is the appropriate set-theoretic foundation for category theory? [...] Answer 1. None"*. Blass zeigt jedoch sogleich auf, daß diese erste, naive Antwort für bestimmte Fragestellungen unzureichend ist:

> The point of this answer is that for its own internal development category theory, like most branches of mathematics, does not need a set-theoretic foundation. Once the basic concepts are clearly understood, their set-theoretic encoding is irrelevant[[441]].

[440]Auf diese Komplikationen komme ich in 7.3.4 kurz zurück.

[441]Blass' nebenbei geäußerte Stellungnahme zu Klarheit und Verstehen *(once the basic concepts are clearly understood, their set-theoretic encoding is irrelevant)* unterstützt meine Sicht der Objektkonstruktion in der KT. Zunächst ist hier zweifellos von einem *kollektiven* Verstehen die Rede: der übliche Diskurs sieht im klaren Verstehen von Konzepten die Aufgabe der Disziplin Mathematik als ganzer ("Wir verstehen das noch nicht, es ist noch nicht (völlig) verstanden"); es geht nicht um das individuelle Lernen. Dann bedeutet aber Blass' Aussage, daß Quines Vorstellung, die Gegenstände der Wissenschaft könnten nur Extensionen sein (1.3.4), ins Wanken gerät. Genauer: die *basic concepts* dienen ja zuallererst als *Werkzeuge*; wird entsprechend der Reflexivität der Mathematik (Corry) zu diesen Werkzeugen eine interne Theorie entwickelt, hat man sich laut Quine, da bei diesem Vorhaben diese Konzepte zu Gegenständen werden, auf die Untersuchung von Extensionen

> [...] But this approach is not adequate for answering questions like: Does category theory necessarily involve existential principles that go beyond those of other mathematical disciplines? At first sight, the answer to this question is yes, because of the need for large (and superlarge and ...) categories; a more careful analysis amounts to an attempt to provide a set-theoretical foundation for category theory.

In der Tat scheint Kreisel zu dem Ergebnis zu kommen, daß die von Blass angeführte metamathematische Frage *"Does category theory necessarily involve existential principles that go beyond those of other mathematical disciplines?"* zu verneinen ist; vgl. Abschnitt 7.4.3. In der üblichen Arbeitssituation hingegen wird diese *more careful analysis* Kreisels nicht zur Kenntnis genommen; man beruft sich vielmehr auf die Intuition des Experten, indem man sich die Freiheit nimmt, solche Existenzprinzipien zu benutzen, am Anfang *pro forma* Sicherheitsmaßnahmen trifft (z.B. annimmt, es seien die für nötig gehaltenen Universen verfügbar), in der praktischen Arbeit aber nicht mehr fragt, was diese Maßnahmen an Komplikationen mit sich bringen. Ein Beispiel:

> The [...] naive definition of *Set* forbids some categorical constructions we will consider later. The standard way of dealing with the situation is to introduce the Universe, i.e., a large set of sets which is closed under all necessary operations, and to consider only the sets belonging to the Universe. Later in this book we will always assume, whenever necessary, that all required hygiene regulations are obeyed. [Gelfand und Manin 1996, 58]

Gleichzeitig gibt es nicht nur Kreisels Option einer *more careful analysis*; vgl. 7.4.4.

7.1.5 Die Parteien der Diskussion

Die vorausgehenden Ausführungen legen nahe, was der historische Befund bestätigt: man kann in der Diskussion grob zwei Parteien ausmachen, nämlich auf der einen Seite diejenigen, die KT in bestimmten mathematischen Fragestellungen anwenden möchten und sich von dieser Warte notgedrungen dafür interessieren, was man über die Konsistenz der KT sagen bzw. welche Vorsichtsmaßnahmen man treffen kann; auf der anderen Seite die Vertreter des Fachs Mengentheorie, die sich auf den Plan gerufen fühlen, da die Diskussion dieser Konsistenz und dieser Vorsichtsmaßnahmen

---

zu beschränken und insofern für eine mengentheoretische Codierung der Konzepte zu interessieren. Das klare Verständnis der Konzepte beruht aber in Wahrheit darauf, die Kriterien ihrer sinnvollen Anwendung zu kennen; diese Kriterien steuern den Umgang mit KT in der Anwendungssituation und die Auswahl relevanter Fragen über die Konzepte der KT in der Untersuchungssituation. Insbesondere sind innerhalb der KT bestimmte Konzepte *basic*; hingegen ist es nicht die mengentheoretische Codierung von irgendwas, die *basic* ist; schon durch die Rede von "Codierung" ist sie als etwas Nachträgliches, Sekundäres gekennzeichnet. Die Basis für die Entwicklung der internen Theorie ist nicht die Mengentheorie. Mit dem temporalen Akzent *(Once)*, den Blass setzt, meint er meines Erachtens lediglich, daß die formale Explikation (insbesondere also auch die mengentheoretische Codierung) zunächst Voraussetzung für das mathematische Arbeiten mit den *basic concepts* ist (Stichwort Kommunikationsmittel), nicht, daß sie und nur sie zum Verstehen des Konzepts führt.

in ihre Kompetenz fallen. Ich bezeichne im folgenden kurz die erste Gruppe von Mathematikern als “Kategorientheoretiker” und die zweite als “Mengentheoretiker”; diese Termini sind ausdrücklich nur als Abkürzungen für die Angehörigen der gerade genauer charakterisierten Gruppierungen gemeint.

Ein Konflikt zwischen beiden *communities* entsteht dadurch, daß die Kategorientheoretiker in der Rolle der “Wahrer der Errungenschaften” ausschließlich auf diejenige Kritik eingehen, die sie nicht umhinkonnten, selbst, unter “Arbeitsbedingungen”, zu artikulieren, sich aber für die Kritik der Mengentheoretiker (die gewissermaßen unter “klinischen” Bedingungen artikuliert und entsprechend anders akzentuiert ist) nicht interessieren; entsprechendes gilt für die Lösungsvorschläge der jeweiligen *communities* (die sich natürlich jeweils auf die Kritik in ihrer jeweiligen Ausprägung beziehen). Es kommen also in den jeweiligen *communities* verschiedene Kriterien zur Anwendung; so wird die Behauptung, die problematischen Konstruktionen seien für die mathematischen Anwendungen der Theorie ohne Bedeutung, keinesfalls nur von den Protagonisten der KT eingesetzt, um Bedenken zu zerstreuen; sie wird auch von Kreisel vorgetragen, um zu untermauern, daß die von den Protagonisten als Sicherheitsmaßnahme vorgenommene Verstärkung der Mengenlehre überflüssig ist (vgl. dazu 7.4.3) — und zwar hebt Kreisel diese Einsicht wahrscheinlich hervor im Blick auf die Vermeidung bestimmter Zusatzannahmen, die aufgrund des Ergebnisstands der Mengenlehre als Forschungsdisziplin kontingent sind[442] (will sagen: man verliert durch solche Zusatzannahmen einen Freiheitsgrad in der Wahl seines mengentheoretischen Modells, und zwar im vorliegenden Fall ohne Berücksichtigung der von den Mengentheoretikern erarbeiteten Kriterien für die Wahl eines solchen Modells). Aus Sicht der Kategorientheoretiker hingegen hat die Sicherheitsmaßnahme die Aufgabe, den freien Fluß der Ideen zu ermöglichen, ein uninteressantes Problem auszuschließen.

> Mit der Grundlagenforschung als Spezialdisziplin hier und der ›eigentlichen‹ Mathematik da hat sich eine ›Lösung‹ des Begründungsproblems ergeben [. . .] Der mathematische Diskurs ist nicht nur mehrschichtig, er spaltet sich auch auf und nimmt Grundsatzfragen damit ihre Brisanz [Mehrtens 1990, 149].

Die erste Arbeit, die allein den Grundlegungsproblemen der KT gewidmet ist, ist Mac Lanes Vortrag auf der Warschauer Logikkonferenz 1959; vgl. zu dieser Arbeit eingehend 7.4.1. Hier scheint Mac Lane die Mengentheoretiker-*community* erstmals auf die Fragen aufmerksam zu machen[443]. Aus den Reihen der Mengentheoretiker

[442] Vgl. 7.3.3.

[443] Die Warschauer Konferenz darf als große Logiker-Konferenz angesehen werden (Teilnehmer waren Bernays, Fraenkel, Tarski etc.). Da Mac Lane seine Arbeit an diesem Ort vortrug, scheint es, als habe er einen Appell an die Vertreter der Fachdisziplin Logik und Mengenlehre richten wollen (vgl. sein Schlußwort). Mac Lane, der gewissermaßen “zufällig” zu beiden *communities* gehört, wurde womöglich von seinem alten Lehrer Bernays nach Warschau eingeladen; es liegt ferner nahe anzunehmen, daß Mac Lane, der nun schon über zwei Jahrzehnte hauptsächlich auf einem ganz anderen Arbeitsgebiet tätig war, sich für das Vortragsthema entschied, um einen Kompromiß zwischen dem Thema der Tagung und seinen eigenen Interessen zu erreichen. Auch mag er sich erhofft haben, durch den Dialog mit den zuständigen Experten die Lösung der Probleme weiter voranzu-

scheint zuerst Kreisel zu der Frage publiziert zu haben (vgl. 7.4.3). Welche "führenden" Mengentheoretiker haben sich der Suche nach Lösungen gewidmet? Ich sehe im wesentlichen [Feferman 1969] mit [Kreisel 1969] (sowie ein paar andere Arbeiten von Feferman), [Kreisel 1965] und [Lévi 1973]. Doch hier wäre methodologisch zunächst zu klären, wann ein Forscher in seiner Disziplin "führend" ist und wann nicht; man könnte sich dann noch dafür interessieren, ob andere "führende" Mengentheoretiker ein Arbeiten an den Problemen explizit abgelehnt haben und wie sie diese Ablehnung gegebenfalls begründet haben. Weiter kann man fragen, inwieweit andere Mengentheoretiker, die ebenfalls an den Fragen gearbeitet haben (Sonner, Osius, Kühnrich, ...), über ihre Beiträge zur Fundierung der Kategorientheorie hinaus in der *community* der Mengentheorie etabliert sind. Schließlich sollte man sich, wenn man schon von einem *community*-spezifischen Umgang der Mengentheoretiker mit den Problemen ausgeht, damit befassen, wie sich das auf ihre Ergebnisse und deren Verbreitung unter den Kategorientheoretikern ausgewirkt hat: Wie werden die Legitimität der Fragen und die Adäquatheit der Antworten jeweils beurteilt? Wo sind die Ergebnisse zu finden, und an welche Art Leser richten sich die Texte expositorisch? Es ist hier nicht Raum, all diese Fragen im Detail anzugehen; ich bemühe mich aber, sie, wo es möglich ist, *en passant* zu besprechen.

7.2 Problembewußtsein und Entwicklungsstand der KT

Die bisherigen Ausführungen haben bereits verdeutlicht, daß es historisch vereinfachend wäre, zu sagen, die KT hat das und das Problem und damit wurde so und so umgegangen. Welche Probleme sich in der praktischen Arbeit stellen, hängt vom Entwicklungsstand der Theorie ab. Ich sehe drei Stadien der KT, die von je verschiedenen problematischen Konstruktionen Gebrauch machen und je verschiedene Einstellungen dazu haben, was die Probleme eigentlich über die KT bzw. die Mengenlehre aussagen.

- Eilenberg-Mac Lane und ihre unmittelbaren Nachfolger verwenden KT als Sprache (3.4.3.2; sogar Funktorkategorien sehen sie so — vgl. 5.2.3.2). Dies hat ontologische Konsequenzen: man hat nicht die Absicht, KT auf sich selbst anzuwenden *("none of our developments will involve elaborate constructions on the categories themselves"* ⟨#109 S.281⟩); daher genügt NBG. Zugleich beziehen sich Eilenberg-Mac Lane wie selbstverständlich auf das Paradigma "Objekt = Menge mit Struktur"[444]; es tritt noch kein neuer *common sense* ein.

treiben. Ferner ist es schon denkbar, daß die Veranstalter der Tagung, bei der es ja insbesondere um große Kardinalzahlen ging, bereits flüchtig von Grothendiecks Nutzung der inakzessiblen Kardinalzahlen gehört hatten und sich von Mac Lane da eine nähere Erläuterung erhofften. Dies würde auch erklären, in welchem Sinn Mac Lanes Thema zum Kontext von *infinitistic methods* gerechnet wurde.

[444]Die von ihnen untersuchten Nonstandardkategorien (vgl. 5.3.3.2) sind klein — d.h. die Objekte sind "punktförmig".

Dies kann man beispielsweise an der nicht explizierten Rede von *isomorphic* (5.3.3.3) festmachen.

- Beginnend mit Tohoku und Kan treten Konstruktionen *auf* Kategorien in den Vordergrund; Universen werden entwickelt[445]. Erst in dieser Phase beginnt die Diskussion mit den Mengentheoretikern (7.1.5).

- Beginnend mit SGA, voll ausgeprägt in der elementaren Topostheorie werden immer mehr Konstruktionen als intern substituierbar erkannt; man möchte sie nicht immer "in Bezug auf **Set**", sondern immer öfter auch in Bezug auf einen anderen Topos machen; insbesondere Index"mengen" verschwinden zugunsten von geeigneten Indexobjekten (Indexkategorien). Der technische *common sense* wird zur Direktive[446]. In diesem Geiste entwickelt Bénabou einen KT-internen Lösungsvorschlag für die Probleme; vgl. 7.4.4.

Die folgenden Abschnitte gehen genauer auf die einzelnen Phasen ein.

7.2.1 Die Grundlegungsprobleme bei Eilenberg-Mac Lane

Bereits in [1942b] kommen Eilenberg-Mac Lane am Rande auf die Frage der "Legitimität" der verwendeten Kollektionen zu sprechen. In [1945] besprechen sie die Frage der mengentheoretischen Grundlegung dann eingehender:

> **6. Foundations.** We remarked in §3 that such examples as the "category of *all*
> sets", the "category of *all* groups" are illegitimate. The difficulties and antinomies
> #104 here involved are exactly those of ordinary intuitive *Mengenlehre*; no essentially new
> paradoxes are apparently involved. Any rigorous foundation capable of supporting
> the ordinary theory of classes would equally well support our theory. Hence we have
> #105 chosen to adopt the intuitive standpoint, leaving the reader free to insert whatever
> type of logical foundation (or absence thereof) he may prefer. [. . .]
>
> It should be observed first that the whole concept of category is essentially an aux-
> #106 iliary one; our basic concepts are essentially those of a *functor* and of a natural
> transformation [. . .] The idea of a category is required only by the precept that
> #107 every function should have a definite class as domain and a definite class as range, for
> the categories are provided as the domains and ranges of functors. Thus one could
> #108 drop the category concept altogether and adopt an even more intuitive standpoint,
> in which a functor such as "Hom" is not defined over the category of "all" groups, but

[445] Mac Lane drückt den Übergang so aus:

> Initially, categories were used chiefly as a language, notably and effectively in the Eilenberg–Steenrod axioms for homology and cohomology theories. With recent increasing use, the question of proper foundations has come to the fore. Here experts are still not in agreement; our present assumption of "one universe" is an adequate stopgap, not a forecast of the future [Mac Lane 1971b, 29f].

[446] Eilenberg-Mac Lane halten sozusagen die Mengenlehre noch für intuitiver als die KT; Lawvere-Tierney sehen dies nicht mehr so.

> for each particular pair of groups which may be given. The standpoint would suffice for the applications, inasmuch as none of our developments will involve elaborate constructions on the categories themselves. [1945, 246] #109

Sodann werden verschiedene Lösungsvorschläge skizziert: eine typentheoretische KT und die (damals noch neue) Unterscheidung von Mengen und Klassen nach v.Neumann-Bernays-Gödel. Vermutlich gehörte Mac Lane zu den frühen Lesern von JSL und der Arbeiten seines Doktorvaters Bernays.

Ich möchte noch kurz auf die Ausführungen zu dem Satz *"the whole concept of category is essentially an auxiliary one"* ⟨#106 S.280⟩ zu sprechen kommen. Ein in Fragestellungen der Beweistheorie geschulter Leser wird hier vielleicht an die Eliminierbarkeit expliziter Definitionen erinnert (vgl. 3.4.3.2). Wählte man diesen Ansatz zur Untersuchung des Satzes, ginge man aber m.E. an der Intention der Autoren vorbei. Denn sie wollen offenbar sagen, daß es ihnen vordringlich um die Einführung der Konzepte Funktor und Transformation ging — die natürlich in einer mengentheoretischen Formalisierung *ebenso* eliminierbar wären. Die Eliminierbarkeit trifft also nicht die Unterscheidung *auxiliary — not auxiliary*, die hier gemacht werden soll.

Es liegt nahe, anzunehmen, daß Eilenberg-Mac Lane einfach ein "Definitionsschema" vermeiden[447] wollten — also eine Definition, die ihre Ingredienzen mit einem "z.B." einführt. Anstelle von einer Definition der Form "Ein Funktor besteht aus zwei Abbildungen, deren eine so beschaffen ist, daß sie z.B. jedem topologischen Raum z.B. eine Gruppe zuordnet etc." wollten sie eine vollständige, nicht mehr schematische Definition geben. *auxiliary* wäre das Konzept ⊲Kategorie⊳ also im Blick auf die erwünschte Definition.

Das gerade gesagte könnte man auch so ausdrücken, daß ⊲Kategorie⊳ dazu benötigt wird, Weils Vorwurf abzuwenden, ⊲Funktor⊳ sei allenfalls eine metamathematische Vokabel (6.4.2): Durch den Begriff der Kategorie wird eine präzise Definition von ⊲Funktor⊳ als mathematisches Objekt jenseits eines sprachspielartig verwendeten Sammelbegriffs möglich[448].

7.2.2 Die Probleme im "Tohoku-Stadium"

Die französische *community* setzte sich grundsätzlich mit Fragen der mengentheoretischen Legitimität auseinander. So war den französischen Protagonisten der 50er Jahre beispielsweise bewußt, daß die Forderung, mit bestimmten Objekten sollen immer auch sämtliche zu diesen Objekten isomorphen Objekte zu einer Gesamtheit gehören, gelegentlich dazu führt, daß diese Gesamtheit keine Menge ist:

---

[447] Den Begriff "Definitionsschema" schlage ich hier in Analogie zum üblichen Begriff des Axiomenschemas vor: es bleibt in die Definition etwas "einzusetzen", bevor klar ist, worüber sie ist.

[448] Es ist fraglich, ob man von metamathematischen Vokabeln in einem systematischen Sinn des Terminus wirklich sagen kann, sie würden sprachspielartig verwendet; es scheint mir aber dies gewesen zu sein, was Weil mit seiner Rede von der metamathematischen Vokabel hat zum Ausdruck bringen wollen.

- [Serre 1953b] entwickelt das Konzept *"classe de groupes"*. Für näheres vgl. 3.3.2.2; *hier* interessiert folgende Bemerkung:

> Il résulte [...] que *tout groupe isomorphe à un groupe de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$* ; ceci montre évidemment que $\mathcal{C}$ ne peut pas être un "ensemble", et on ne peut donc pas appliquer à la relation $A \in \mathcal{C}$ toutes les propriétés de la relation d'appartenance. Par exemple, il serait dépourvu de sens d'écrire $\prod_{A \in \mathcal{C}} A$. [S.173]

- Auch im Zusammenhang mit der Gruppe $F(X)$, die in der Konstruktion der Grothendieck-Gruppe $K(X)$ eine Rolle spielt, kommt eine solche Problematik vor:

> Soit X une variété algébrique, et soit $F(X)$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble $\mathcal{C}$ des faisceaux [...] algébriques cohérents [...] sur X. [...] On convient, bien entendu, d'identifier deux faisceaux isomorphes (sinon, $F(X)$
> #110 ne serait même pas un « ensemble » !) [Borel und Serre 1958, 105].

Auch Grothendieck scheint gerade deshalb zu Äquivalenzklassen übergegangen zu sein[449], um es wieder mit einer Menge zu tun zu haben (um einen Beweis mit mengentheoretischen Mitteln führen zu können)[450]. Auch aus den Bourbaki-Quellen kann man leicht belegen, daß in Frankreich durchaus ein Bewußtsein für mengentheoretische Probleme vorhanden war, vgl. 6.4.3[451].

Insgesamt wäre zu sehen, auf welche Probleme Grothendiecks Studie überhaupt erst geführt hat und wann dies bemerkt wurde. Die erste Arbeit, die ausschließlich der Darstellung und Bearbeitung der Grundlegungsprobleme der KT gewidmet ist, ist [Mac Lane 1961]; diese Arbeit werde ich in 7.4.1 näher darstellen. Hier ist zunächst wichtig, daß Mac Lane sich in seiner Analyse und Zusammenstellung der Probleme explizit auf die Anwendung von KT in homologischer Algebra bezieht; *"Many [set-theoretic difficulties] have arisen in the recent applications of categories to homological algebra"* [1961, 25].

Mengentheoretische Schwierigkeiten könnten bei der Derivation des Hom-Funktors auftreten. Mac Lane weist auf eine Verwendung des Auswahlaxioms für eine echte Klasse hin:

> [...] to get Ext^2 one must choose one resolution from the (possible) proper class of all projective resolutions of an object C of the category. This uses the axiom of choice for a proper class. In the category of all R-modules, this use can be avoided, since each module C can be written as the quotient $C = F/A$ of a standard free module $F = F(C)$, say the free module generated by the elements of C [1961, 32].

[449] Grothendieck legt Wert darauf, zu einer bis auf Isomorphie eindeutig charakterisierten Konstruktion mittels "Hilberts τ" (vgl. 3.3.4.1) einen Vertreter aus jeder Isomorphieklasse auszuwählen [1957, 123, 124, 133].

[450] Grothendieck weist bei ⟨#59 S.135⟩ ausdrücklich darauf hin, daß es sich bei der Gesamtheit der *sous-trucs* eines Objektes A um eine *Menge* handelt, wenn die Kategorie eine Familie von Generatoren hat; er wird das Mengesein dieser Gesamtheit später im Beweis seines Schlüsselsatzes benötigen, vgl. ⟨#61 S.135⟩.

[451] Allerdings war die Mengenlehre selbst kein stark verfolgter Forschungszweig, vgl. 7.3.2.3.

Dies ist im Garbenfall (wo es um injektive Auflösungen geht) offenbar *nicht* analog möglich: eine injektive *Standardauflösung* ist nicht bekannt (Grothendieck führt ja einen reinen Existenzbeweis). Gibt es in Tohoku eine Situation, in der eine Auflösung für die Berechnung eines höheren Derivierten gewählt werden muß? Auf S.143 bei der allgemeinen Entwicklung der homologischen Algebra im Anschluß an [Cartan und Eilenberg 1956] heißt es *"pour pouvoir définir les foncteurs dérivés droits d'un foncteur covariant ou les foncteurs dérivés gauches d'un foncteur contravariant, il faut supposer que tout objet $A \in \mathbf{C}$ est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, d'où on conclut en effet que tout $A \in \mathbf{C}$ admet une résolution injective [...] $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \cdots$, d'où la définition des $R^iF(A) = H^i(F(C))$ [...]"*. Wenn man mit dieser letzten Definition tatsächlich einen Derivierten *berechnen* will, muß man zumindest zeitweilig eine Auflösung *auswählen*; Grothendiecks Beweis erlaubt eine solche konkrete Berechnung nicht. Mac Lanes *"get"* muß also schon als "berechnen" gelesen werden, damit sein *"must"* stimmt.

Ein weiteres mögliches Problem bespricht [Mac Lane 1961, 36] im Zusammenhang mit direkten Limites. Gemäß einem Vorschlag von [Buchsbaum 1960] kann man zu einem linksexakten Funktor einen exakten über direkte Limites konstruieren, jedoch ist die Index"menge" des Limes eine echte Klasse. Mac Lane meint dazu: *"it is embarrassing in particular because this definition [...] would be especially useful in construction of the cohomology of a topological space in terms of sheaves"*. Ähnlich ist in [Grothendieck 1957] der Begriff der beliebigen direkten Summe (also *AB 3*) unverzichtbar für den Garbenfall, vgl. 3.3.3.4. Es sind also keine Situationen zu dulden wie die von Serre beschriebene (*il serait dépourvu de sens d'écrire* $\prod_{A \in C} A$). Entsprechend wird bei den Universenaxiomen (s.u.) Wert darauf gelegt werden, daß die *Indexmenge* für die infinitären Konstruktionen aus dem Universum ist.

Schließlich nähert sich Grothendieck der Betrachtung allgemeiner Funktorkategorien, und diese werden, wie wir in 5.2.3.2 gesehen haben, später sehr bedeutsam. Die Aussage *la composition de foncteurs se comporte formellement comme un bifoncteur* [1957, 125] ist in einer auf der Unterscheidung von Mengen und Klassen basierenden Grundlegung nicht ausdrückbar, wie Lacombe (vgl. 6.4.3) in seinem Gutachten auf S.7 ausdrücklich unterstreicht[452]. Dieses Problem bespricht auch Mac Lane; bei [Godement 1958, 17] steht ein Beweis, daß für Prägarben F, F' im Sinne von Tohoku $\mathrm{Hom}(F, F')$ eine Menge ist (also keine echte Klasse) — doch bei solch "zahmen" Funktorkategorien bleibt man ja nicht stehen.

7.2.3 SGA

Im Stadium von SGA werden sowohl **Cat** als auch beliebige Funktorkategorien benutzt; was **Cat** betrifft, wurde dies schon in 5.2.3.3 ausgeführt. Der Kern des Grothendieckschen Projektes ist es ja, eine genügend reichhaltige Kategorie in die Ka-

[452] Daß Lacombe hier ziemlich genau die Formulierung von Tohoku übernimmt — er schreibt *"le produit GF de deux foncteurs se comporte formellement comme un bifoncteur par rapport aux arguments G et F"* —, deutet darauf hin, daß ihm eine Fassung von Tohoku vorgelegen hat — z.B. als zu begutachtender Bourbaki-Text (vgl. 3.3.1.1).

tegorie ihrer Garben einzubetten (4.1.2.3) — und dazu braucht man die Kollektion aller Überdeckungen (eine Familie von Familien).

Auch die Methode des klassifizierenden Raumes (5.3.2.1) geht *a priori* nur für kleine Kategorien; "rein formal" kann man aus den *nerves* von $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ den *nerve* von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ (der Funktorkategorie) ermitteln (als *inner-hom*-Objekt der Kategorie der simplizialen Mengen; [Gelfand und Manin 1996, 105]). Um solche Methoden stets zur Verfügung zu haben, sind Grothendieck-Universen hilfreich, da dort alle Kategorien klein sind.

7.3 Grothendieck-Universen: Geschichte und Bedeutung

Die Methode der Grothendieck-Universen kann wohl als die verbreitetste mengentheoretische Fundierung der KT angesprochen werden. Erstens deswegen und zweitens, weil es an sich ein interessantes historisches Thema ist, soll hier insbesondere auch der mengentheoretische Kontext dieser Methode (die Arbeiten Tarskis zu stark inakzessiblen Kardinalzahlen) eingehender untersucht werden.

7.3.1 Grothendieck, Gabriel, Sonner

Die Methode der Grothendieck-Universen besteht darin, daß man zu ZFC das Universenaxiom hinzunimmt, welches zusichert, daß jede Menge in einem sogenannten "Universum" U enthalten ist (weil Universen selbst wohlfundierte Mengen sind, ist diese Forderung gleichbedeutend mit der Postulation der Existenz beliebig vieler Universen). Man kann jetzt U-Kategorien konstruieren (z.B. die Kategorie U-**Grp** aller Gruppen in U) und die Funktorkategorien zwischen ihnen; dadurch werden die meisten Probleme gelöst, weil U dank seiner Abgeschlossenheitseigenschaften (s.u.) ein Modell von ZFC ist und weil z.B. jede Gruppe in einem Universum U enthalten ist (kraft des Axioms), also auch in einer geeigneten U–Kategorie.

Es gibt eine ganze Reihe von Definitionen, was ein Universum sein soll; solche findet man in *n°307*, bei Sonner, Gabriel, SGA 1, SGA 4 (zwei Texte: einer von Grothendieck, einer von Bourbaki) und Mac Lane[453]. Die verschiedenen Definitionen laufen mehr oder weniger darauf hinaus, daß eine Menge U ein *Universum* ist, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1) $\forall X, Y : ((X \in U) \wedge (Y \in X)) \rightarrow (Y \in U)$ (man sagt, U ist *transitiv*);

2) $\forall X : (X \in U) \rightarrow (\mathfrak{P}(X) \in U)$

3) $\forall X, Y : (X, Y \in U) \rightarrow (\{X, Y\} \in U)$;

4) $\forall I, X : ((I \in U) \wedge (X \in U^I)) \rightarrow (\bigcup X \in U)$.

[453] [1969, 1971a, 1971b]

Es ist festzuhalten, daß unter Annahme des Universenaxioms AC kein Axiom mehr ist, sondern ein Satz (vgl. 7.3.2.2).

Historisch ist der Gedanke, ein solches Axiom für die Grundlegung der KT zu nutzen, auf verschiedene Weisen auf den Plan getreten.

- Es ist unklar, wann genau Grothendieck seine Ideen entwickelt hat; es war *a fortiori* vor der Publikation des Warschauer Tagungsbands (wegen Mac Lanes Bemerkung, die in Abschnitt 7.4.1 wiedergegeben ist[454]; es könnte natürlich sein, daß er diese Bemerkung noch nicht auf der Konferenz machte, sondern erst in der endgültigen Version der Arbeit — das ist zwar reine Spekulation, erlaubt aber eine leichter haltbare Vermutung). Die erste von Grothendieck selbst veröffentlichte Arbeit, die ausdrücklich von (Grothendieck–)Universen spricht, ist SGA 4; dort wird Tarski nicht erwähnt.

  Wie in 6.4.3 dargelegt, ist Grothendieck der Autor von *n°307*; gleichzeitig bedeutet das, daß die Universen spätestens mit diesem Papier in der Welt waren.

- [Sonner 1962] geht von den mengentheoretischen Axiomen von Bourbakis *Éléments* aus und ersetzt A_5 (*there is an infinite set*) durch seine Version von Tarskis Axiom[455].

- Der erste Autor, der ausdrücklich die Bezeichnung "Grothendieck–Universen" verwendet, ist Gabriel [1962][456]

7.3.2 Unabhängige Vorgeschichte: Tarskis Arbeiten über *inaccessibles*

7.3.2.1 Inakzessible vor 1938

Alfred Tarski gab in [1938] detailliert Auskunft über die vor 1938 entstandenen Arbeiten über inakzessible Kardinalzahlen (vgl. die Anmerkungen 1-4 in [1938]). Hier ist festzuhalten, daß Felix Hausdorff schon 1908 erstmals die Frage gestellt hat, ob es schwach inakzessible Kardinalzahlen gibt[457], und daß Tarski selbst den Begriff der stark inakzessiblen Kardinalzahl definierte (in einer Gemeinschaftsarbeit mit Sierpiński von 1930[458]). Es ist interessant, Hausdorffs Meinung über den Nutzen der

[454] Auch Sonner war sich darüber im klaren, daß Grothendieck ähnliche Ideen hatte wie er selber (vgl. [Sonner 1962, 163]; vermutlich hat Sonner einfach [Mac Lane 1961] genügend sorgfältig gelesen).

[455] Sonners ausdrücklicher Bezug auf Tarski wird in Abschnitt 7.3.2.3 besprochen.

[456] Bei Gabriel ist die Abtrennung der hypothetisch-deduktiven Methode von ihrer erkenntnistheoretischen Minimalforderung (sich in Erprobung bislang bewährt haben) deutlich zu spüren: *"il convient d'ajouter aux axiomes habituels de la théorie des ensembles un axiome* [...]" [1962, 328].

[457] vgl. [Hausdorff 1908, 443] *"Die Frage, [...] ob es [...] reguläre Anfangszahlen mit Limesindex gibt, muß hier unentschieden bleiben".*

[458] "Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles", *Fundamenta Mathematicæ* 15, p.292.

inakzessiblen Kardinalzahlen zu lesen, die er in den *Grundzügen der Mengenlehre* von 1914 äußerte[459]:

> Wenn es [...] reguläre Anfangszahlen mit Limesindex gibt, so ist die kleinste unter ihnen von einer so exorbitanten Größe, daß sie für die üblichen Zwecke der Mengenlehre kaum jemals in Betracht kommen wird [Hausdorff 1914, 131] .

7.3.2.2 Tarskis Axiom $\mathfrak{a}$ von 1938 und dessen Beziehung zu Tarskis Wahrheitsbegriff

In seiner Arbeit [1938] greift Tarski Hausdorffs Diktum auf und unterstreicht, daß die Bedeutung der inakzessiblen Kardinalzahlen in der Zwischenzeit sehr zugenommen habe. Nachdem er auf S.69 eine Definition von stark inakzessibel (er spricht von "im engeren Sinne unerreichbar") gegeben hat, beweist er einige Sätze über diesen Begriff, gipfelnd in einer alternativen Charakterisierung des Begriffs ("Satz 20", S.82; vgl. auch S.84[460]): Sei eine Menge N gegeben mit $card(N) = n$ (wobei n irgendeine Kardinalzahl bedeutet); eine Kardinalzahl $m > n$ ist stark inakzessibel genau dann, wenn es eine Menge M gibt mit $card(M) = m$, so daß

$\mathfrak{a}_1$. $N \in M$

$\mathfrak{a}_2$. $(X \in M) \wedge (Y \subset X) \to (Y \in M)$

$\mathfrak{a}_3$. $(X \in M) \to (\mathfrak{P}(X) \in M)$

$\mathfrak{a}_4$. $(X \subset M) \wedge (card(X) \neq card(M)) \to (X \in M)$

Auf S.84 formuliert er als *Axiom* das Postulat, daß für alle N eine Menge M mit den Eigenschaften $\mathfrak{a}_1$–$\mathfrak{a}_4$ existiert. Dieses Axiom garantiert vermöge Satz 20 für die Existenz beliebig vieler stark inakzessibler Kardinalzahlen. Ich beziehe mich auf dieses Axiom als "Tarskis Axiom" oder einfach als $\mathfrak{a}$ (diesen Namen gab ihm Tarski selbst). Tarski fährt fort damit, zu beweisen, daß AC aus $\mathsf{ZF}+\mathfrak{a}$ folgt (S.85f). Außerdem stellt er das Axiom in den Kontext seiner Arbeit zum Wahrheitsbegriff [1935], wenn er sagt:

> Es wäre irrig zu meinen, daß das Axiom $\mathfrak{a}$ lediglich in höchst abstrakten mengentheoretischen Untersuchungen eine Rolle spielen kann. Man kann ja innerhalb der Zermelo–Fraenkelschen Mengenlehre [...] die reine Zahlentheorie aufbauen. Man kann deshalb nach der von Gödel entwickelten Methode gewisse Sätze konstruieren, die gänzlich in Termen der reinen Zahlentheorie formuliert werden und die sich auf Grund der Zermelo–Fraenkelschen Mengenlehre weder beweisen noch widerlegen lassen; diese Sätze werden aber entscheidbar, falls man [...] $\mathfrak{a}$ [hinzunimmt] [Tarski 1938, 86].

[459] Diese Passage fehlt offenbar in der zweiten Auflage von [Hausdorff 1914], die 1927 herauskam. Es wäre interessant zu wissen warum.

[460] Meine Wiedergabe des Satzes und insbesondere der Bedingungen $\mathfrak{a}_1$–$\mathfrak{a}_4$ ist kein exaktes Zitat von Tarskis Original, sondern eher eine andere Formulierung desselben Inhalts.

(Die Idee Gentzens ist ganz ähnlich, investiert aber weniger, da bei Gentzen auf der Ebene der Ordinalzahlen argumentiert wird und alles abzählbar bleibt). Tarski bezieht sich hier ausdrücklich auf [Tarski 1935] S.397 *Anmerkung* 106 und S.400ff, also die berühmte Passage, in der der negativen These, eine Wahrheitsdefinition zu einer gegebenen formalen Sprache könne nicht in einer Metasprache gleicher oder niedrigerer Ordnung gegeben werden, die positive zur Seite gestellt wird, eine solche Definition sei in einer Metasprache höherer Ordnung sehr wohl möglich.

Im Vorbeigehen sei hier das Verhältnis von Tarskis Axiom zum Universenaxiom notiert: Es ist nicht schwer, zu überprüfen, daß Tarskis M transitiv ist und daß umgekehrt ein Universum auch die Eigenschaft a_2 hat. a_4 hingegen ist eine stärkere Forderung als 3) (vgl. [Sonner 1962, 166]); daher folgt das Faktum[461], daß die Kardinalität eines Universums stark inakzessibel ist, nicht unmittelbar aus Tarskis Satz 20. Umgekehrt ist die Forderung 4) nicht in Tarskis Liste enthalten; es genügt auch bereits a, um auf die Existenz von beliebig vielen *strongly inaccessibles* zu schließen (vgl. [Kuratowski und Mostowski 1968, 326]).

Es war Tarski bekannt, daß a nicht aus ZFC folgt; vgl. [Tarski 1938] S.84 Anm.3). Genauer sagt Drake das folgende: *"it* [is] *consistent with* ZFC *to assume that there are no inaccessible cardinals other than* ω*"* [1974, 67]. Dies ist auch kein Wunder, denn wie wir gesehen haben, sichert a bzw. das Universenaxiom zu, daß ZFC ein Modell hat — aber ZFC kann seine eigene Konsistenz bekanntlich nicht beweisen. Man kann aber noch nicht einmal die Frage der relativen Konsistenz des Axioms zu ZFC entscheiden — mit diesem Ergebnis hat sich sogar der Grothendieck–Kreis beschäftigt (also nicht nur Mengentheoretiker weitab von den Anwendungen der KT): *"la noncontradiction* [de l'axiome] *par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles n'est pas démontré, ni démontrable, semble-t-il"* (SGA 4 S.3). Ebd. S.214 wird Cohens Ergebnis als Argument hierfür angeführt.

7.3.2.3 Ein Abflachen der Forschungsaktivität auf dem Gebiet großer Kardinalzahlen — und eine Wiederbelebung dank der KT?

Obwohl Tarski die Bedeutung des Begriffs der inakzessiblen Kardinalzahl stark unterstrichen hat, gab es nach [1938] in diesem Bereich praktisch keine Aktivität: die Ω–Bibliographie gibt bis zum Beginn der 50er Jahre nur wenige Arbeiten an, und es gibt eine echte Lücke zwischen 1943 und 1950. (Man muß hier allerdings Ω mit Vorsicht genießen, da für die Jahre *vor* 1938 Tarskis eigene bibliographische Angaben in [1938] vollständiger sind als die in Ω gemachten.) Vieles, was auf dem Gebiet bis in die 60er Jahre getan wurde, stammt von Tarski und Koautoren. Außerdem liegen typische[462] Arbeiten zum Thema fernab von Betrachtungen zu a.

Man könnte insofern behaupten, erst mit den Grundlegungsproblemen der KT sei a interessant geworden. Sonner, einer der ersten Autoren, die das Axiom in

[461] Für einen Beweis vgl. etwa SGA 4 S.3.

[462] Solche Arbeiten beschäftigen sich im allgemeinen mit äquivalenten Charakterisierungen anderer Art ([Tarski 1939] oder die Arbeit von J. Łoś *"Some properties of inaccessible numbers"* in [Bernays et al. 1961, 21-23]) oder mit der Frage, ob bestimmte Eigenschaften von Akzessiblen für Inakzessible gültig bleiben ([Erdös und Tarski 1961], [Keisler und Tarski 1963]).

diesem Kontext anwenden, bezieht sich ausdrücklich auf Tarski. Genauer gesagt beabsichtigt er [to] *"revive Tarski's ideas"*, was man dann wohl so verstehen kann, daß er diese Ideen als tot oder zumindest eingeschlafen ansieht; [1962, 175].

Seit die KT sich für große Kardinalzahlen interessiert, wird die Theorie derselben als weitaus relevanter angesehen, als dies vorher der Fall war. (vgl. [Drake 1974] viii, 315). Besonders interessant scheint dieses Umdenken im Blick auf Frankreich. [Blass 1984, 7] nennt unter den positiven Auswirkungen der Grothendieck-Universen *"this approach [...] made inaccessible cardinals popular in France"*. Er spielt hier zweifellos auf das allgemein eher geringe Interesse für mengentheoretische Fragen in Frankreich an[463]. Man kann der Aussage von Blass vor dem Hintergrund des unveröffentlichten Quellenmaterials eine differenziertere Form geben. Der Vorstoß von *n°307* in Richtung *inaccessibles* und die folgenden Texte sind ja gerade ausgezeichnet durch ihre Motivation von den intendierten mathematischen Anwendungen her (in ausdrücklicher Abgrenzung zu der mehr metamathematisch motivierten Unternehmung von Lacombe). Es ist also noch keineswegs ausgemacht, ob hierdurch tatsächlich ein verstärktes Interesse an mengentheoretischen Fragen in einer Form, wie sie von Fachmengentheoretikern für relevant gehalten werden, aufgekommen ist.

Der hauptsächliche Relevanzvorschub für die Erforschung von *large cardinals* im allgemeinen scheint allerdings eher von den in Abschnitt 7.3.3 angedeuteten Entwicklungen auszugehen.

7.3.3 Ist die Annahme von $\mathfrak{a}$ *ad hoc*? Naive Mengenlehre, Cohens Resultat und die heutige Sicht der *large cardinal hypotheses* unter Mengentheoretikern

Die Annahme eines Universenaxioms, beginnend mit Tarskis Axiom $\mathfrak{a}$, hat für die Gruppierungen der Kategorientheoretiker und der Mengentheoretiker[464] je verschiedene Bedeutung und Berechtigung. Es gibt eine Reihe von Äußerungen seitens der Mengentheoretiker, die implizieren, daß die Annahme eines solchen Axioms eigentlich nicht naheliegend oder befriedigend ist, wobei dieses Mißfallen auf dem Hintergrund je verschiedener Überlegungen zu verstehen ist[465]. Eine besonders weitrei-

[463] Im Blick auf Bourbakis Entscheidung, eine eher naive Mengenlehre in Anwendung zu bringen, sagt [Corry 1996, 316] *"This approach reflected a longstanding tradition with respect to set theory in France"*. Vgl. auch 6.2.1.

[464] in der in 7.1.5 vorgenommenen Präzisierung dieser Bezeichnungen.

[465] Tarski bezeichnet in [1939, 128f] das in [1938] gegebene Axiom als *"strange and artificial"* und macht deutlich, daß es die Typentheorie verletzt; er gibt ein anderes Axiom an, das diese Nachteile nicht hat, aber trotzdem erlaubt, AC abzuleiten (die Unterschiede zwischen den beiden Axiomen sind allerdings nicht größer als die zwischen den verschiedenen von Kategorientheoretikern formulierten Universendefinitionen). Sonner bezeichnet seine Version des Axioms als *"not quite original, somewhat narrow for the logician"* [1962, 175]; ähnlich sagen [Engeler und Röhrl 1969, 60]: *"a stronger axiom* [than Tarski's] *such as the reflection principle would be much more satisfying from the axiomatic standpoint"* (vgl. dazu 7.4.3).

Neben diesen eher marginalen Äußerungen gibt es eine explizitere Diskussion des Axioms (und insbesondere der Frage, ob es *ad hoc* ist) in [Bernays 1961]. Bernays unterscheidet grundsätzlich zwischen *"obligatorischen und fakultativen Mächtigkeiten [...], dh. zwischen solchen, deren Exi-*

chende solche Überlegung möchte ich hier herausgreifen; der Umstand, daß die eine Seite mit dieser Überlegung vertraut ist und die andere höchstwahrscheinlich nicht, bietet sich zur Erklärung von Mißverständnissen und Verwerfungen in der aktuellen Diskussion (vgl. `http://www.math.psu.edu/simpson/fom`) an.

Zur Darstellung dieser Problematik übernehme ich die von [Halmos 1969] getroffene Unterscheidung zwischen *naiver* und *axiomatischer* Mengenlehre: Halmos vergleicht sein Mengenlehrebuch mit einem Geometriebuch, in dem ein einziges vernünftiges Axiomensystem in der Absicht untersucht wird, nur die euklidische Geometrie zu beschreiben. In diesem Sinne arbeiten *working mathematicians mit* einer *naiven* Mengenlehre, während Mengentheoretiker *an* einer *axiomatischen* Mengenlehre arbeiten (die Sprechweise ist letztlich nur eine Verfeinerung der Unterscheidung von "arbeiten mit" und "arbeiten an").

Im Falle der Kategorientheorie ergibt sich nun eine Schwierigkeit mit dieser an sich klaren Aufgabenverteilung. Feferman schildert zunächst die Situation vor dem Auftreten der KT:

> For mathematical practice it was sufficient to take it that all sets [...] to be considered belong to some universe U of sets closed with respect to certain operations. #111
> When setting up a formal theory, mention of U was not needed because *all* quantifiers are tacitly supposed to range over such a U. [...] U [...] was not essential for mathematical practice because no operations were carried out *on* U [...].
>
> Category theory introduced a novel element in mathematical practice in that beside such a tacit universe U, one also had distinctions between *small* and *large* categories or, as specifically suggested by Grothendieck [[Gabriel 1962][466]], different kinds of universes [Feferman 1969, 201].

In die Terminologie von Kapitel 1 übertragen, hält Feferman hier einen Übergang der Thematisierung fest: vor Einführung der Kategorientheorie[467] werden die Objekte des Universums intuitiv verwendet, während einem in der KT die Frage nach der Gültigkeit solcher Verwendung "in den Sinn kommt" und man sich entsprechend

stenz aus den Axiomen gefolgert werden kann, und solchen, deren Annahme zwar mit den Begriffen der Mengenlehre formuliert werden kann [...], aber aus diesen nicht als notwendig erweisbar ist" (S.12). Entsprechend will Bernays Axiome angeben, aus denen die Existenz gewisser Typen von großen Kardinalzahlen gefolgert werden kann und die nicht als *"Postulierungen ad hoc wirken"* sollen (S.14). Bernays gibt ein Axiom an, das $\mathcal{A}$ sehr ähnlich ist; auf diese Ähnlichkeit weist Bernays auch hin und erwähnt eine Möglichkeit, sogar die Äquivalenz der beiden Axiome einzusehen. Allerdings empfindet er sein neues Axiom nicht als *ad hoc*, da er es ja gerade erarbeitet, um *ad hoc*-Axiome über die Existenz gewisser Typen von großen Kardinalzahlen zu vermeiden! Ich kann hier nicht näher auf die interessante Frage eingehen, was Bernays hier mit *ad hoc* gemeint haben mag.

[466]Es ist nicht ganz klar, wieso Feferman im Zusammenhang mit der Idee der *different kinds of universes* auf Gabriel verweist, wo ausdrücklich angenommen wird, man habe es immer nur mit einem festen Universum zu tun. Klar ist, daß zu Zeiten von Fefermans Text die "kanonische" Belegstelle in SGA 4 noch nicht vorlag, so daß er sich mit dem Verweis auf [Gabriel 1962] behelfen mußte.

[467]Wie bei 7.2 ausgeführt, muß man hier noch feiner unterscheiden: Fefermans Beschreibung trifft v.a. zu für die KT Grothendieckscher Prägung mit ihren Konstruktionen *auf* Kategorien; bei Eilenberg-Mac Lane spielten *operations on U* noch keine große Rolle.

mit dem Zustandekommen der Herstellungsregeln für diese Objekte befassen muß. Bereits die Wahl des Namens "Universum" deutet darauf hin, daß es darum ging, eine Verbindung herzustellen zwischen einem informellen Konzept ("Diskursuniversum") und einem formalen Begriff (Grothendieck-Universum), der eingeführt wurde, um eine alternative Interpretation des informellen Konzepts zu artikulieren.

Ich stimme mit Feferman überein, daß diese neue Situation sich für die "mathematische Praxis" (ich würde eher sagen: für die *mainstream*-Mathematik) tatsächlich im Zusammenhang mit der KT einstellte; für die Forschungsdisziplin Mengenlehre war aber zweifellos das Resultat Cohens[468] entscheidender. An diesem Problemfeld lassen sich die aufgeworfenen Fragen des Operierens mit mathematischen Objekten (und des Operierens auf dem Diskursuniversum *als* Objekt) sehr gut illustrieren; daher sei es hier in einiger Breite dargestellt[469].

Zermelos Ansatz war im Grunde, nur etablierte Prinzipien zum Aufbau von Mengen zuzulassen. Ob dies tatsächlich um der Vermeidung der Antinomien willen geschah, sei hier einmal dahingestellt[470]. Hervorheben möchte ich hier, daß die Stoßrichtung auf die *Operationen* zur Herstellung von Mengen geht. Hier sei an eine Äußerung von Paul Bernays erinnert:

> Im Unterschiede von den meisten Anwendungen der axiomatischen Methode, hat die Axiomatisierung der Mengenlehre nicht den Sinn, das System der Mengen als eine bestimmte Struktur zu beschreiben. [...] [Es] handelt sich [...] bei der Axiomatisierung nur um eine Fixierung von *Mindestforderungen* für das mengentheoretische Operieren [Bernays 1961, 11].

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Kontinuumshypothese in einem interessanten Licht dar. Die von-Neumann-Hierarchie V entsteht ja durch kumulative Iteration der Mengenoperation $\mathfrak{P}$. Der Umstand, daß CH eine offene Vermutung ist, kann also gelesen werden als eine gewisse Vagheit in unserem Verständnis dieser Operation $\mathfrak{P}$ (denn CH ist ja gerade eine Aussage über die Kardinalität von $\mathfrak{P}(\omega)$). Zur Ausräumung dieser Vagheit gab es (neben der deskriptiven Mengenlehre) den Ansatz der Konstruierbarkeit bei [Gödel 1940]; hier wurde die Reichweite der Operation $\mathfrak{P}$ gewissermaßen abgeschwächt: statt *aller* Teilmengen werden nur noch diejenigen zugelassen, die in 1.Stufe definierbar sind. Auf diesem Wege ergab sich ein Modell L von ZFC, in dem CH gültig ist. Es blieb jedoch fraglich, ob diese Form von $\mathfrak{P}$ die "richtige" ist (die sogenannte[471] Konstruierbarkeitshypothese $V = L$). Cohens Vorgehen bestand grob darin, Mengen zu L hinzuzunehmen unter Beibehaltung der

[468]Vgl. [Cohen 1963, 1964]; auch [Engeler 1993, 40f].

[469]Ich beziehe mich im folgenden stark auf den Vortrag *"Cantor's set theory from a modern point of view"*, den Sy Friedman auf der Jahrestagung 2002 der DMV in Halle gehalten hat. Friedman hat in diesem Vortrag ein eindrückliches und von einer klaren konzeptuellen Linie zusammengehaltenes Bild einiger Hauptprobleme mengentheoretischer Forschung von Cantors ursprünglichem Programm bis zu aktuellen Fragen gezeichnet.

[470][Mehrtens 1990] stellt die offizielle Geschichte in Frage, wonach es Zermelo bei der Einführung seines Axiomensystems um das Ausräumen der als Anfechtung wahrgenommenen Antinomien ging; Volker Peckhaus, der sich derzeit wohl am intensivsten mit Zermelos Arbeiten auseinandersetzt, hat mir gegenüber aber erwähnt, daß Zermelo in der Tat auf die Paradoxe reagiert hat.

[471]Wir werden im folgenden sehen, daß die Schreibweise $V = L$ irreführend ist: L ist eine *Inter-*

Gültigkeit von ZFC — und dies solange, bis CH ungültig ist. Cohens Resultat ist also insgesamt, daß CH in ZFC unentscheidbar ist. Die Hauptanfechtung der Vorstellung, daß es für die mathematische Praxis ausreichend sei, sich alle betrachteten Mengen als zu einem Universum zugehörig vorzustellen, war also demnach gar nicht das Bedürfnis der Kategorientheorie nach mehreren *verschachtelten* Universen — so stellt Feferman es bei ⟨#111 S.289⟩ dar —, sondern die viel bedrohlichere Perspektive mehrerer *konkurrierender* Universen aufgrund von Cohens Resultat.

Bedrohlich für die Praxis ist diese Perspektive eben deshalb, weil nicht primär an Mengenlehre interessierte Mathematiker mit dem Universum so arbeiten, als sei es "einzig" (naive Mengenlehre i.S. Halmos'). Dies trifft natürlich auch auf diejenigen Mathematiker zu, die von einer ganzen Folge von Grothendieck-Universen (also Universen in einem technischen Sinn) ausgehen: Für sie ist eben ein Modell von ZFC + $\mathcal{a}$ "das" (Diskurs-)Universum — und Tarskis Axiom eine Aussage über die innere Gestalt dieses Universums (daß das Universum nicht nur unter den Operationen von ZFC abgeschlossen ist, sondern sozusagen "Unteruniversen" enthält, die dies ebenfalls sind).

Es geht hier *nicht* darum, daß ZF nicht kategorisch ist; dies war bekanntlich schon Skolem klar. Wie [Bell 1981b, 411] hervorhebt, bringt Cohens Resultat eine Ambiguität bei Wahrheitswerten (mathematischer Sätze)[472] mit sich und nicht wie das Resultat Skolems eine Ambiguität bei der *reference* (Bedeutung) von mathematischen Begriffen[473]. In der Terminologie der Mengenoperationen ausgedrückt: Uns fehlt nicht nur eine genaue Kenntnis, womit wir nun denn operieren, sondern auch eine genaue Kenntnis, was bei den Operationen eigentlich passiert. Damit wird die Vorstellung des arbeitenden Mathematikers, das Universum sei unter den Operationen abgeschlossen ⟨#111 S.289⟩, problematisch; man kann gar nicht mehr mit Sicherheit sagen, was dies eigentlich bedeutet. Dies scheint letztlich die Position des Pragmatismus zu bestätigen, die die Trennung von Operation (als Herstellungshandlung) und hergestelltem Gegenstand gar nicht erst vollzieht.

Die Aufgabenstellung, die sich für die Mengentheorie aus den geschilderten Ereignissen ergab, war, eine *kanonische* und *akzeptable* Interpretation von V (bzw.

pretation von V; die Setzung des Gleichheitszeichens soll lediglich besagen, daß man diese Interpretation als gegeben annimmt und aus dieser Annahme Schlüsse zieht — z.B. auf die Gültigkeit von CH schließt.

[472] Da von CH durchaus mathematische Sätze abhängen, die von *mainstream*-Mathematikern als "bedeutend" eingeschätzt werden — wenn auch sicher nicht in dem Umfang, wie dies bei AC der Fall ist —, hat eine solche Ambiguität auch Auswirkungen auf die *mainstream*-Mathematik. Es ist also keineswegs so, daß Cohens Resultate für diese Mathematik letztlich irrelevant seien.

[473] Gerhard Heinzmann weist in seinem Gutachten zur vorliegenden Arbeit darauf hin, daß dieser Unterschied von Bell möglicherweise zu Unrecht hervorgehoben wird: *"[Selon Bell], la non-catégoricité de ZF n'implique qu'une ambiguïté référentielle tandis que l'indécidabilité de l'HC implique une ambiguïté significative. A mon avis, Beth (Foundations of Mathematics, 515/16) avance un argument concluant contre cette interprétation : il est clair qu'une preuve de catégoricité implique toujours un isomorphisme entre modèles par rapport au modèle du cadre ensembliste utilisé ; or, si la théorie des ensembles n'est pas catégorique — et elle ne l'est pas effectivement si elle possède un modèle —, la notion même de modèle standard est relative au modèle sous jacent la théorie des ensembles, d'où une ambiguïté significative"*.

Modell von ZFC) zu finden; d.h. die Herstellung des Modells sollte eindeutig sein, und das Modell sollte, was die Antworten auf unentscheidbare Fragen betrifft, stabil sein unter typischen Veränderungen des Modells. L ist nicht akzeptabel, weil es sich durch *forcing* zu einfach ins Wanken bringen läßt; Cohens durch *forcing* erhaltene Modelle sind nicht kanonisch, weil es mit einem solchen Modell zugleich viele gibt. Es stellte sich also die Frage, wie man kanonische Universen größer als L erhalten könnte. Die Antwort kam zunächst aus der Maßtheorie: Aus der Annahme, es existiere eine abzählbar additive Ausdehnung des Lebesgue-Maßes auf *alle* Mengen reeller Zahlen, folgt $V \neq L$ — will sagen, es ergibt sich ein über L hinausgehendes Modell von V; dieses Modell hat dann eine sogenannte *meßbare* Kardinalität (Scott, Solovay).

Spätestens damit betraten die Mengentheoretiker auf der Suche nach einer Interpretation von V das Terrain der *large cardinal hypotheses* (im folgenden abgekürzt als LCH's). Zunächst stellte Silver fest, daß sich aus einer einfachen LCH, nämlich der Annahme, es gebe eine meßbare Kardinalzahl, ein kanonisches inneres Modell (Subuniversum) mit meßbarer Kardinalität ergibt; aus Gründen, deren Ausführung hier zu weit führen würde, (die aber mit der Kontrollierbarkeit der o.g. Stabilität zusammenhängen) wurde dieses Modell aber als zu klein erkannt. Der heutige Stand ist, daß in einem Modell wünschenswerterweise zumindest LCH's über sogenannte *Woodin cardinals* (deren Definition ich hier übergehe) gelten sollten. Woodin scheint übrigens, entsprechend dem, was er auf dem Münchner Russellkongress 2001 gesagt hat, das Projekt zu haben, ein kanonisches und akzeptables Modell anzugeben, in dem $\neg$ CH gilt.

Zusammengefaßt: Es geht bei LCH's aus der Sicht der Forschungsdisziplin Mengenlehre seit Cohen nicht um eine Erweiterung von ZFC um Axiome, sondern um die Wahl eines Modells der Mengenlehre. Man kann hier erkennen, daß ein zentrales Resultat — das Cohensche — eine Disziplin überhaupt erst in Stand setzen kann, sich über die volle Bedeutung ihres begrifflichen Rahmens klar zu werden. Ich behaupte demnach, daß die Mengenlehre als Disziplin dank Cohens Resultat in einen stabilisierten Zustand eingetreten ist, der entweder mit der Durchführung von Woodins Programm eine Bestätigung erfährt oder — z.B. durch das Auftreten neuer überraschender Resultate — in einen neuen Zustand überwechselt, über den man nur Vermutungen anstellen kann.

Hieraus ergibt sich eine Neubewertung der Diskussion um die Rolle der LCH's in der Grundlegung der Kategorientheorie. Die von Grothendieck propagierte Idee, ein Universenaxiom (und damit eine zum Axiom gemachte LCH) zu den Axiomen der Mengenlehre hinzuzunehmen, entspricht nicht der Vorstellung, die Fachmengentheoretiker von der Rolle der LCH's haben. Dies ist ein möglicher Anlaß für Mißverständnisse und Debatten. Ein Widerstand der Mengentheoretiker, der auf der *Stärke* der LCH's beruht, die in Grothendiecks Universenaxiom eine Rolle spielen (beliebig viele stark inakzessible Kardinalzahlen), wäre aus heutiger Sicht nicht mehr haltbar — denn meßbare Kardinalzahlen sind viel größer, von *Woodin cardinals* zu schweigen[474]. Der Streit ginge wohl eher darum, daß man über eine Wahl des Modells nach den

[474] Das Universenaxiom ist eine *"rather mild assumption"* [Blass 1984, 7].

Kriterien der Kanonizität und der Adäquatheit entscheiden muß und nicht nach dem Kriterium, ob das Modell Konstruktionen ermöglicht, die den arbeitenden Mathematikern wünschenswert erscheinen (sozusagen "Grundlegung als Dienstleistung"). Wohl daher weist Kreisel nach, daß *dieses* Ziel der Ermöglichung von Konstruktionen auch ohne Entscheidung über ein Modell zu haben ist (vgl. 7.4.3). Spielte, wie wir in 6.4.5 gesehen haben, die Stärke des Axioms möglicherweise in der Bourbaki-Diskussion eine Rolle aufgrund der Unentscheidbarkeit der relativen Konsistenz (Stichwort hypothetisch-deduktive Minimalforderung), so ist die Entscheidbarkeit der relativen Konsistenz heute kein relevantes Kriterium mehr.

7.3.4 Ist das Universenaxiom adäquat für die beabsichtigten Anwendungen?

Wir hatten bereits in 7.1.4 Äußerungen von Feferman und Isbell kennengelernt, wonach das Universen-Axiom in gewissem Maße auch aus Sicht der Kategorientheoretiker nicht völlig zufriedenstellend ist, da mit Grothendieck–Universen in der KT die Konstruktionen unhandlich werden (vgl. etwa [Mac Lane 1969, 193]). Feferman drückt es so aus:

> Whatever the intrinsic plausibility of such axioms, they seem to have nothing to do with the actual requirements of category theory but only with the particular formulation adopted. For example, some questions of transferring results about one universe to another arise which seem difficult but irrelevant [Feferman 1969, 201].

Mit *irrelevant* könnte hier gemeint sein, was Bénabou anspricht: *"as soon as* **U** *is big enough, the properties of the Yoneda embedding of a category* **C** *into the category of functors from the dual* $\mathbf{C}^{op}$ *into the category of sets in* **U** *(e.g. it is full and faithful) do not depend on* **U***, and are "purely formal" "* ⟨#118 S.301⟩. Wir haben hier wieder einen Beleg, daß der intuitive Umgang mit den KT-Konstrukten auf den technischen *common sense* bezogen ist, der sich mit "rein formalem" Verhalten beschäftigt (vgl. 7.1.4). Die zu machenden Einschränkungen sind von außen in die KT hereingetragen und in dieser ein Fremdkörper[475].

Eine mögliche Reaktion auf diese Beobachtung ist es, doch genauer hinzusehen, ob die Maßnahmen, die zu umständlichen Vorgehensweisen zwingen, tatsächlich notwendig sind. In SGA 4 ist man womöglich zu schnell bei der Hand mit den Vorsichtsmaßnahmen; [Johnstone 1977, xix] schreibt *"I have limited myself to considering sheaves only on small sites; this [. . .] is [. . .] not as irksome as the authors of [SGA 4] would have us believe".* Diese Idee der genaueren Problemanalyse greift Kreisel systematisch auf; vgl. 7.4.3.

7.4 Andere Lösungsvorschläge

In den folgenden Abschnitten kommen noch einige Lösungsvorschläge zur Sprache, die nicht so weit entwickelt wurden und auch nicht eine so große Verbreitung gefun-

[475][Osius 1976, 205f] kann einen Teil der entstehenden Probleme vermeiden.

den haben wie Grothendieck-Universen[476].

7.4.1 Ein Vorlauf: Mac Lanes Warschauer Vortrag

Auf der Warschauer Konferenz[477] von 1959 (vgl. [Bernays et al. 1961]) listete Mac Lane die damals bekannten Probleme (alle aus der homologischen Algebra) auf und gab Teillösungen für manche von diesen, indem er zeigte, daß die den fraglichen Konstruktionen in einem bestimmten Typ von abelschen Kategorien, die er als *locally small* bezeichnete, durchführbar sind (Zur Bedeutung von "locally small" unten mehr).

Mac Lanes Text entsteht bedingt als Reaktion auf [Grothendieck 1957]; "bedingt" deshalb, weil bei näherer Betrachtung von Mac Lanes Text deutlich wird, daß er sich nur lose auf Grothendiecks Text bezieht:

- Explizit geht er auf Grothendiecks Text nur insofern ein, als er sagt, Grothendiecks Axiome für eine abelsche Kategorie seien äquivalent zu den seinen (S.29).
- Manche Probleme, die Mac Lane aufzeigt, stellen sich erst dann ein, wenn man die Dinge nicht in der Form behandelt, wie Grothendieck das tut, sondern in anderer Form (wobei diese Behandlung in anderer Form gleichzeitig

[476] Ich treffe hier eine relativ willkürliche Auswahl aus der gesamten Palette an mehr oder weniger stark diskutierten Vorschlägen. Dinge, auf die ich nicht näher eingehe, seien hier stichwortartig aufgelistet:

- *"Repräsentabilität"* im Sinne von [Isbell 1963].
- *Erweiterungen von* NBG. [Osius 1976] schlägt vor, zusätzliche Forderungen zu NBG zu machen. Er schließt an [Oberschelp 1964] an; vgl. auch [Oberschelp 1983].
- An verschiedenen Stellen wird auf eine starke Mengentheorie von Morse eingegangen: [Feferman 1969, 231]; [Isbell 1963, 44, 46]. Beide verweisen auf [Kelley 1955] — die bibliographischen Angaben sind leicht abweichend (ich folge Ω). Bei [Isbell 1963] stellt es sich so dar, als sei der betreffende Text von Morse ein Anhang zu [Kelley 1955]; Ω enthält einen weiteren späteren Text von Morse inklusive *reviews*. [Drake 1974, 17] gibt nähere Auskunft über die Unterschiede zwischen NBG und Morse.
- Fefermans *explicit mathematics* ist der Versuch, Funktionen als gleichberechtigt neben Mengen einzuordnen. Hierher gehören Fefermans *collections and operations*.
- [Kuehnrich 1977] entwickelt eine Art Approximationsprozess, an dessen Ende Kategorien *aller* Objekte einer bestimmten Sorte stehen. Die problematischen Konstruktionen werden also approximiert, aber nie wirklich durchgeführt (diese Idee ist vergleichbar mit der, die der Čech-Theorie zugrundeliegt).

[477] Vgl. Anm.443. Übrigens: Lacombe war in Warschau anwesend; [Bernays et al. 1961, 7]. Davon, daß er sein Diskussionspapier *n°301* (vgl. 6.4.3) unabhängig von Mac Lanes Vortrag erarbeitet hat, kann also nur dann ausgegangen werden, wenn *n°301* vor der Warschau-Konferenz entstanden sein sollte. Dies scheint auch der Fall zu sein: *no°301* ist, wie in Anmerkung 412 ausgeführt, nach dem 07.07.1958 entstanden und wurde frühestens am 05.10.1958 besprochen, wobei allerdings mehr für März 1959 spricht; die Warschauer Konferenz fand erst vom 02.-09.09.1959 statt.

nach Mac Lanes Auffassung Vorteile hat, weshalb er sie auch propagiert). So bringt zum einen Buchsbaum den Limitbegriff in mengentheoretisch problematischer Weise ins Spiel, zum anderen entwickelt Yoneda eine mengentheoretisch problematische Behandlung von Ext und Tor. Mac Lane läßt also auch diese Gelegenheit nicht aus, eine Lanze für seine *community* zu brechen.

- Die bei Grothendieck zentralen infinitären Operationen werden bei Mac Lane (trotz des Themas der Tagung: *infinitistic methods*) nur am Rande erwähnt (S.29) — was sich dann auch in seiner Universendefinition niederschlägt, bei der die Eigenschaft 4) fehlt (S.39).

- Wir hatten uns in 5.2.3.3 mit Mac Lanes Behauptung "[[Grothendieck 1957]] *has shown that [. . .] a consideration of categories of categories has many advantages*" (S.28) auseinandergesetzt und gesehen, daß sie inhaltlich zwar zutrifft, gleichzeitig aber doch einen starken Anteil von Interpretation enthält, da bei Grothendieck diese Betrachtung von **Cat** implizit bleibt. Mac Lane beweist mit seiner Interpretation die Weitsicht dessen, der ein Gefühl für die Möglichkeiten der KT hat, lehnt sich damit aber automatisch nur lose an den Wortlaut von Grothendiecks Text an (wobei Grothendieck natürlich zweifellos ebenfalls über eine solche Weitsicht verfügt).

Mac Lane wußte zu dieser Zeit bereits, daß Lösungen, vollständiger als die seine, möglich sind mithilfe von Grothendieck-Universen, denn er schreibt: *"Grothendieck (unpublished) is reputed to use the assumed existence of strongly inaccessible cardinals to construct large 'universes' [. . .]"* (S.42). Mac Lane machte diese Bemerkung womöglich u.a. deshalb, weil Tarskis Axiom zu den Themen der Konferenz gehörte: Bernays diskutiert es in seinem Vortrag ausdrücklich (vgl. [1961, 16]), und Mac Lane hat zweifellos den Vortrag seines Doktorvaters aufmerksam verfolgt. Ich gehe in Anm.443 näher auf die Frage der vermutlichen Rolle von Mac Lanes Vortrag auf der Konferenz ein.

Inhaltlich geht es bei *locally small* hier um folgendes: Zu den Kategorien, in denen die homologischen Konstruktionen gemacht werden, sollen kleine Unterkategorien bestimmt werden derart, daß die Konstruktionen bereits in der kleinen Situation möglich sind (Stichwort: mindestens ein Vertreter aus jeder Isomorphieklasse) und sich dann auf die großen Kategorien hochziehen lassen. Im Grunde geht das bereits in Richtung der Reflektionsprinzipien (7.4.3). Der Begriff ist nur für additive bzw. abelsche Kategorien gedacht; im allgemeinen Fall nennt Mac Lane später Kategorien mit Hom-Mengen *locally small* [1971a, 233]. Mac Lane weist nach (S.39f), daß die relevanten Modul- und Garbenkategorien lokal klein sind; er verwendet dazu projektive bzw. injektive Auflösungen[478]. *Enough injectives* ist also gewissermaßen eine mengentheoretische Eigenschaft (eine Größenangabe). Die Probleme bei Yonedas Behandlung von Ext und Tor und Buchsbaums Limes-Idee werden damit lösbar.

[478]Hier wird sein Vorgehen etwas unverständlich, da er ja entweder gezwungen ist, eine solche Auflösung auszuwählen (was er selbst wegen der Verwendung des AC für Klassen kurz zuvor als problematisch hingestellt hat; vgl. 7.2.2), oder aber er bleibt auf der Ebene des reinen Existenzbeweises, wo dann nicht klar ist, was er durch seinen Begriff gewinnt.

Man kann bei Mac Lane sehen, woher zuweilen der Umstand rührt, daß manche kategorientheoretischen Konstruktionen, in bestimmten Situationen angewandt, zu Problemen führen: gerade daher, daß die Konstruktionen sich nicht auf die Einzelheiten der in der jeweiligen Situationen vorliegenden Objekte beziehen. So zeigt [Mac Lane 1961, 34ff] ein Problem auf, das mit einer Limitkonstruktion zusammenhängt (7.2.2). Der Kontext, in dem der Limes konstruiert werden soll, tritt bei [Grothendieck 1957] tatsächlich auf, und zwar handelt es sich um einen Limes über eine Klasse von exakten Sequenzen; diese Klasse erweist sich als echt. Die Limitkonstruktion bezieht sich natürlich nicht auf die Beschaffenheit dieser Klasse (daß sie nämlich aus exakten Sequenzen besteht, woraus sich ergibt, daß sie echt sein kann); für diese Konstruktion ist nur wichtig, daß eine gerichtete Menge vorliegt, also eine partielle Ordnung mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften. In den Nachweis dieser Tatsachen geht die Beschaffenheit der Situation zweifellos ein; jedoch *dort* ist es wohl auch noch nicht wichtig, ob die fragliche Klasse echt sein kann oder nicht. Mit einer Klasse, die eine echte Klasse enthalten müßte, bekommt man es erst zu tun, weil die Elemente des Limes ihrerseits Äquivalenzklassen von Objekten sind (Äquivalenzklassen, die *hier* aufgrund der speziellen Beschaffenheit der Objekte echt sein können). Die KT verliert also gewissermaßen unterwegs, durch mitgeschleppte Ontologie, die Immunität gegen problematische Totalitäten.

7.4.2 Ehresmann: Selbstenthalten "geeignet" erlauben

Ehresmanns Vorschläge werden in der Diskussion weniger beachtet, in Übereinstimmung mit der Wahrnehmung seiner genuin mathematischen Beiträge.

Die erste Publikation Ehresmanns, in der er Kategorientheorie verwendet, scheint die Arbeit [1957] zu sein[479]. Ehresmann äußert sich am Anfang der Arbeit in knapper Form über die mengentheoretische Grundlegung, die er verwendet:

> Wir unterscheiden zwischen Mengen und Klassen. [. . .] die Klasse aller Mengen ist keine Menge. Wir lassen für Klassen dieselben Operationen zu wie für Mengen. Wir vermeiden also nicht die Bildung von gewissen Klassen von Teilklassen einer Klasse. Sollten sich durch diese Begriffsbildungen Widersprüche ergeben, so wäre es immer möglich, Beschränkungen einzuführen, um im Rahmen der Mengenlehre zu bleiben; dadurch würde die Theorie aber umständlicher werden.

Eine Begründung dafür, daß es immer möglich sei, solche Beschränkungen einzuführen, wird nicht gegeben. Paul Dedecker greift Ehresmanns Arbeit in [1958] auf; in

[479]Das in dieser Arbeit behandelte Thema der "lokalen Strukturen" hat er vorher schon verschiedentlich bearbeitet; vgl. [1957, 49]. Dort scheint aber der kategorielle Standpunkt noch nicht zur Anwendung zu kommen; so schreibt [Dedecker 1958, 103]

> Les structures locales ont été introduites en 1951 par M. Ch. Ehresmann [. . .] et leur étude constitue le fondement naturel de la géométrie différentielle. [. . .] Elles s'insèrent naturellement dans le cadre des catégories et foncteurs conformément à [[Ehresmann 1957]].

einem Anhang *Remarque sur les fondements* geht er ausführlich auf eine alternative Klassentheorie ein. Dedecker stellt zunächst die Situation bei NBG dar; er sagt dann

> La logique conforme [aux] principes [de NBG] n'est pas sans imposer certains inconvénients dans l'étude des catégories et foncteurs, inconvénients qui ne semblent pas avoir retenu l'attention des logiciens et qu'il semble raisonnable de chercher à éliminer [S.130].

Die Bemerkung *inconvénients qui ne semblent pas avoir retenu l'attention des logiciens* ist zutreffend; wir hatten gesehen, daß um 1958 noch keine Aktivität seitens der mathematischen Logik in den Fragen der Grundlegung der KT zu verspüren war. Dedecker fährt fort mit einer Schilderung, an welche *inconvenients* er denkt:

> [...] Dans le contexte de [NBG], les [$\mathrm{Hom}(A, B)$] ne peuvent être pris comme objet d'une nouvelle catégorie que si ce sont des ensembles, restriction qui est souvent prise comme condition supplémentaire, quoique étrangère en fait au sujet.

Als Beleg für das *souvent* führt er [Gugenheim und Moore 1957], [Kan 1958a] und [Grothendieck 1957] an[480]. Daß er die Forderung an die $\mathrm{Hom}(A, B)$, klein zu sein, als *étrangère en fait au sujet* akzentuiert, weist voraus auf den späteren Hauptstreitpunkt der Diskussion zwischen Fachkategorientheoretikern und Logikern, die Artifizialität der Sicherheitsmaßnahmen (vgl. 7.4.3).

Dedeckers Vorschlag einer Abänderung von NBG besteht nun darin, daß Prädikate sowohl auf Mengen wie auf Klassen angewandt werden können (im Unterschied zu NBG), daß aber im Gegenzug nicht jedes Prädikat eine Klasse als Extension hat; Prädikate oder *propriétés*, für die das der Fall ist, bezeichnet er als *collectivisantes*. Eine axiomatische Theorie sieht nun so aus, daß für jede *propriété* Q durch ein Axiom zu regeln ist, ob sie *collectivisante* ist oder nicht. Hierbei geht es natürlich nicht um eine abschließende Axiomatisierung, sondern um ein dynamisches Axiomensystem, das von Fall zu Fall (je nachdem, welchem Q man in der praktischen Arbeit begegnet) erweitert werden muß. Über das offensichtliche Problem mit diesem Verfahren geht Dedecker recht schnell hinweg:

> Cela revient à raisonner à partir de ce moment dans une théorie plus forte (étant entendu que l'on risque de devoir un jour abandonner [le nouveau] axiome s'il conduit à une contradiction).

Dedecker zählt eine Reihe solcher Prädikate $Q(x)$ auf, von denen er fordert, daß sie *collectivisante* sein mögen: *x est une sous-classe de A* (man hat also eine Klasse der Teilklassen einer vorgelegten Klasse); *x est une classe* (man hat also eine Klasse aller Klassen ("Universum") $\mathfrak{U}$); ferner soll man die Klasse der Äquivalenzklassen einer ÄR auf einer Klasse von Mengen bilden können. Dedecker bespricht die Eigenschaften von $\mathfrak{U}$ näher; insbesondere legt er dar, daß sich aus $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}\mathfrak{U}$ keiner

[480]Dedecker ist also bestens orientiert über den Stand der Dinge in den verschiedenen Arbeitsfeldern, in denen die KT um 1958 zur Anwendung kommt; in anderem Zusammenhang zitiert er auch [Mac Lane 1950] und greift dessen *bicategories* auf. Dies relativiert die verschiedentlich vertretene Auffassung, Ehresmanns *community* habe sich weitgehend vom *mainstream* entfernt.

der bekannten Widersprüche ergibt: Russells Antinomie scheidet aus, weil sehr gut die Eigenschaft R, gegeben durch $R(x) \cong x \notin x$, *non-collectivisante* sein kann und gleichzeitig S, gegeben durch $S(x) \cong x \in x$, *collectivisante.* Ein Widerspruch zum Satz von Cantor tritt ebenfalls nicht ein, was Dedecker so erklärt: Der Satz von Cantor wird ja bewiesen, indem die Annahme, es gäbe eine Injektion $f : \mathfrak{P}(A) \to A$, zum Widerspruch geführt wird: man bestimmt zu $a \in \mathrm{Bild}(f)$ das Urbild $f^{-1}(a) \subset A$ und geht dann zur Teilklasse X von A derjenigen a mit $a \notin f^{-1}(a)$ über. Normalerweise ergibt sich hier der Widerspruch zur Annahme, es gäbe f, da für $x = f(X)$ gelten müßte $x \in X \Leftrightarrow x \notin X$. Dedecker weist aber darauf hin, daß man in seiner Situation erst einmal festlegen muß, ob es X überhaupt gibt, d.h. ob die entsprechende Eigenschaft *collectivisante* ist. Seine Festlegung sieht so aus, daß sie dies für Mengen ist (der Satz von Cantor für Mengen also gilt), für echte Klassen nicht (es dort also ein f geben kann).

Es wurden andere Formen des Erlaubens von Selbstenthalten diskutiert. Wegen ihrer speziellen Behandlung des Selbstenthaltens von V erscheinen auf den ersten Blick Quines *New foundations* (NF) interessant[481]. Ich führe diesen Punkt aber hier nicht aus, weil Solomon Feferman mehrfach darauf hingewiesen hat, daß die in NF möglichen Lösungen nicht für mathematisch interessante Beispiele funktionieren. Z.B. berichtet er bei [1977, 156], daß er es in [1974] mit Quines *Stratification* versuchte; dort gab es aber keine kartesischen Produkte. Eine Entwicklung von mengentheoretischer Seite in diese Richtung ist das *Antifoundation axiom* AFA (nicht wohlfundierte Mengen, *hypersets*); eine populärwissenschaftliche Einführung in diese Theorie (mit Verweisen auf die relevante Literatur) liefern [Barwise und Moss 1991]. Die *hypersets* wurden bisher meines Wissens noch nicht im Rahmen der Grundlagendebatte der KT untersucht.

7.4.3 Kreisel: Was ist tatsächlich erforderlich?

Die naive KT ist beweistheoretisch nicht gut zu untersuchen, weil sie mengentheoretisch nicht unmittelbar erfaßbar ist. Grothendieck ummantelt die naive KT mit einer Art Panzer (den Universen), der sie vor bekannten illegitimen Kollektionen schützt. Dadurch verliert die KT einen Teil ihrer Naivität (Handhabbarkeit). Grothendieck geht es natürlich nicht um eine Ermöglichung der beweistheoretischen Untersuchung der KT, sondern darum, jede mögliche "Bedrohung" aus dieser Richtung von vorneherein auszuschalten. Kreisel weist darauf hin, daß man doch lieber (beweistheoretisch) untersuchen sollte, in welchem Maß die durch Universen gewährte Freiheit überhaupt wirklich erforderlich ist (man käme zu einer nicht mehr naiven KT, über deren Methoden und Konstruktionen man sich im einzelnen Rechenschaft gibt). Kreisel äußert sich im Zusammenhang der Probleme der *self-application* der KT:

> [...] so far mathematical practice does not *force* one to consider notions more abstract than those of the cumulative type structure. This, by itself, does not support

[481] Insbesondere spricht [Quine 1937, 92] von *"the universal class V, to which absolutely everything belongs, including V itself"*.

> the conclusion that therefore such notions are irrelevant to mathematics. It is common experience [...] that the first uses of potentially powerful principles make the exposition clearer, but can be eliminated; for example, for a long time arithmetic #112
> remained constructive, although the principle of induction permits nonconstructive uses; and even to this day analysis is exaggeratedly predicative, that is, uses surprisingly elementary instances of the least upper bound. There may indeed be a reason why self-application should be excluded (at least) from (realist) mathematics; but if so, this reason is not understood [Kreisel 1965, 118].

In diesem Zitat kommt Kreisels grundsätzliche Haltung zum Ausdruck: Er plädiert dagegen, sich mit starken Annahmen unbeschränkte Verfügungsgewalt über intendierte Konstruktionen zu verschaffen, und dafür, lieber genau zu analysieren, in welchem Maß der tatsächliche Einsatz dieser Konstruktionen von den starken Annahmen überhaupt Gebrauch macht. In einer solchen Analyse sieht er die Aufgabe des Logikers, dessen Fachkompetenz dazu benötigt wird (die Trennung der mathematischen Praxis von ihrer logischen Analyse ist sinnvoll, [1974, 71]). Es besteht also ein deutlicher Unterschied zwischen den Ansätzen von Grothendieck und von Kreisel: Grothendieck versucht, durch eine starke Mengenlehre Substitute für die problematischen Konstruktionen der KT zu haben. Kreisel versucht, die Verstärkung der Mengenlehre so gering wie möglich zu gestalten, indem er fragt, in welchem (extensionalen) Maß die problematischen Konstruktionen für die Praxis tatsächlich eine Rolle spielen. Dies steht *nicht* in Konflikt mit Grothendiecks Position aus *n°307*, daß die Möglichkeit mengentheoretischen Operierens auf den Konstruktionen unverzichtbar und eine Einschränkung auf "ideale" Konstruktionen *à la* Lacombe nicht zufriedenstellend ist; vielmehr will Kreisel eben untersuchen, ob man die Konstruktionen derart umgestalten kann, daß möglichst schwache Annahmen über die Mengentheorie genügen, um die Möglichkeit mengentheoretischen Operierens sicherzustellen.

Allerdings steht zu vermuten, daß durch die im Rahmen von Kreisels Vorhaben in Anwendung zu bringenden Modifikationen die Handhabbarkeit der Theorie noch weiter abnimmt (also über das bereits bei Grothendieck erreichte Maß an schlechter Handhabbarkeit — vgl. 7.3.4 — hinaus). Kreisels Vorhaben weist also klar in Richtung Darlegung der Grundlagen und zugleich weg von praktischen Bedürfnissen, impliziert also die Trennung von beidem (in Übereinstimmung mit Kreisels Auffassung hierzu, wie oben dargestellt). Kreisel würde wohl Bénabous Hinweis, eine Grundlage könne nur dann adäquat sein, wenn sie sich nicht zu weit von der Praxis entferne (8.2.2), nicht akzeptieren; es stört ihn offenbar auch nicht, daß der Effekt, den man sich von *potentially powerful principles* erhofft (*[they] make the exposition clearer*) mit diesen Prinzipien gemeinsam eliminiert würde. Dies ist ihm, im Geiste Freges, wohl nur Kommunikationsanteil, auf den es letztlich nicht ankommt.

Kreisel scheint nicht sagen zu wollen, Selbstanwendung sei grundsätzlich problematisch (*if so, [the] reason is not understood*); andererseits vergleicht er bei [1969, 239f] das Selbstanwendungsproblem der KT mit dem Selbstanwendungsproblem der Wohlordnung und legt den Kategorientheoretikern zur Last, die einschlägigen, im Zusammenhang des zweitgenannten Problems entstandenen Arbeiten nicht zur

Kenntnis genommen zu haben. Das Argument *"[we] 'want' or 'need' to use illegitimate totalities"* läßt Kreisel nicht gelten [1969, 239].

Ein Ergebnis von Kreisels Bemühungen scheint der gemeinsam mit Feferman entwickelte (und auch von Müller unterstützte) Ansatz der Nutzbarmachung von Reflektionsprinzipien für die KT zu sein. Ein solches Reflektionsprinzip wenden [Feferman 1969] und [Engeler und Röhrl 1969] an; die Idee geht auf Kreisel zurück, vgl. [Kreisel 1965, 118] und [Feferman 1969, 203 Anm.3], wo eine unveröffentlichte Arbeit von Kreisel zu dieser Frage referiert wird. Die Grundidee hinter den Reflektionsprinzipien (und die bei der Namensgebung zum Tragen kommende Intention) kann man folgender Passage aus [Kreisel 1972] entnehmen:

> [...] "reflection principle": applied to the collection G of all groups, it says that what can be expressed about G in the language of current practice is already "reflected" in a suitably chosen "small" set $G^{[S]}$ of groups.

(Für eine genauere Erklärung kann man — neben den genannten Arbeiten — [Jensen 1967] zu Rate ziehen; vgl. auch ⟨#129 S.315⟩.) Bei diesem Ansatz handelt es sich aus methodischer Sicht eindeutig nicht um naive Mengenlehre (i.S. Halmos'; vgl. 7.3.3), sondern um Untersuchungen von fachmengentheoretischer Seite.

Welches ist das Verhältnis von solchen Reflektionsprinzipien zum Universenaxiom? Beides ist keinesfalls dasselbe; [Blass 1984, 7]. Eher schon kann man das Universenaxiom als einen (besonders grobschlächtigen) Spezialfall eines Reflektionsprinzips auffassen; [Kreisel 1965] sagt in Abschnitt 1.9:

> [The] leading exponents [of category theory] use the axiom of universes, that is, the reflection principle stated for the (infinite) conjunction of all axioms of [ZF]. Now, even without knowledge of the details, it is morally certain that the additional axiom is not needed. In any particular proof (involving categories) only a finite number A_F of axioms of set theory are used. One has almost certainly overlooked the fact that for each such case the reflection principle is provable in set theory (by use of axioms other than A_F) provided regularity is assumed. So the ideas of the reduction [of the theory of categories to set theory] can be applied to the set in which these axioms hold instead of applying them to the universe of all sets.

Von daher verwundert es nicht, daß [Kreisel 1969, 239] das Universenaxiom kritisiert, und es ist nun auch klarer, inwiefern die vom Universenaxiom gemachten Annahmen stärker als nötig sind. Gleichzeitig ist ein Vorzug schwächerer Reflektionsprinzipien, daß man metamathematische Resultate hat — vgl. [Feferman 1969, 210]: konservative Extension.

Es ist unklar, ob je ein Kategorientheoretiker auf Kreisels Methoden zurückgegriffen hat. Eher schon hat sich — in der elementaren Topostheorie — die Maxime bewährt, zur Vermeidung von Universenaxiomen immer genau hinzusehen, ob man nicht auch mit dem Beweis einer elementaren Aussage zufrieden wäre. Beispielsweise schreibt [Johnstone 1977, xix]:

> I [...] wish to consider certain "very large" 2-categories [...] whose objects are themselves large categories. If I wished to be strictly formal about this, I should

> need to introduce at least one Grothendieck universe; but since all statements I wish to make about [these 2-categories] are (equivalent to) elementary ones, there is no *real* need to do so.

7.4.4 Bénabou: Was hängt tatsächlich von Mengenlehre ab?

Ein Versuch anderer Art, die *proper presentations* (Isbell) zu entwickeln, ist [Bénabou 1985]. Historisch gehört diese Unternehmung nicht mehr zum in der vorliegenden Arbeit vornehmlich betrachteten Zeitraum; eine knappe Darstellung erscheint mir jedoch in verschiedener Hinsicht sinnvoll: Zum einen scheinen Bénabous Vorschläge auf einer genaueren Analyse der Probleme zu beruhen als die vorangegangenen und sind insofern befriedigender; zum anderen macht Bénabou zahlreiche Anmerkungen, die helfen, zu verstehen, wieso die übrigen Vorschläge aus Sicht eines Kategorientheoretikers nicht befriedigend scheinen.

Bénabou hat einen anderen Ansatz als den, die Einführbarkeit gewisser als problematisch bekannter Konstruktionen innerhalb einer geeigneten Mengenlehre sicherzustellen. Zunächst stellt er Adäquatheitsbedingungen für eine Grundlegung der KT zusammen: Grundlagen für die KT sind inadäquat, wenn sie bestimmte wichtige Konstruktionen ausschließen oder sich zu weit von der Art entfernen, wie diese Konstruktionen normalerweise benutzt werden. Darüber hinaus sollten sie "dehnbar" sein: sich an Weiterentwicklungen der Disziplin anpassen können und solche sogar nahelegen[482]. Diese Adäquatheitsbedingungen nehmen offensichtlich den technischen *common sense* als Maßstab[483]. Anhand der Bedingungen kann er auf S.13 in §2 die *usual foundations* als inadäquat kritisieren; diese Kritikpunkte motivieren seinen alternativen Ansatz. Die Liste lautet:

> (2.1) There is of course a very simple first-order theory of categories, the models of
> which are "small categories". But it excludes or trivialises such fundamental notions #113
> as categories with infinite limits of various sorts, and thus is inadequate.
>
> (2.2) There is also a Bernays type distinction between sets and classes, but it does not allow arbitrary functor categories, which we would very much like to have.
>
> More elaborate versions have been proposed by logicians, but they have become so #114
> utterly complicated, and so far from the actual way we think about, and manipulate, #115
> categories and their relationship to sets, as to be totally inadequate. #116
>
> (2.3) The framework of universes, adopted say in (SGA), is perfectly consistent, #117
> assuming a strengthening of ZF, but [the fact that as soon as **U** is big enough, the properties of the Yoneda embedding of a category **C** into the category of functors from the dual $\mathbf{C}^{op}$ into the category of sets in **U** (e.g. it is full and faithful) do not
> depend on **U**, and are "purely formal"] show[s] that [the framework of universes] is #118
> not quite satisfactory, and again does not reflect the way we work with categories. #119

[482]Mit diesem Punkt hatten wir uns bei ⟨#4 S.18⟩ befaßt; wir hatten dort festgehalten, daß es Bénabou um mathematische Grundlagen geht.

[483]In 8.2.2 stelle ich dar, daß Bénabou die Prüfung ihres Erfülltseins sogar als wichtiger ansieht als eine Konsistenzprüfung.

> (2.4) The frameworks described in (2.2) and (2.3), apart from their inadequacy, have a very unpleasant common feature: they are based on "set theories" at least as strong as ZF, thus excluding the possibility of taking as "sets" the objects of an elementary
> #120 topos, the importance of which need not be emphasized.

Bénabou geht von dem Grundgedanken aus (der historisch erst nach Lawvere möglich ist, vgl. 8.1.3.2), KT unter Verzicht auf Mengentheorie zu definieren. Hierzu zeigt er in seiner Untersuchung auf, welche impliziten Annahmen im üblichen Arbeiten mit Kategorien (auf dem Stand von 1980!) davon abhängen, daß eine unterliegende Mengentheorie vorhanden ist. Dazu wird auf S.11 folgende Sprechweise eingeführt: *"We will call* naive category theory *[...] all the domain covered in actual work about categories [...]"*. Konsequenterweise liest man auf S.23: *"Naive category theory is not elementary. We talk about properties of categories (local smallness, infinite products, well-poweredness, etc....) using the language of sets and the whole strenght of* ZF*"* Ob sich dies "tatsächlich" so verhält (also einer beweistheoretischen Analyse standhält), ist nach Kreisel natürlich fraglich; Bénabou geht es hier wohl eher darum, daß sein Vorschlag sich an der von ihm selbst formulierten Adäquatheitsbedingung wird messen lassen müssen, eine Grundlegung dürfe sich nicht zu weit entfernen vom *actual way we think about, and manipulate, categories and their relationship to sets* ⟨#115 S.301⟩.

Seine Analyse der Grundlegungsprobleme setzt naheliegenderweise daran an, die auftretenden Probleme genauer zu inspizieren. Bei [1985, 16] hält er fest:

> From the example of big categories it is very easy to draw a false conclusion, and it has indeed been implicitly drawn, namely, that the only reason why a category could fail to be a set is that it is too big.

Bénabou diskutiert dazu das Beispiel *"If* $\mathbf{C}$ *is locally small[*[484]*], we can construct for each pair* X, Y *of objects of* $\mathbf{C}$ *the set* $\mathrm{Mono}(X, Y)$ *of all monomorphisms from* X *to* Y*"*. Dieser Schluß spielt offenbar in [Grothendieck 1957] eine wesentliche Rolle, vgl. z.B. ⟨#59 S.135⟩; hierher gehört auch Mac Lanes Axiom "C6" [1961, 27]. Bénabou stellt fest, daß in der Mengenlehre vermöge des Komprehensionsschemas diejenigen Teilklassen von $\mathrm{Hom}(X, Y)$ eine Menge bilden, die durch eine Formel ϕ *der Mengenlehre* bestimmt werden, daß aber in einer beliebigen lokal kleinen Kategorie $\mathbf{C}$ keineswegs davon ausgegangen werden kann, daß *"*f *is a monomorphism of* $\mathbf{C}$*"* durch eine Formel *der Mengenlehre* ausgedrückt werden kann[485]. Dies scheint lediglich durch die Standardmodelle nahegelegt. Bénabou merkt an, daß hier ein Pathologie-Vorwurf (vgl. 7.1.4) denkbar ist: *"[those paradoxes are] 'strange' [...] they arise out of "logical hair splitting", perhaps relevant in axiomatic set theory, but certainly of no importance in category theory"*, entkräftet aber diesen Einwand wie folgt:

> [...] topos theory shows that there is no frontier between logical considerations about sets and category theory. Moreover, since we are speaking of foundations we have to be able "to split all those hairs that might pose problems" [1985, 17].

[484] hier nicht in Mac Lanes Sinn, sondern im weiteren Sinne; vgl. 7.4.1.
[485] Dieser Gedanke ist dem Dedeckers ähnlich.

Er erarbeitet aus dem aufgezeigten Problem den Ansatz, das Komprehensionsaxiom durch einen anderen Begriff formaler Definierbarkeit zu ersetzen. Denn wenn gilt, daß Kategorien keine Mengen sein müssen (ebd. S.16; vgl. 5.3.1.2), so steht das Komprehensionsaxiom zur Disposition (und mit diesem, wie Bénabou weiter erarbeitet, der Gleichheitsbegriff, der Begriff der mengentheoretischen Repräsentierbarkeit, der Begriff der Familie). Der MR-*Review* stellt es so dar:

> The central role played by formal definability in (the comprehension scheme of) the usual set-theoretic foundations is played in the author's foundation for category theory by a category-theoretic concept of definability based upon representability of functors. (Both sorts of definability serve to ensure the existence of needed sets or objects of the base category.)

Bénabous Vorschlag ist also, zum Aufbau der KT nicht Mengenabstraktionen, sondern einen anderen Typ von Grundoperationen (auf technischer[486] Stufe) zu verwenden. Die Natur dieser Grundoperationen ist dergestalt, daß die Adäquatheitsbedingung (s.o.) erfüllt ist (denn die Operationen gehen ja genau aus dem tatsächlichen Arbeiten mit Kategorien hervor).

[486] Es würde hier zu weit führen, den Vorschlag im Detail nachzuzeichnen; Bénabou stützt sich auf Grothendiecks Untersuchungen zu *catégories fibrées* (SGA 1).

Kapitel 8

KT als Grundlage der Mathematik?

Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?! Sie braucht sie, glaube ich, ebenso wenig, wie die Sätze, die von physikalischen Gegenständen handeln, eine Analyse. Wohl aber bedürfen die mathematischen, sowie jene andern Sätze, einer Klarlegung ihrer Grammatik.
Die mathematischen Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Mathematik sowenig zugrunde, wie der gemalte Fels die gemalte Burg trägt.
[Wittgenstein 1984a] VII 16. (S.378)

Die Mathematik im 20. Jahrhundert war u.a. geprägt von einer ausführlichen Thematisierung und Diskussion ihrer wissenschaftlichen Grundlagen. Die Fachdisziplinen Mengentheorie, Modelltheorie und Beweistheorie wurden ursprünglich z.T. als wissenschaftliche Methoden für die Grundlagenforschung entwickelt (mittlerweile haben sie allerdings jenseits einer solchen Zielrichtung aus sich heraus als Forschungsdisziplinen Relevanz[487]). Die Aufgabe der Darlegung der Grundlagen teilen sich die Mathematiker mit den (Wissenschafts-)Philosophen.

Auch die Kategorientheorie war im Gespräch als von Belang für die Grundlagenforschung. Das vorliegende Kapitel greift einige Elemente der zugehörigen Diskussion auf. Die Diskussion dauert noch an und umfaßt zahlreiche Einzelbeiträge (z.T. auch im Internet und von zweifelhafter Qualität)[488]; hier soll (und kann) nicht auf alle diese Beiträge eingegangen werden. *Eine* jüngere Veröffentlichung, die ich hier nicht näher bespreche, verdient gleichwohl einiges Interesse und ist insofern besonders hervorzuheben: [Marquis 1995].

Insgesamt stelle ich die Diskussion nur knapp dar, da die Fragestellung meines

[487] Zu diesem Übergang vgl. ausführlich 1.2.2.2. [Sacks 1975] polemisiert gegen einen Einsatz von mathematischer Logik in grundlagentheoretischen Fragestellungen.

[488] Es ist auffallend, daß viele Wissenschaftler, die irgendwo in den Bereichen Philosophie der Mathematik, mathematische Logik, Wissenschaftstheorie, Sprachphilosophie, Theoretische Informatik etc. etc. tätig sind, von der Idee, die KT als Grundlage der Mathematik anzusehen, gehört zu haben scheinen, ohne sich je damit auseinandergesetzt zu haben. Selbst im Vorwort zur französischen Übersetzung von Quines *Word and object* schneidet Paul Gochet das Thema an. McLarty weist auf manche Verkürzungen der tatsächlichen Entwicklung hin, die durch diese Folklore kolportiert werden; vgl. 8.1.3.3. Schon erwähnt wurde der jüngste Erfolg der KT in der Tagespresse [Dath 2003], wo es implizit auch um das (pragmatische) Grundlegungspotential der KT geht.

Erachtens letztlich an der Sache vorbeigeht. Ich konzentriere mich vielmehr zum Ende des Kapitels (und der Arbeit) darauf, einen Beitrag zur Diskussion zu formulieren von demjenigen erkenntnistheoretischen Ansatz her, der bereits in den historischen Untersuchungen der vorangehenden Kapitel zur Interpretation herangezogen wurde. Ich vertrete die historische These, daß die KT sich keineswegs als alternative Grundlage der Mathematik behauptet hat, sondern vielmehr ein Kristallisationspunkt der Obsoletheit des klassischen Grundlagenbegriffs nach dem Muster der Mengenlehre ist.

8.1 KT-Grundlagen: Ein geschichtlicher Überblick

8.1.1 Lawveres ursprünglicher Entwurf; Einwände

F.William Lawvere schlug in seinem Vortrag [1966] vor, das Problem der Grundlegung der Mathematik[489] auf völlig andere Weise anzugehen: Anstatt die Mathematik auf die Axiome erster Stufe von ZFC oder auf die NBG-Axiome aufzubauen, gab er eine formale Sprache (ein Alphabet, Regeln zur Bildung von Ausdrücken und Formeln sowie logische Inferenzregeln) an und ein in dieser Sprache formuliertes Axiomensystem für die Kategorie **Cat** aller Kategorien. Diese Sprache hat natürlich Symbole für Formeln der KT, z.B. $\Gamma(x, y; u)$ für *u is the composition x followed by y* etc. Das Axiomensystem garantiert in Analogie zu ZFC die Existenz bestimmter Kategorien (Objekte in **Cat**) und Konstruktionen und ist aufgeteilt in eine *basic theory* und eine *stronger theory*.

Der Text beginnt mit einem Plädoyer für ein Abstreifen der ontologischen Zugeständnisse, die mit dem Mengenparadigma einhergehen. Positiv wird zur Ontologie bemerkt, daß es der Mathematik von Lawveres Gegenwart um die *abstract structure* der mathematischen Objekte ginge.

> In the mathematical development of recent decades one sees clearly the rise of the
> conviction that the relevant properties of mathematical objects are those which can
> #121 be stated in terms of their abstract structure rather than in terms of the elements
> which the objects were thought to be made of. The question thus naturally arises
> whether one can give a foundation for mathematics which expresses wholehartedly
> #122 this conviction concerning what mathematics is about, and in particular in which
> classes and membership in classes do not play any role. Here by "foundations" we
> #123 mean a single system of first–order axioms in which all usual mathematical objects
> #124 can be defined and all their usual properties can be proved. A foundation of the sort
> we have in mind would seemingly be much more natural and readily–usable than the
> classical one when developing such subjects as algebraic topology, functional analysis,
> #125 model theory of general algebraic systems, etc. Clearly any such foundation would
> have to reckon with the Eilenberg–Mac Lane theory of categories and functors. The
> author believes, in fact, that the most reasonable way to arrive at a foundation
> #126 meeting these requirements is simply to write down axioms descriptive of properties

[489] In [Krömer 2001b] habe ich es fälschlicherweise so dargestellt, als ginge es Lawvere darum, eine Alternative zur mengentheoretischen Grundlegung der Kategorientheorie anzugeben.

> which the intuitively–conceived category of all categories has until an intuitively–
> adequate list is attained; that is essentially how the theory described below was #127
> arrived at. Various metatheorems should of course then be proved to help justify the #128
> feeling of adequacy. [1966, 1]

Lawvere versucht, die Kategorie aller Kategorien axiomatisch zu charakterisieren. Das bedeutet, daß er die einzelnen Kategorien als Objekte der von seinen Axiomen charakterisierten Kategorie aller Kategorien auffaßt (wobei er noch zu charakterisieren hat, wodurch ein Objekt einer Kategorie zu erkennen ist). Insbesondere zieht er für seine Axiome nur solche Eigenschaften der einzelnen Kategorien heran, die diese als Objekte von **Cat** haben. Wenn es etwa darum geht, die Ordinalzahl **2** in **Cat** auszuzeichnen, so ist es zwar sehr einfach, **2** als Kategorie aufzufassen; um sie allerdings als Objekt in **Cat** aufzufassen, muß man die Funktoren studieren, die es auf dieser Kategorie **2** bzw. in diese Kategorie **2** geben sollte, sowie die Beziehungen, die zwischen diesen Funktoren bestehen. Lawvere stellt eine Liste von solchen Beziehungen zusammen, durch die hinreichend charakterisiert wird, daß es sich um Funktoren auf oder nach **2** handelt, und nimmt daraufhin als Axiom an, daß es in seiner Kategorie **Cat** Pfeile und Objekte gibt, so daß diese Beziehungen bestehen. **2** als Kategorie aufzufassen, liefert eine "interne" Charakterisierung von 2, die für Lawveres Vorhaben nicht ausreicht, ihm aber als Hilfestellung dient, um dieses Vorhaben durchführen zu können. Aus diesem Grund sagt Lawvere auch einmal (S.7) explizit, daß man das "Innere" (*the "inside"*) einer bestimmten Kategorie (also eines bestimmten Objektes von **Cat**) auf eine bestimmte Weise darstellen kann[490].

Interessant ist, daß Lawvere die *Kategorie* aller Kategorien charakterisieren will und nicht etwa das "Universum" aller Kategorien, die Extension des Begriffs Kategorie: Ihn interessiert ein spezieller Umgang mit den Instanzen dieses Begriffs (als Objekte einer Kategorie), nicht allein ihr Instanzsein. Insgesamt wird ein Rollenwechsel zwischen Mengenlehre und Kategorientheorie vorgeschlagen, der von ähnlicher Art ist wie der Rollenwechsel zwischen Werkzeug und Objekt; man könnte von den Rollen des Rahmennehmers und des Rahmengebers sprechen[491]. Isbell drückt es in seinem *Review* zu Lawveres Arbeit (MR34 #7332) so aus:

---

[490]Diese Unterscheidung zwischen dem Inneren der Objekte von **Cat** *(inside)* und seiner Manifestierung in der Struktur von **Cat** deutet auf eine Schieflage in den üblichen Behauptungen über die mengentheoretische Illegitimität von **Cat** hin. **Cat** enthält "sich selbst" ja nicht als das ganze komplizierte Gebilde von Punkten, Pfeilen und Marken (ihr Inneres), sondern als einen einzigen Punkt, der mit bestimmten Pfeilen in Verbindung steht (den Funktoren zwischen anderen Kategorien und dieser Kategorie). Insofern erscheint die Rede vom "Sich selbst enthalten" als sehr vergröbernd. Dies ist natürlich kein Beweis, daß die Kategorie aller Kategorien widerspruchsfrei ist, sondern eine Entkräftung des üblichen Arguments dafür, daß sie illegitim sei.

Für die Fruchtbarkeit dieser Auffassung scheint Lawvere einen Beleg zu geben: *"the notions of infinite limits and colimits, or of an object being "finitely generated" are not always elementary from the point of view of a given category, although they do become elementary if the category is viewed as an object in the category of categories"* $\langle$#71 S.213$\rangle$. D.h. dadurch, daß man dazu übergeht, eine gegebene Kategorie als Objekt in **Cat** zu sehen, werden manche Aussagen über Objekte der gegebenen Kategorie elementar (als Aussagen über das Objekt von **Cat**).

[491]Zu der Idee des "Rahmens" vgl. [Müller 1975, 1981].

> The author's purpose is to found a theory of categories, not in axiomatic set theory, but in first-order predicate calculus. As the title suggests, the aim is not only at autonomy but at empire; all mathematics should be formulable within this theory. Technically, it would seem sufficient to annex set theory itself. But this would mean no more than equal standing for the new system, if category theory can also be adequately formulated in set theory. The claim is advanced that a categorical foundation can be more natural because it gives more prominence to the notion of isomorphism.

Entscheidend ist, daß man bald auf Probleme in Lawveres Arbeit aufmerksam wurde. Isbell[492] deutet bereits im *Review* auf einige Probleme hin; insbesondere gibt er ein Gegenbeispiel zu einem wichtigen von Lawvere behaupteten[493] Satz an. Historisch interessant ist an der Situation folgendes: Mit Isbells Kritik erweist sich das *mathematische* Problem der Arbeit, **Cat** zu axiomatisieren, als nicht vollständig gelöst. Nun müßte man doch erwarten, daß sich jemand dieses Problems annimmt und es weiterbearbeitet — und daß Lawvere seine Beweise aufschreibt und zugänglich macht, damit man die Axiome entsprechend abändern kann. Statt dessen scheint sich die Aufmerksamkeit ausschließlich auf die *philosophische* Zielsetzung der Arbeit zu richten. Diese Zielsetzung ist es, ein Axiomensystem anzugeben, vermöge dessen die Kategorientheorie als Grundlage der Mathematik dienen kann. Dieses Ziel wurde in der Arbeit nicht erreicht (trivialerweise, da etwas mit dem Axiomensystem nicht stimmt); man scheint nun anzunehmen, es sei wohl auch nicht erreichbar (wofür es aber zunächst überhaupt keine Indizien gibt). Jedenfalls ignoriert man in der Folge das mathematische Problem.

Dies ändert sich erst um 1973. So gibt es einen Beitrag von Blanc und Preller zu [Rose und Shepherdson 1975], der im JSL angekündigt wird[494]. Dort heißt es, weil eine bestimmte Kategorie Modell der *basic theory* BT sei, seien die Sätze auf den Seiten 11, 14, 15, 16 von Lawveres Arbeit falsch. Insgesamt akzentuieren die Arbeiten von Blanc, Preller und Donnadieu ähnlich wie schon Isbell in seinem *Review* die Bedeutung der *esquisses (sketches)*[495]. Ferner beziehen Blanc und Donnadieu die auch bei Bénabou hervorgehobenen *catégories fibrées* ein[496]. [McLarty 1990, 368] erwähnt ferner [Hatcher 1982] als eine Arbeit, die versucht, die Probleme bei Lawvere auszuräumen. Dies versuchen auch [Blanc und Preller 1975].

Letztlich scheint Lawveres Vorschlag reduktionistisch (Grundlage=Axiome). Er bietet auch nur wieder die Zurückführung auf *basic things* (in diesem Fall Objekte der Kategorie aller Kategorien). Man könnte einwenden: Ähnlich wie bei ZFC, so kommt auch hier die *Motivation* (mancher) der Axiome aus der Praxis ⟨#126 S.306⟩ — es

[492] Isbell hat Lawveres Vortrag vermutlich gehört, da er Teilnehmer der Tagung war und Lawvere sich in der Druckfassung der Arbeit für einen Hinweis von ihm bedankt, vgl. S.20.

[493] Lawvere gibt keine Beweise.

[494] JSL 39 (1974), n°2 S.413. Das Verhältnis zu [Blanc und Preller 1975] ist nicht klar.

[495] [Blanc und Donnadieu 1976, 136]; Ehresmann entwickelte dieses Konzept ausgehend von einer spezifischen Antwort auf die Frage "Was ist eine Gruppe": betrachte *alle* möglichen Gruppenmultiplikationen (es ergibt sich ein Funktor von **Set** nach **Set**). Vgl. z.B. [Marquis 1997b, 127f].

[496] [1976, 135]; man gewinnt dort den Eindruck, Bénabou habe diesen Begriff eingeführt; die Ehresmann-Schule nimmt die Grothendieck-Schule nicht recht wahr.

werden also inhaltliche Maßstäbe angelegt; das Beziehen einer neuen Basisebene würde dann die These vom *common sense* auf technischer Stufe unterstützen. Allerdings hat Jean Bénabou mir gegenüber angemerkt, das Hauptproblem von [Lawvere 1966] bestehe gerade darin, daß es in diesem Rahmen nicht möglich ist, das zu entwickeln, was er als die "naive KT" bezeichnet hat — also das, was die Mathematiker tatsächlich erwarten, mit der Theorie tun zu können; 7.4.4).

8.1.2 Lawveres zweiter Ansatz: Kategorien und *what is universal in mathematics*

Lawveres ursprünglicher Entwurf ist natürlich nur *eine* mögliche Art und Weise, wie KT als "Grundlage" untersucht werden kann. Später präsentiert Lawvere eine andere Lesart des Begriffs Grundlage *(foundations)*; mit *foundations* in diesem zweiten Sinn bringt er den kategorientheoretischen Begriff der Adjunktion in Verbindung.

> Foundations will mean here the study of what is universal in mathematics. Thus Foundations in this sense cannot be identified with any "starting point" or "justification" for mathematics, though partial results in these directions may be among its fruits. But among the other fruits of Foundations so defined would presumably be guide-lines for passing from one branch of mathematics to another and for gauging to some extent which directions of research are likely to be relevant [Lawvere 1969, 281].

Dieser programmatische Artikel hat das Ziel, nachzuweisen, daß Adjunktionen überall vorkommen. Hier wird also als Grundlage das bezeichnet, was in der Mathematik universell ist (allerdings geht es darum, welche *Situationen* universell sind, nicht so sehr, welche Operationen). Es ergibt sich bei Lawvere ein Postulat, welchen Beitrag die Kategorientheorie aufgrund ihrer Universalität zu einer Erkenntnistheorie der Mathematik leisten kann; dieser Beitrag, so Lawvere, ist von anderer Art als jener der üblichen Grundlagenforschung.

8.1.3 Topostheorie und "lokale Grundlagen"

Später wurde Lawveres erster Ansatz aufgegriffen mithilfe des Begriffs des elementaren Topos, eines Begriffs, der implizit auf Grothendieck, konkret aber auf Lawvere und Tierney zurückgeht (vgl. 4.4); In diesem Rahmen ist **Set** nur ein Beispiel (das intuitivste) eines Topos. Speziell vertritt [Bell 1981b] die Vorstellung, durch einen Wechsel des jeweils zugrundegelegten Topos (der Lawveres **Cat** ersetzt) gelange man zu "lokalen" Grundlegungen für verschiedene Teilgebiete.

Gleichzeitig kann eine solche Grundlegung durchaus Aufgaben einer *foundation* im Sinne von Lawveres zweitem Ansatz übernehmen:

> In saying that the future of topos theory lies in the clarification of other areas of mathematics through the application of topos-theoretic ideas, I do not wish to imply that, like Grothendieck, I view topos theory as a machine for the demolition of unsolved problems in algebraic geometry or anywhere else. On the contrary, I think it

> is unlikely that elementary topos theory itself will solve major outstanding problems of mathematics; but I do believe that the spreading of the topos-theoretic outlook into many areas of mathematical activity will inevitably lead to the deeper understanding of the real features of a problem which is an essential prelude to its correct solution. [Johnstone 1977, xvii]

Die erkenntnisleitenden Aufgaben und das Erklärungsvermögen *(clarification)*, die der Topostheorie zugetraut werden, machen sie also zu einer Grundlegungsoption über eine reduktionistische Perspektive hinaus.

Der Akzent solcher Grundlegungsentwürfe liegt auf Wahlfreiheit anstelle von Entscheidungszwang. Wenn man ohnehin nie wird erfahren können, wie das Diskursuniversum "tatsächlich" aussieht, erwirbt man sich lieber die Mittel, es zumindest nach Belieben (oder "Bedarf") synthetisieren zu können. Man kann bestimmte Konstruktionen in einem Topos machen, *insbesondere in* **Set** — man ist in den meisten Fällen aber nicht gezwungen, sie in **Set** zu machen. Gerd Heinz Müller sieht den Vorteil von Mengenlehre (die Mengenlehre wäre hier die Aussage: "Die Objekte von **Set** existieren") darin, daß diese für die Existenz der Konstruktionen sorgt, was die Topostheorie offenbar nicht kann (weil sie nicht etwa besagt "Die und die Toposes existieren, und damit ihre Objekte"). Diejenigen, die sich an das Arbeiten mit Toposes gewöhnt haben (*common sense*), scheinen jedoch die Existenzaussagen der Mengenlehre eher als Nachteil zu empfinden, und zwar aus folgenden Gründen:

a) Von **Set** anzunehmen, es sei *das* tatsächlich existierende Diskursuniversum der Mathematik, reduziert die Wahlmöglichkeiten, die die Topostheorie bietet ⟨#120 S.302⟩.

b) Die Leute, die mit Toposes arbeiten, haben nicht das Bedürfnis danach, daß die Rahmentheorie (Mengenlehre oder nicht) in der Lage ist, für die Existenz der Konstruktionen anders als intern zu sorgen. Mit "intern" sind hier relative Existenzaussagen gemeint: "im Topos X (über dessen Ontologie keine Aussage gemacht wird) gibt es rein formal nachweislich dies und jenes".

Anders gesagt: Wenn man gar nicht auf Ontologie aus ist, ist eine Grundlage, die eine ontologische Position bezieht, eher störend. Die philosophische Diskussion wird dann eher darüber zu führen sein, ob man die Wahlmöglichkeit hat, "auf Ontologie aus zu sein" oder nicht, oder ob man diese Wahlmöglichkeit nicht hat.

Andererseits könnte es durchaus sein, daß in der Absicht derjenigen, die Topos-Grundlagen propagieren, ohnehin nur liegt, *mathematische* Grundlagen zu entwickeln (daß sie sich also nicht mit Ontologie befassen möchten, weil es ihnen nicht um Erkenntnistheorie geht). Ich glaube dies aber eigentlich nicht; Topostheoretiker vertreten nicht den Typus des klassischen *working mathematician*, der sich mit einer Entwicklung des Wissens zufriedengibt, die von seiner (philosophischen) Begründung getrennt ist (Anm.370). Dies legt etwa Bénabous Diktum *"[. . .] topos theory shows that there is no frontier between logical considerations about sets and category theory"* (7.4.4) nahe. Daher verweile ich noch etwas bei den Topos-Grundlagen und untersuche insbesondere, welche Auswirkung sie auf den Begriff der Menge haben.

8.1.3.1 Es wird thematisiert, ob KT-Konstrukte Mengen sind oder nicht

In der Situation der Theorie der elementaren Toposes zieht man die Konsequenz aus den Entwicklungen, die ich in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt habe, und *thematisiert* das Menge-Sein: es kommt in den Sinn, danach zu fragen, ob ein Konstrukt eine Menge ist oder nicht; die Konstrukte werden nicht mehr automatisch als Mengen wahrgenommen oder aufgefaßt. Automatisch ist hier vielmehr, daß man es mit Konstrukten in Bezug auf elementare Toposes zu tun hat. Will man in einer speziellen Situation ausdrücken, daß man es insbesondere mit Mengen zu tun hat, steht ein theorieimmanentes Mittel dazu zur Verfügung (die Angabe eines Funktors nach **Set**); dies ist eine explizite, nichtintuitive Form des Ausdrückens dieses Sachverhalts. Anders gesagt: die Theorie erstreckt sich auf das Bestehen des Sachverhalts <das spezielle Konstrukt der Theorie ist insbesondere eine Menge>; will man die Theorie korrekt verwenden, hat man nicht mehr das Recht, dieses Bestehen anders als theorieimmanent zu prüfen. Es werden also insgesamt innerhalb der Theorie (formale) Verwendungsregeln für die Redeweise <ein bestimmtes Ding ist eine Menge> angegeben, deren Eingehaltensein theorieimmanent (formal) zu prüfen ist (geprüft werden kann und muß).

Nun wird man sagen, auch die Topostheorie selbst müsse ja in irgendeiner Mengenlehre (oder Klassentheorie) aufgebaut werden (da ein Topos eine Kategorie ist, also aus einer Kollektion von Dingen besteht); man könne also nicht umhin, ihre Bestandteile in letzter Instanz als mengentheoretische Konstrukte zu erkennen. Doch bei dieser Einstellung wird der Begriff Menge (oder Klasse) wieder intuitiv verwendet: Man nimmt (zweifellos zu Recht) an, die Topostheorie laufe, wie andere mathematische Theorien auch, letztlich auf das Operieren mit Extensionen von Begriffen hinaus, und *weil man eigentlich schon zu wissen vermeint, was Extensionen sind* (nämlich das, was eine Mengenlehre bereitstellt), nimmt man an, auch der Aufbau der Topostheorie komme nicht um die Verwendung solch einer Theorie *des Begriffes Extension* herum. Die "Theorie des Begriffes Extension" ist dabei axiomatisch, weil die Entwicklung der analytischen Philosophie gezeigt zu haben scheint, daß man allgemein nur über Extensionen von Begriffen sprechen kann, nicht direkt über Begriffe — also auch nur über die Extension des Begriffes ◁Extension▷, und diese wird in einer axiomatischen Theorie einfach irgendwie "vorsichtig" postuliert. Der Begriff ◁Menge▷ ist (indirekt, vermittels des undefinierten $\in$) ein undefinierter Begriff, doch bei der Zusammenstellung der Axiome, die er erfüllen soll, läßt man sich teilweise vom intuitiven Verständnis, von der intendierten Verwendung desselben Begriffs leiten. Man evoziert also zwangsläufig die Verwendungsregeln, an die gedacht ist.

Die Auffassung der Topostheoretiker scheint dahin zu gehen, daß eine solche intuitive Verwendung beim Aufbau der Topostheorie nicht störend ist, da in der fertig aufgebauten Theorie jeder Rekurs auf diese Intuition vermieden wird und ersetzt durch einen Rekurs auf die theorieimmanenten Ausdrucksmittel für den Begriff "Menge".

Das ontologische Programm enthält sein eigenes Scheitern. Denn wenn man glaubt, die Aussage, alle mathematischen Gegenstände "seien" eigentlich Mengen, erlaube eine Erklärung von irgendetwas, so muß man wohl zumindest wissen, was denn Mengen ihrerseits sind. Doch, wie gerade ausgeführt, bleibt die Verwendung des Begriffs ◁Menge▷ letztlich einem Sprachspiel unterworfen, während man mit der Theorie nur zur (besser: zu einer) Charakterisierung seiner Extension vordringen kann. Man beruft sich also letztlich auf die Kompetenz, die dem Sprecher durch dieses Sprachspiel zu Gebote steht. Nun gibt es auch eine pragmatische Variante des mengentheoretischen Reduktionismus, indem man sich die Mengen als durch Operieren entstehend vorstellt (kumulative Hierarchie). Doch auch dieses Operieren kann von der Theorie nur teilweise erfaßt werden (7.3.3); der infinitäre Teil der Hierarchie ist nicht vollständig beschreibbar.

8.1.3.2 Das Verhältnis von kategorieller Mengenlehre und ZF

Deduktiv sind die Toposaxiome schwächer als ZF (da sie ja noch andere Modelle haben als **Set**; der Begriff ist auf erster Stufe endlich axiomatisierbar; [Barr und Wells 1985, 89]). Es hat also gewissermaßen gar keinen Sinn, anzunehmen, bevor man definieren könne, was ein Topos ist, sei es vonnöten, zuerst ZF als geltend anzunehmen; damit fielen ja die zusätzlichen Ausdrucksmöglichkeiten des Toposbegriffs weg.

In [Mac Lane 1974, 427] heißt es: *"[The axioms for a topos] can be understood as axioms for set theory formulated not in terms of membership, but in terms of functions and their composition"*. Wenn man das so sieht, wird klar, daß in diesem Sinn nun auch die Toposaxiome Existenzaussagen machen: Sie sprechen über das Diskursuniversum der Mathematik, und zwar behaupten sie, daß gewisse Pfeile existieren und gewisse Diagramme kommutieren.

Man kann es auch so sehen: Mit der *elementary theory of the category of sets* [1964] legte Lawvere ein *Resultat* vor, nämlich, daß die KT nur bestimmte Teile von ZF wiederzugeben in der Lage ist (in Form von **Set**): die kategoriell beschreibbaren Eigenschaften von ZF-Mengen sind nicht deren sämtliche Eigenschaften — sonst käme er ja nicht mit endlich vielen Axiomen 1.Stufe aus.

Es ist wichtig, die jeweiligen Wahlmöglichkeiten, die Mengenlehre einerseits und Topostheorie andererseits bieten, miteinander zu vergleichen. In der Mengenlehre hat man es mit der Existenz von Nonstandardmodellen bzw. nichtisomorphen Modellen von ZF zu tun. Es bleibt also eine Unsicherheit betreffend die "wahre Gestalt" des durch das Axiomensystem ZF charakterisierten Mengenuniversums; diese Charakterisierung ist eben nicht kategorisch. Die Topostheorie geht davon aus, daß das besagte von ZF charakterisierte Mengenuniversum auch als Kategorie (**Set**) aufgefaßt werden kann; diese Kategorie hat — allein wegen der Axiome von ZF, egal um welches der nichtisomorphen Modelle es geht — die Eigenschaften eines elementaren Topos. Die Kategorie **Set** ist also nur bis auf die verschiedenen Modelle von ZF bestimmt; allerdings scheint eine genauere Bestimmung dieser Kategorie für die Zwecke der Kategorientheorie auch gar nicht erforderlich zu sein. Es gibt andere Kategorien, die die Eigenschaften eines elementaren Topos haben; diese Kategorien lassen sich aber entweder überhaupt nicht sinnvoll auffassen als kategorientheoretisches Pendant eines durch mengentheoretische Axiome (unvollständig) charakterisierten Mengenuniversums, oder in ihnen gelten nicht oder nicht in vollem Umfang die Axiome von ZF (bzw. was aus diesen Axiomen an Aussagen hervorgeht, wenn man sie, wie angenommen, kategoriell auffaßt). Verschiedenen Toposes entsprächen also nicht verschiedene nichtisomorphe Modelle ein und derselben nichtkategorischen axiomatischen Mengentheorie, sondern (wenn überhaupt) verschiedene axiomatische Mengentheorien; unter diesen verschiedenen axiomatischen Mengentheorien scheint — nach den im Rahmen der Untersuchung von Toposes gültigen Kriterien — keiner ein allgemeiner Vorzug gegeben werden zu können (sondern ein Vorzug wird je nach Problemstellung gegeben).

Diese Situation ist gleichzeitig verwandt und doch verschieden vom Gödel-Cohenschen Ergebnis. Denn einerseits besagt dieses Ergebnis gewissermaßen, daß darüber, welche unter den denkbaren Erweiterungen von ZF um AC, CH oder deren Negationen nun das "wahre" Axiomensystem ist, nicht entschieden werden kann; andererseits ist dieses Ergebnis aber eine Aussage über die deduktive Hülle von ZF, während in der Topostheorie auch Toposes vorkommen, die schwächeren Systemen als ZF entsprechen. Die Verwandtschaft erwirkt wohl übrigens die Anwendbarkeit der Topostheorie im Gödel-Cohen-Kontext (vgl. Anm.300).

Es bedarf einer genaueren Inspektion der Aussage, die Theorie der elementaren Toposes habe mehr Modelle als ZF. Die "Theorie der elementaren Toposes" besteht zunächst einmal aus den Topos-Axiomen (die einen bestimmten Typ von Kategorie definieren) und hat demnach Modelle in einem ähnlichen Sinn, wie der durch die Axiome der Gruppentheorie definierte Begriff Gruppe Modelle (Instanzen) hat. Bei Modellen von ZF hingegen geht es ja nicht darum, Modelle (Instanzen) des Begriffs Menge zu finden, sondern ein Modell von ZF wäre ein Universum *aller* (ZF-)Mengen (eine Welt von Objekten derart, daß die ZF-Axiome erfüllt sind, wenn Quantoren über diese Welt laufen und für Variablen diese Objekte eingesetzt werden). Solch ein Modell anzugeben, stößt auf die Schwierigkeit, daß man dazu schon Mengenlehre braucht (weil Modelle immer aus Mengen in der intuitiven Verwendung des Terminus bestehen). Der Witz bei der Topostheorie ist nun, daß ein elementarer Topos (also eine Instanz) viele Eigenschaften hat, die parallel sind zu solchen Eigenschaften, die auch das Universum der ZF-Mengen hat; somit kann eine solche Instanz gewissermaßen selbst als ein solches Universum gesehen werden: die Objekte (im kategorientheoretischen Sinn) eines Topos können so gesehen werden, daß sie zusammen eine Welt bilden derart, daß die kategorientheoretischen Pendants (s.o.) der ZF-Axiome erfüllt sind. Die Topostheorie spiegelt also das Operieren *auf* dem Universum (7.3.3) wieder.

Ist es möglich, solche Toposes zu konstruieren, ohne dabei wieder auf Mengenlehre zurückzugreifen? Dies leistet [Bénabou 1985] womöglich; im Zbl-*Review* zu diesem Text heißt es

> When Lawvere posed the question of how to characterize the category of sets and functions in categorical terms, he opened the door to the possibility of founding mathematics in other than set-theoretical terms. Sets are to be objects in categories satisfying suitable properties. For such a program it is of course necessary to have a

> notion of category, and of categorical properties, that presupposes no set-theory.

Und dies scheint Bénabou auch zu erreichen, wie der MR-*Review* zum selben Text nahelegt (vgl. 7.4.4). Man kann natürlich an solche Systeme die Frage stellen, ob sie konsistent sind (aber das kann man auch an ZF). Sie läßt sich (da ja insbesondere die Arithmetik darin enthalten ist) allerdings nicht beantworten.

8.1.3.3 McLarty rückt die Folklore rund um kategorielle Grundlagen zurecht

[McLarty 1990, 366] weist die Sicht zurück, wonach kategorielle Grundlagen erfunden worden seien, um den durch die mengentheoretischen Grundlagen (der Kategorientheorie) aufgebürdeten *size restrictions* zu entkommen. *"Category theorists's real motives for categorical foundations were categorical naturalness and simplicity"* (also der *common sense* auf technischer Stufe), Diese Bewertung steht im Einklang mit Isbells Bewertung im *Review* zu Lawveres Arbeit (vgl. 8.1.1). Weiter wehrt sich McLarty gegen die Darstellung, der Begriff des Topos sei nur als Abstraktion von **Set** entwickelt worden; wir haben gesehen, daß dies nicht stimmt (4.1.2.3 und 4.4), aber der Eindruck kann z.B. bei der Lektüre von [Goldblatt 1977] schon entstehen.

> The belief that categorical foundations arose by axiomatizing, generalizing or abstracting from the category of sets puts too much stress on toposes, seen as the most set-like of categories. The category of categories is not a topos so, despite its foundational importance and its role in the history of categorical foundations, it is omitted from Goldblatt's book. Nor are toposes the only categorically axiomatized categories useful in mainstream mathematics. By far the most useful today are abelian categories. These are largely a generalization from categories of modules and have nothing particular to do with sets, so they have been omitted from the entire philosophical discussion of categorical foundations to date. [McLarty 1990, 366f]

8.1.4 Generelle Einwände, insbesondere das Argument der *psychological priority*

Mittlerweile scheint die ursprüngliche Idee, die KT als die grundlegende Theorie aufzustellen und sodann alle mathematischen Theorien in sie einzubetten, relativiert worden zu sein. [Corry 1996] beschreibt es als offenes Problem: *"the possibility to develop the whole of mathematics based on the concept of the category of all categories, or on any other similar categorical idea, remains a question still open to debate and in need of further elucidation"* (S.374); *"category theory cannot yet claim to have provided a single, axiomatically defined system which may provide a unified conceptual foundation for the whole of mathematics"* (S.388). [Bénabou 1985] sucht zunächst nach *foundations for category theory*; er sieht allerdings *topos theory* als *foundations of most mathematics* (S.28; Hervorhebungen von mir). Insgesamt scheint bei den Kategorie- und Topostheoretikern das Interesse an Versuchen, die Idee zu realisieren, etwas nachgelassen zu haben.

Es gibt eine schwache und eine starke Variante der Absetzung der Mengenlehre durch die KT: Die schwache besteht einfach darin, den Universalitätsanspruch der Mengenlehre *ad hoc* abzulehnen, indem es mindestens eine mathematische Theorie gibt (die KT), die nicht sinnvoll in der Mengenlehre formulierbar ist. Die starke besteht darin, die Mengenlehre überhaupt zu ersetzen, auch an den Stellen, wo in dieser sinnvoll formuliert werden kann. Epistemologisch ist natürlich die "schwache" Variante *stärker* als die "starke", weil sie in einer völligen Abkehr von der Idee einer Grundlage im klassischen Sinn mündet.

Sehen wir uns einige grundsätzliche Einwände gegen die Unternehmung kategorientheoretischer Grundlegung an.

> [. . .] all of mathematics can be logically based on *extensionalization* and *reflection* (or "objectivization"). This seems to me an essential step for epistemology. *But*, #129
> one has also to avoid any overestimation: nothing is said concerning applicability of mathematics outside mathematics, no hint is given, how to choose special contents of mathematics, e.g., in algebraic and analytic number theory, in complex function #130
> theory, in exhibiting interesting differential equations, etc, etc. For an approach to philosophy of mathematics from this point of view, especially with respect to the deep question of the interconnections between various parts of mathematics (e.g., between algebra and topology), category theory is certainly relevant; see [[Mac Lane 1986]]. However, what is actually incomprehensible for me, is any reason for a polarization between set theory and category theory; they merely have different tasks. All of these theories, including category theory, are contained in set theory (using logic) *in so far* as expressibility and deduction are concerned. [Müller 1997, 140]

Müller erkennt also an, daß mengentheoretische Grundlegungen die Frage der Kriterien nicht beantworten; er hebt hervor, daß sie auch gar nicht dafür gedacht sind. Die Diskussion wäre darüber zu führen, ob eine Grundlage (Müller würde hier wohl von "logischer Basis" sprechen — *can be logically based*) sich mit der Untersuchung von *expressibility* and *deduction* zu bescheiden hat. Anders gesagt: Ist damit die philosophische Aufgabe einer Grundlage schon erledigt? Bezeichnend ist, daß Müller *reflection* mit *objectivization* paraphrasiert: erst durch das Reflektionsprinzip werden bestimmte Konstrukte zu Objekten (wohlbestimmten Entitäten) im Sinne Quines.

Im Zusammenhang mit seiner Untersuchung der Behauptung, die KT könne als Grundlage der Mathematik aufgefaßt werden, verweist [Feferman 1977, 150 Anm.3] auf [Kreisel 1969]; dort findet sich keine dezidierte Kritik an Lawveres ursprünglichem Programm[497], aber Kreisels Untersuchung des Unterschiedes zwischen *set-theoretical* und *formalist foundations* (S.241ff) könnte hier relevant sein. Angesichts Kreisels Haltung zum Formalismus[498] liegt nahe, daß er diese Unterscheidung vornimmt, um die mengentheoretischen Grundlagen von den formalistischen, die er

[497]Auch in [Kreisel 1972] findet man keine explizite Kritik an Lawveres Arbeit.

[498]Kreisels Position wird bei [1974, 71] klar: Er sieht in rein formalem Vorgehen gerade nicht eine Methode der metamathematischen Analyse, sondern interessiert sich für das Bestreben der arbeitenden Mathematiker, nur Formalisierbares zu akzeptieren; er glaubt, daß dieses Bestreben gerade darauf zielt, sich von der logischen Analyse der Mathematik *abzugrenzen*, bei der gewissermaßen noch andere (inhaltliche) Aspekte berücksichtigt werden

für inadäquat hält, abzuheben; nimmt man ferner an, daß die Möglichkeit einer mengentheoretischen Grundlage sich für Kreisel — wenn schon nicht aus formalistischen Ideen — aus der inhaltlichen Seite der Mengenlehre ableitet, so kann man dies extrapolieren und davon ausgehen, daß Kreisel Lawveres Ansatz als formalistischen Ansatz kritisiert hätte. Denn bei Lawvere stehen, so könnte man unterstellen, Axiome für ein formales System am Anfang, die nicht den Vorzug haben, inhaltlich gerechtfertigt zu sein (diesen Vorzug haben offenbar aus Kreisels Sicht die Axiome der Mengenlehre). Diese Kritik ginge allerdings an Lawveres Idee vorbei. Denn er bezieht, wie man leicht nachweisen kann, keine formalistische Position, sondern eine strukturalistische[499] — wobei er die Meinung vertritt, zur Beschreibung des inhaltlich gegebenen Begriffs "Struktur" seien nicht Mengen, sondern Kategorien das richtige Mittel.

Der entscheidende Kritikpunkt betrifft allerdings die philosophische Frage, ob Kategorien intuitiv so zugänglich sind wie Mengen. [Kreisel 1969] legt Wert auf den qualitativen Unterschied zwischen "Zahl" und "Kategorie": es soll klar werden, daß eine *technical notion* nicht zugänglich genug ist, um am Anfang zu stehen. (Hier wird also nicht die Möglichkeit zugestanden, Mathematik könne durch einen *common sense* auf technischer Stufe gerechtfertigt werden.) Ähnlich hält [Bell 1981a] fest, die Definition von $\in$ in pfeiltheoretischer Sprache könne kaum unsere intuitive Vorstellung von Elementsein wiedergeben — was freilich Bell nicht daran hindert, in gewissem Umfang kategorielle Grundlagen (zumindest jedenfalls als *mathematische* Grundlagen) zu propagieren (8.1.3). Die ausführlichste Darlegung des Arguments, KT könne keine (philosophische) Grundlage sein, weil Kategorien intuitiv nicht so zugänglich sind die Mengen, findet sich indes bei Feferman[500]: ◁Operation▷ und ◁Kollektion▷ haben seines Erachtens "psychologische Priorität" *(psychological priority)* vor ◁Kategorie▷, da dieser Begriff auf einer speziellen Art von Operationen auf Kollektionen beruht [1977]. Feferman greift im Grunde Wittgensteins Argument gegen Russells Zurückführung der Arithmetik auf einen Strichkalkül (1.4.3) auf, wenn er erklärt, was er mit *psychological priority* meint:

> [...] one cannot understand abstract mathematics unless one has understood the use of the logical particles 'and', 'implies', 'for all', etc. and understood the conception of the positive integers. Moreover, in these cases formal systems do not serve to explain what is not already understood since these concepts are implicitly involved in understanding the workings of the systems themselves. [Feferman 1977, 153]

Dies führt auch ihn dazu, die Möglichkeit abzulehnen, Mathematik könne durch einen *common sense* auf technischer Stufe (der Kategorien intuitiv verwendet) gerechtfertigt werden.

> I believe our experience demonstrates [the] psychological priority [of the general concepts of operation and collection with respect to structural notions such as 'group',

[499] Weiterführende Literatur zu dieser Unterscheidung bespreche ich bei 6.2.1.

[500] Fefermans Kritik ist in einem Sammelband erschienen, der sonst ausschließlich Logik- und Berechenbarkeitsfragen enthält. Sowohl wird also Fefermans Arbeit von kaum einem Kategorientheoretiker gelesen worden sein, als auch wird kaum ein Tagungsteilnehmer großes Interesse an Fefermans Beitrag gehabt haben.

> 'category' etc.]. I realize that workers in category theory are so at home in their subject that they find it more natural to think in categorical rather than set-theoretical terms, but I would liken this to not needing to hear, once one has learned to compose music.

Die Quintessenz kategorientheoretischer Grundlagen scheint aber nicht so sehr zu sein, ⊲Kategorie⊳ an die Stelle von ⊲Kollektion⊳ und ⊲Operation⊳ zu setzen, sondern den Primat des Operierens an die Stelle des Primats der Objekte, auf denen operiert wird. KT wird angesehen als eine mathematische Theorie, ein Arsenal des Operierens.

8.2 Pragmatismus und das "Fundamentale" der KT

Die [. . .] Kategorientheorie lehrt das Machen, nicht die Sachen.
[Dath 2003]

8.2.1 Die Abkehr von der Beschäftigung mit Ontologie

Der Befund zeigt, daß die Kategorientheoretiker nach und nach begannen, die Frage zu akzentuieren, welche Rolle die unterliegende Menge (die "mitgehende Ontologie") einer Konstruktion eigentlich spielt. *Historisch* waren zwei verschiedene Gründe hierfür wichtig:

- im Arbeiten mit Strukturen stellte sich heraus, daß die Operation des Versehens einer Menge mit Struktur nicht die einzig denkbare (und manchmal keine sinnvolle) Option ist (man denke an die Untersuchung eines KT-spezifischen Elementbegriffs oder die schließlich atomaren Koeffizienten in der homologischen Algebra);

- in der KT traten erstmals Operationen auf, die zu großen und sehr großen Mengen führen ⟨#111 S.289⟩.

Gleichzeitig wurde, wie in diesem und dem vorangegangenen Kapitel aufgezeigt, ein *erkenntnistheoretischer* Grund für diese Abkehr artikuliert, und zwar, daß man durch Angaben zur Ontologie nichts "erklären" könne. Die Probleme bei der Suche nach mengentheoretischen Grundlagen der KT führten nicht etwa darauf, in Frage zu stellen, daß das Konzept Menge klarer ist als das Konzept Kategorie (was letztlich nur heißt, daß für die Verwendung des Konzepts "Menge" weniger Vorkenntnisse erforderlich sind, so daß es insbesondere von einer *community*, die nicht technisch trainiert ist, verwendet werden kann); diese Probleme führten vielmehr auf die Beobachtung, daß mengentheoretische Substitute *von KT-Konstruktionen* nicht klarer, sondern unklarer sind als die originalen Konstruktionen (Peirce würde wohl wieder sagen *"the consciousness in the determined cognition is more lively than in the cognition which determines it")*. Entsprechend ging der Ansatz, die KT selbst zur

Grundlage zu machen, hervor aus der Einsicht, daß die Zurückführung einer mathematischen Konstruktion auf kategorientheoretische Konstruktionen zuweilen mehr erklärt als die auf mengentheoretische Konstruktionen.

Werden die Schwierigkeiten bei der Anwendung des Reduktionismus auf die KT von den Vertretern herkömmlicher Grundlagen als Mangel der KT interpretiert (entsprechend der erkenntnisbegrenzenden Funktion von Grundlagen), so scheinen demnach die mit KT arbeitenden Mathematiker darin eher einen Mangel der herkömmlichen Grundlagen zu erblicken — diese Grundlagen kommen bestimmten erkenntnistheoretischen Aufgaben nicht nach. Es wurde deutlich, daß für die Kategorientheoretiker die Erkenntnis in Wahrheit gar nicht durch die Grundlagen im herkömmlichen Sinn begründet wird (sondern gewissermaßen schon da ist, wenn diese Grundlagen noch eine "Legitimierung" nachliefern sollen, wie ein uneheliches Kind, dessen Eltern heiraten). Es stellt sich also so dar, daß die von Seiten der Mengentheorie vorgebrachte Kritik an den Explikationsakten, die zur KT geführt haben, nicht so sehr ein Versagen dieser Explikationsakte aufzeigt als vielmehr *selbst* an den Intentionen vorbeigeht. Ist die philosophische Aufgabe die Überprüfung der Übereinstimmung zwischen Theorie und intendiertem Modell, so kann eine Erkenntnistheorie mit Modellcharakter dieser Aufgabe hier nicht nachkommen, weil in ihr gerade keine Mittel zur Verfügung stehen, das intendierte Modell überhaupt zu artikulieren: in der Mengenlehre kann man das intendierte Modell der KT nicht erfassen.

Im Zuge der Etablierung einer mengentheoretisch orientierten Grundlegung der Mathematik geriet aus dem Blick, daß sich mathematisches Operieren nicht für alle Zeiten in den erfaßten Typen von Handlungen erschöpfen muß; dadurch wurden die Mengen zu ontologisch ersten Bausteinen — auf die es nach Peirce nicht ankommt, wie wir gesehen haben (vgl. 1.3.1). Lawvere drückt die Obsoletheit ontologischer Erwägungen so aus:

> Thus we seem to have partially demonstrated that even in foundations, not Substance but invariant Form is the carrier of the relevant mathematical information. [Lawvere 1964, 1506]

Mit der Suche nach den Substituten mengentheoretischer Operationen befreite sich die KT von der ontologischen Facette der klassischen mengentheoretischen Grundlegung. Dies hatte Auswirkungen auf die spezifische Form, die der Operation der Vergegenständlichung (Thematisation) in der KT gegeben wird. Normalerweise würde man wohl erwarten, daß ein Ding beim Wechsel von der Werkzeug- in die Gegenstandsperspektive "entfaltet" wird, daß man also beginnt, sich die Binnenstruktur des Dings genauer anzusehen, während man es zuvor als *black box* betrachtet hat, die das tut, was man von ihr erwartet. In einem scheinbaren Gegensatz hierzu wird bei der internen Hierarchie der KT das *komplexe* Objekt der tieferen Ebene vergegenständlicht (d.i. hier: zu einem Objekt im Sinne der KT gemacht), indem es auf höherer Ebene zum Punkt zusammenschrumpft, nur noch extern (eben kategoriell) charakterisiert ist. Der Gegensatz ist ein scheinbarer, denn etwas kann gleichzeitig als Gegenstand und als unpenetrierbar behandelt werden (die Strategien bei der Untersuchung des Gegenstands haben dann eben ohne Penetration auszukommen). Der

Anschein des Gegensatzes deutet auf eine Verhaftung in klassischen Denkmustern: Thematisierung hat sich auf die Ontologie zu beziehen.

8.2.2 Was ist wichtiger — Adäquatheit oder Konsistenz?

Wir sind zahllosen Äußerungen der Form “dies und jenes sieht man richtig, wenn man es kategoriell sieht” begegnet; die Kategorientheorie hat sich als Antwort auf das Kriterienproblem, als “Häufungspunkt” der konzeptuellen Entwicklung entpuppt[501]. Welche Auswirkung hat solche Adäquatheit auf eine Eignung der KT als Grundlagendisziplin?

[Bénabou 1985, 10] diskutiert *adequacy* als eine wünschenswerte Eigenschaft von Grundlegungen *für die KT* (7.4.4); die Diskussion läßt sich jedoch zweifellos auf Grundlegungen für andere mathematische Teildisziplinen oder für die Mathematik als ganze übertragen. Bénabou geht so weit, daß er die andere offensichtliche Forderung an eine Grundlegung, Konsistenz, von der Adäquatheit her entwickelt:

> Although it seems to have been the main preoccupation of the logicians who tried to give foundations for category theory, I am only mildly interested in mere consistency, for the following reasons:
>
> (i) Categoricians have, in their everyday work, a clear view of what could lead to contradiction, and know how to build ad hoc safeguards. #131
>
> (ii) If a formal system fails to satisfy too many of the adequacy requirements, it will be totally useless; and worse, the inadequacy will probably reflect too superficial an analysis of the real activity of categoricians.
>
> (iii) If adequacy is achieved, in a satisfactory manner, consistency should be a by-product.

Diese Zurückdrängung der Konsistenz als Kriterium für eine Grundlegung könnte sich auch als Konsequenz aus den beweistheoretischen Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Entscheidbarkeit der Konsistenz und selbst der relativen Konsistenz beispielsweise der Grothendieck-Universen ergeben (doch scheint sich Bénabou dieser Schwierigkeiten nicht bewußt gewesen zu sein, wie die Stelle ⟨#117 S.301⟩ nahelegt). Als Alternative wird die Adäquatheit angeboten, die sogar in der Lage sein soll, diese Schwierigkeiten zu umgehen: erfüllt ein Begriffs- und Aussagensystem die Adäquatheitskriterien, so ist die Überzeugung, das “richtige” System zu haben, so stark, daß es (gefälligst) auch konsistent sein sollte. Die Adäquatheitskriterien beruhen hierbei auf einer Analyse, wann solch eine Überzeugung (ein *common sense* auf technischer Stufe) üblicherweise eintritt. Sieht man in dieser Überzeugung einen

[501] Eine ähnliche Konvergenz haben auf anderer Ebene auch die Aspekte Problemlösung, Begriffsklärung und Verselbständigung (1.1.1) im Zusammenhang der KT durchlebt: Zunächst waren Begriffsklärung und Problemlösung zwei konkurrierende Tätigkeiten (wobei die KT vornehmlich im Rahmen der erstgenannten Tätigkeit eingesetzt wurde); Begriffsklärungsunternehmungen galten quasi als “Auszeit”, Moratorium — allerdings mit der Tendenz zur Verselbständigung. Bei Grothendieck fielen, überspitzt gesagt, Begriffsklärung und Problemlösung zusammen (das Problem ist gelöst, wenn die Begriffe geklärt sind, wenn der “richtige” Begriff gefunden ist).

Rechtfertigungsgrund für die betreffenden Gegenstände, so ist demnach die Erkenntnis trotz fehlenden Konsistenzbeweises nicht "auf Pump", wie es der hypothetisch-deduktive Standpunkt suggeriert.

Wer nun besorgt darauf hinweist, daß man sich als verantwortlicher Wissenschaftler doch nicht auf solcherlei nicht überprüfbare Überzeugungen stützen könne, dem kann man mit Wittgenstein entgegenhalten, daß andererseits derjenige, der an eine Rechtfertigung der Gegenstände durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis glaubt, sich womöglich seinerseits über die Art der Überzeugung, die man aus Beweisen beziehen kann, falsche Vorstellungen macht. Genauer sagt Wittgenstein sogar, daß beide Ansätze im Prinzip auf dieselbe Art von Überzeugungen zurückführen, denn *"le principe qui [. . .] guide [la démonstration], n'entraîne pas notre croyance à une certaine proposition tenue jusqu'alors pour douteuse, mais, comme Wittgenstein dit, 'nous montre ce que nous croyons' "* [Heinzmann 2003, 4]. D.h.: Was wir aus den Axiomen erhalten, haben wir bereits in sie hineingelegt; die relevante philosophische Frage hingegen ist: erfassen die Axiome tatsächlich das intendierte Modell? Wieso diese Voraussetzungen (Axiome) und keine anderen? (Zweifellos: Wittgensteins Anmerkung gilt zunächst für die deduktive Perspektive; man könnte der Auffassung sein, daß wir bei einem Widerspruchsfreiheitsbeweis mehr zur Verfügung haben als die Deduktionsbasis[502].) Kann man sich mit Bénabous Adäquatheitskriterien als Antwort auf jene philosophische Frage zufriedengeben?

Der pragmatische Ansatz scheint sich auf die Operation der Exemplifikation zu konzentrieren, also auf Situationen der Art "X ist ein Fall von Y"; ein solches "Überprüfen" bzw. "Nachrechnen" ist nicht das gleiche wie Deduktion (man denke an Peirce's Unterscheidung von theorematischen und korollarischen Aussagen — wobei bei theorematisch mehr eingeht als nur die Voraussetzungen). Bei Grothendieck gilt ein Begriffsrahmen so ungefähr dann als der "richtige", wenn man die behaupteten Aussagen nur noch nachrechnen muß, wenn man die Begriffe nur noch entfalten muß, um sie zu erhalten, kurz, wenn die Begriffe von den Aussagen exemplifiziert werden. Hier kann die Frage nach der Übereinstimmung mit dem intendierten Modell eigentlich nur noch positiv beantwortet werden — unabhängig davon, welches dieses Modell ist!

Dies darf allerdings nicht dahingehend mißverstanden werden, daß die Wissenschaft überflüssig würde (intendierte Modelle können ja problematisch sein). Grothendiecks Vorhaben haben sich nicht alle reibungslos verwirklichen lassen, und mancher Begriff, von dem erwartet wurde, das Problem zu knacken, wurde, einmal selbst Gegenstand der Untersuchung, seinerseits Quell schwieriger Probleme.

8.2.3 KT als Implementation von typischen Herstellungshandlungen

Man kann eine schwache und eine starke These unterscheiden, welches Verhältnis zwischen dem Befund zur KT und dem Pragmatismus besteht: Die schwache These

[502] Hilbert glaubte etwa: Inhaltliches.

wäre diejenige, daß die pragmatische Erkenntnistheorie zur Interpretation der Ereignisse der KT-Geschichte taugt (daß also zu diesen Ereignissen die Konstruktion neuer Objekte in Bezug auf einen technischen *common sense* gehört); die starke wäre, daß die KT eine mathematische Implementierung eines letztlich pragmatisch geprägten Arbeitsmodells ist.

Nun hat sich die “schwache” These jedenfalls als zutreffend erwiesen: In der Geschichte der KT ist intuitive Verwendung situationsabhängig. Der Befund sieht hier so aus, daß Intuitivität fortwährend transformiert wird: manches wird zunächst intuitiv verwendet, dann nicht mehr; aber auch der umgekehrte Vorgang findet statt: nach geeigneter begrifflicher Transformation wird manches *schließlich* intuitiv verwendet. Wir sind zahlreichen Verschiebungen und Verkehrungen in der intuitiven Verwendung, zahlreichen Vertauschungen der Rolle von Werkzeug und Gegenstand begegnet: bei Eilenberg-Steenrod (2.5.2), bei den Neuinterpretationen der Koeffizienten von (Co)Homologie (5.1.4), bei Grothendiecks Auffassung des Schemas als des eigentlichen Grundobjekts (4.1.1.2), bei den derivierten Kategorien (Anm.288).

Es lassen sich aber auch für die starke These Belege finden. Das Ergebnis der historischen Untersuchungen läßt sich zunächst so formulieren, daß die Kategorientheorie entstanden ist als Systematisierung einiger zentraler Operationen und Konstruktionen der Strukturmathematik. Typische Handlungen, deren Ergebnis die KT beschreibt (und für deren Durchführbarkeit sie Kriterien angibt), sind z.B. Strukturtransporte, die Übertragung von Problemen in andere Bereiche etc. Diese Handlungen mußten in den frühen Anwendungen der KT zunächst “für sich selbst sorgen”: die KT garantiert nicht ihre Ausführbarkeit in beliebigen die äußeren Voraussetzungen erfüllenden (“geeigneten”) Problemsituationen. Sie beschreibt lediglich die Handlungen als im Umgang mit verschiedenen Dingen wiederkehrende Formen solchen Umgangs; hierbei lassen sich in jeder geeigneten Problemsituation bestimmte Gegenstände als Ingredienz dieser immer gleichen Form auffassen. Insofern die KT hier rein deskriptiv ist, ist sie “Sprache”. Der Gewinn dieses Beschreibenkönnens beschränkt sich nicht auf die Beschreibungsebene; später entwickelt sich eine Metatheorie, die auf der Handlungsebene Konzepte zur Behandlung des nunmehr Beschriebenen, Zugänglichen entwickelt.

Das Verhältnis der KT zu den in ihr beschreibbaren Handlungen ändert sich bei [Grothendieck 1957]; sie beginnt hier selbst zumindest teilweise für die Ausführbarkeit der Handlungen zu sorgen (“Werkzeug”; 3.4.3.2). Die Rede von “teilweise” darf hier nicht den prinzipiell qualitativen Charakter dieses Unterschiedes verschleiern; in späteren Anwendungen wird der Zugriff der KT zusehends umfassender. Was heißt “selbst sorgen für”? Hier wechselt man vom Beschreiben zum Implementieren (das über das reine Beschreiben hinausgeht), von der Nominaldefinition zur Realdefinition, von der Sprache zur Theorie. Für den Limesbegriff findet dies bei Kan statt, der Existenzkriterien für Limites angibt (dies gelingt ihm dank der sehr allgemeinen Form, die er dem Limeskonzept gegeben hat). Ich behaupte hier, die Kategorientheorie nehme gewisse Formen mathematischen Operierens (“Handelns”) zum Ausgangspunkt einer Theoretisierung.

Eilenberg-Mac Lane stellten die KT als Beschreibungsmittel für jene Handlungen her mit Mitteln der Mengenlehre (genauer: mit Hilfe von Handlungen, die von der Mengenlehre beschrieben werden). Man kann sich fragen, ob sie dies aus “inneren Sachzwängen” taten oder weil sie in einer Zeit lebten, in der das “Stil” war — doch die Frage scheint aus methodologischer Sicht nicht gut gestellt (wie soll man den Unterschied entscheiden?). Jedenfalls legen die späteren Entwicklungen nahe, daß die Behauptung, Operationen von der Form der in der Mengenlehre isolierten Mengenoperationen lägen unveränderlich allem mathematischen (wenn nicht überhaupt begrifflichem) Denken zugrunde, kritikwürdig ist. Es scheint eher zuzutreffen, daß man sich zur Beschreibung der Denkoperationen verschiedener Mittel (Standpunkte) bedienen kann; mal kämen dann Objekte im Stil von Mengen heraus, mal Handlungen im Stil von Pfeilen.

Ohne Zweifel: Zumindest solange man es mit der Standardsituation der strukturierten Mengen zu tun hat, kann man die von der KT beschriebenen Handlungen “sinnvoll” in Mengenoperationen zerlegen. Es ist aber nicht klar, welche Motivation man dazu hat. Die von der KT angebotene Beschreibung der betreffenden Handlungen sorgt für eine Klärung dieser Handlungen; die Zerlegung in Mengenoperationen hingegen erklärt nichts. Die Zusammenfassung zu Mengen erscheint als der Versuch, Objektkonstruktionen vom handelnden Subjekt abzutrennen. Aus pragmatischer Sicht ist diese Tendenz in der Erkenntnistheorie (die Ausmerzung des Subjekts) ein Holzweg. Das “Kriterienproblem” kommt zumindest teilweise daher: Erst nach der artifiziellen Abtrennung der Objektkonstruktionen vom handelnden Subjekt erwecken die Entscheidungen (die sich jetzt als Entscheidungen über ein unabhängig gegebenes Objekt präsentieren) den Eindruck der Willkürlichkeit.

Schließlich kommt die Standardsituation der strukturierten Mengen in Fortfall. Nonstandardkategorien sind nicht mehr *gerechtfertigt durch* die originale Intention, sondern *usurpieren* diese in dem Sinn, daß man von der Unbestimmtheit des Terminus Struktur Gebrauch macht und ihn überall da anwendet, wo man das technische Konzept anwenden kann: “dies und jenes *verhält sich wie* ein Strukturtyp auf einer Menge (weil es eine Instanz von ◁Kategorie▷ ist); daher kann man es auch den entsprechenden Operationen unterziehen”.

Die KT hat letztlich sogar eine *Implementation der Verschiebung intuitiver Verwendung*, eine *interne* Hierarchie hervorgebracht: **Cat**, 2-**Cat** etc. (5.3). Die Operation, das komplexe Konstrukt der einen Ebene zur Instanz von ◁Objekt▷ auf der nächsten Ebene zu machen, verwirklicht das “Absehen vom Zustandekommen der Herstellungsregeln”! Man kann also behaupten: *es gehört zum intendierten Modell der KT*, die Situationsabhängigkeit intuitiver Verwendung (in einem bestimmten Bereich der Mathematik) zu theoretisieren. Viel besser könnte sich der Pragmatismus wohl nicht als zum Kontext der KT gehörend empfehlen.

8.2.4 Ein neues Paradigma

[McLarty 1990] stellt dar, wie eine *community*, ausgehend von einem für sie intuitiven (klaren) Begriffsrahmen (Mengenlehre), eine Geschichte umschreibt, indem sie die Ursprünge eines anderen Begriffsrahmens (Topos-Theorie) von dessen nachträglichen Bezügen zu ihrem bevorzugten Begriffsrahmen entwickelt. Er illustriert das Verfahren, indem er den Spieß herumdreht und eine *community* skizziert, für die der kategorientheoretische Begriffsrahmen intuitiv (klar) ist und die die Geschichte der (Cantorschen) Mengenlehre durch diese Brille liest (S.369f; vgl. hier Anm.328). In der Perspektive, daß es zwei solche *communities* nebeneinander geben kann, kommt die Erlernbarkeit von Klarheitsüberzeugungen zum Ausdruck (ein Ebenentausch von einer *community* zur nächsten) bzw. die Möglichkeit der Koexistenz verschiedener *common senses*.

Die Behauptung, Kategorientheoretiker seien von einem Paradigma geleitet, bedarf wohl keines weiteren Belegs; worin das Paradigma im einzelnen besteht, kann man aufsuchen, indem man Akzentuierungen der “Richtigkeit” eines Begriffs untersucht — denn durch solch eine Akzentuierung wird ja die Übereinstimmung mit irgendwelchen Kriterien (eben dem Paradigma) hervorgehoben. Wir hatten gesehen, daß diese Kriterien in der Regel technischer Natur waren. Denn “intuitiv” werden die Handlungsprinzipien der Theorie dort, wo das Begriffssystem eine Eigendynamik entwickelt, ohne auf Impulse von außen angewiesen zu sein. In *diesem* Sinn ist “intuitiv” (als Status einer Theorie) weitestmöglich *entfernt* von “naiv” (unexpliziert). Solche Intuitivität kann sich gerade *nicht* nur aus von anderswo importierter Intuitivität speisen!

Wenn André Weil das Konzept Funktor als metamathematisch bezeichnet (6.4.2), gibt er zu erkennen, daß er das neue Paradigma nicht akzeptiert hat. Metamathematik ist ja die Untersuchung der vergegenständlichten, zum Untersuchungsgegenstand gemachten Mathematik (bzw. mathematischen Methode) mit mathematischen Methoden (hier bliebe die Definition, was eine mathematische Methode ist, noch zu geben). Wenn man nicht anerkennt, daß die Untersuchung solcher Gegenstände selbst Mathematik ist (also sich nicht lediglich mathematischer Methoden bedient, sondern sich auch mit mathematischen Gegenständen befaßt), so ist man nicht bereit, Theorien der tieferen Stufe als neue, aus sich heraus legitimierte Gegenstände neuer Theorien zu akzeptieren.

Diese Ablehnung mag eine ontologische Komponente haben, insofern für Bourbaki alle mathematischen Gegenstände eine bestimmte Ontologie haben (in die man Funktoren nur mühsam zwängen kann). Hierbei ist die Bourbaki-Ontologie zu kritisieren: Einerseits wird behauptet, Strukturen seien die eigentlichen Gegenstände, andererseits bedarf dieser Satz einer Definition von “Struktur”, für die Bourbaki dann doch wieder auf Mengen zurückgreift. Aus pragmatischer Sicht ist eine solche ontologische Debatte leer, da die Ontologie in der Erkenntnistheorie aufgeht, und wenn man zu Strukturen doch nur wieder *über Mengen Zugang hat* (wie Bourbaki zu glauben scheint), ist die Akzentuierung eines Unterschiedes der Ontologie von Strukturen und Mengen (in Ermangelung von Erkenntnismitteln, die diesen Unterschied greifbar machen) zwecklos.

So ist denn auch die Antwort des Pragmatismus auf die Problematik der Definition von mathematischer Methode und mathematischem Gegenstand, daß es eben einen *common sense* darüber gibt, welche Zugangsweisen bzw. Erkenntnismittel als mathematisch bezeichnet werden, während alle Gegenstände als mathematisch angesprochen werden können, zu denen man vermöge dieser Erkenntnismittel einen Zugang hat; die Unterscheidung von mathematisch und metamathematisch verschwindet (was ihre behaupteten ontologischen bzw. erkenntnistheoretischen Auswirkungen betrifft).

Anstelle der Bourbaki-Definition von Struktur kommt in der vorliegenden Arbeit die Saussure-Definition von Struktur zur Anwendung (vgl. Anm.374): Eine Struktur ist ein Zeichensystem, wobei die *"genaueste Eigenschaft [eines Zeichens darin] liegt [. . .], etwas zu sein, was die anderen [Zeichen darin] nicht sind"*. Ersetzt man in dieser Erklärung "Zeichen" durch "Objekt", kommt man zu einer Aussage über Objekte, die im Einklang steht mit der Vorstellung der KT von den Objekten — wenn sich auch letztere nicht in ersterer erschöpft (vgl. 5.3.1.3). Die Stoßrichtung der pragmatischen Interpretation ist aber nicht so sehr, zu einer anderen (aus mathematischer Sicht zweifellos "unschärferen") Definition von "Struktur" überzugehen; vielmehr scheint die Rede von den Strukturen eigentlich nur eine undeutliche Ausdrucksweise zu sein für die wahren Verhältnisse, die nämlich, gemäß der Einsicht des Pragmatismus, so aussehen, daß Theorien bzw. Sätze über Gegenstände niedriger Stufen ihrerseits zu den Gegenständen auf einer höheren Stufe werden.

Das Ergebnis des Abschnitts 7.1.4 war: Kategorientheoretiker beziehen sich bei ihrem Einsatz der "problematischen" (d.h. einer naiven mengentheoretischen Realisierung entbehrenden) Konstruktionen auf das "rein formale Verhalten". Dieses Phänomen läßt sich zur Aussage über das intendierte Modell der KT extrapolieren: die eigentlichen Objekte des Diskurses sind nicht die (wie auch immer mit irgendwelchen Tricks zu erhaltenden) Realisierungen, sondern *Aussagen mit freien Variablen, Theorien*. Es wird also nicht ein Diskursuniversum festgelegt (wie es in der herkömmlichen mathematischen Logik dadurch zum Ausdruck kommt, daß freie Variablen zu quantifizieren sind, um Aussagen zu erhalten), sondern es geht hier um Aussagen*schemata*. Dies reflektiert nochmals eine pragmatische Einsicht: wir können eigentlich nicht sagen, was das Diskursuniversum "ist" — da wir seine Komponenten immer erst je und je *herstellen*. Wir können aber versuchen, Aussagen über Invarianzen der Herstellungsweisen zu machen.

Die Wissenschaft ist also doch nicht dazu verdammt, sich mit einer Untersuchung von Extensionen zu begnügen — zumindest kann sie sich aus diesen Fesseln befreien, wenn sie zugleich ihren Gegenständen Freiheit gibt.

Anhang und Verzeichnisse

Anhang A

Unveröffentlichte Texte zu Bourbaki

A.1 Die archivierten Textbestände

A.1.1 Zur Aufbewahrung der Bourbaki-Texte

Es gibt heutzutage zwei wichtige Aufbewahrungsstätten von Bourbaki-Material: Zum einen die *Archives Delsarte* im *Institut Élie Cartan (Université Henri Poincaré*, Nancy), zum anderen die *Archives de la création mathématique* (ACM; UPS 2065 *du* CNRS, Villejuif)[503]. Der Kürze halber gebe ich im folgenden für Texte, die in Nancy aufbewahrt werden, das dort übliche Kürzel BKI an und für solche, die in Villejuif aufbewahrt werden, ACM.

Nancy verfügt über einen gut ausgearbeiteten und (soweit ich ihn verwendet habe) fast fehlerfreien Katalog der Bestände. Im ACM ist man erst dabei, die Bestände zu erfassen; ich kann daher die Dokumente nicht auf einen Katalog bezogen zitieren. Alle Texte sind aber auf CD-Rom zugänglich und insofern recht schnell zu finden.

In Nancy liegt außerdem Delsartes eigenhändiger Katalog seiner Bourbaki-Archive als BKI 00 *Cote* 457 in Fotokopie vor. Die *rédactions* sind hier nach *Livres* sortiert; bereits diese Aufstellung verwendet das Kürzel BKI, allerdings leicht abweichend von der im heutigen Katalog vorgenommenen Aufteilung (BKI 11 u. 12 sind vertauscht). Es gibt gewisse Abweichungen des in 457 genannten Bestandes vom tatsächlichen heutigen Bestand in Nancy; vgl. A.1.4.

A.1.2 Zur Systematik der Textnummern

Bourbaki beschloß am 20.06.1954, eine Liste der Texte zu erstellen und diese durchzunumerieren (vgl. *Tribu 33bis*). Diese Arbeit wurde Dewdon anvertraut; die Liste sollte beim Kongreß in Murols (*34*) verteilt werden. Ich nehme an, das Ergebnis ist der Text *"Nomenclature des rédactions Bourbaki"* (BKI 00 *Cote* 484, in Fotokopie). In einer kurzen Einleitung entschuldigt sich der ungenannte Verfasser für die willkürliche Anordnung der Texte; weiter heißt es:

[503]Zur Entstehung der Bourbaki-Archive vgl. [Corry 1996, 297 Anm.13].

> On a reproduit aussi fidèlement que possible les titres des rédactions pour permettre aux fidèles de [...] marquer leurs exemplaires personnels [...]. Les astérisques [*einige der Texte sind mit einem Stern versehen*] indiquent que le stencil de la rédaction existe. Les rédactions correspondantes pourraient donc être retirées [...]

Einige Texte tragen den Vermerk *"Perimé"*; insgesamt werden Texte in absteigender Folge mit den Nummern 200 – −1 aufgeführt. Ein weiterer Text, der unter BKI 00 *Cote* 485 in Fotokopie aufbewahrt wird, ist überschrieben *"Nomenclature des rédactions Bourbaki (édition n°2, valable à la date du 13 septembre 1955)"*. Der Text nennt in aufsteigender Folge Texte mit den Nummern −1 – 226. Die Vorrede besagt, daß man spätestens ab n°180 von chronologischer Ordnung ausgehen kann.

Um weitere Nummern zu entschlüsseln, habe ich mich folgender Quellen bedient:

- BKI 00 *Cote* 457 (liefert die Nummern zu solchen Texten, die in den *Archives Delsarte* aufbewahrt werden bzw. wurden)
- BKI 00 *Cote* 458 (*n°313 – n°350*);
- BKI 00 *Cote* 459 *"Contenu des tribus recentes"* vom November 1955 (hier werden allerdings hauptsächlich Titel und nur wenige Nummern genannt).

A.1.3 Aufstellung der von mir verwendeten Texte

Ich verwende in meiner Arbeit folgende Texte:

Nummer	Titel	Aufbewahrungsorte
n°41	*Rapport sur les applications universelles*	BKI 02-3 *Cote* 41
n°50	*Éléments de la théorie des ensembles. Prolégomènes sur la notion de théorie mathématique (État 1)*	BKI 01-1 *Cote* 50
n°56	*Théorie des ensembles (Weil)*	BKI 01-1 *Cote* 56
n°82	*Précisions et compléments à la théorie de l'homologie*	ACM CD CNRS 1/5
n°100	*Appendice I/ Sur les applications universelles (S.94); Appendice II/ Produit tensoriel d'une infinité d'algèbres sur un corps (S.101)*	ACM CD CNRS 2/5
n°103	*Rapport SEAW sur la topologie préhomologique*	ACM CD CNRS 2/5
n°130		ACM CD CNRS 4/5
n°132	*TE Chap III projet de paragraphe préliminaire*	BKI 01-2 *Cote* 132
n°137	*Chapitre III. Structures (État 5)*	BKI 01-2 *Cote* 137
n°147	*Chapitre I état 6*	BKI 01-3 *Cote* 147
n°160	*Chapitre II état 6*	BKI 01-3 *Cote* 160
n°180	*Chap.IV structures état 7?*	BKI 01-3 *Cote* 180

Nummer	Titel	Aufbewahrungsorte
n°188	*Chap.IV structures état 8?*	BKI 01-3 *Cote* 188
n°196	*Chap.IV structures état 9*	BKI 01-3 *Cote* 196
n°197	*Rapport de Géometrie Algébrique*	BKI 10 *Cote* 197
n°206	*Rapport de Géometrie Algébrique*	BKI 10 *Cote* 206
n°206bis	*Rapport de Géometrie Algébrique*	BKI 10 *Cote* 206bis
n°207		BKI 12 *Cote* 207
n°209	*Observations sur la rédaction des structures*	BKI 01-3 *Cote* 209
n°235		
n°242		BKI 02-8 *Cote* 242
n°248	*Modifications au chapitre des structures*	BKI 01-3 *Cote* 248
n°285		BKI 03-4 *Cote* 285
n°301	*Formalisation des classes et catégories, D.Lacombe*	3.43 (divers) BKI 13-2 *Cote* 301
n°307	*Sur la formalisation des Catégories et foncteurs*	3.43 (divers) BKI 13-2 *Cote* 307
n°313	*Sur la signification intuitive des axiomes de la théorie des univers*	3.43 (divers) BKI 13-2 *Cote* 313
n°314	*Topologie générale (Chapitre III)/ (Réédition)/ Appendice/ limites projectives*	3.17 BKI 03-5 *Cote* 314
n°315	*limites inductives/ (Etat 3)*	3.17 BKI 03-5 *Cote* 315
n°320	*Rapport sur la cohomologie des groupes*	3.40 BKI 11 *Cote* 320 (1) (2) (3)
n°321	*pull-backs*	3.43 (divers) BKI 13-2 *Cote* 321
n°327	*Extrait du multiplodoque Grothendieck*	BKI 08-4 *Cote* 327 (algèbre commutative)
n°347		BKI 02-8 *Cote* 347

Diese Textauswahl ist durch mehrere Faktoren bedingt:

- berücksichtigt werden zum einen Texte, deren Titel (vgl. A.1.2) mir nahezulegen scheinen, daß sie in unserem Zusammenhang eine Rolle spielen (aufgenommen wurden diejenigen, für die sich diese Vermutung als zutreffend herausgestellt hat);

- berücksichtigt werden weiter Texte, auf die ich im Laufe der Lektüre der übrigen Texte oder der *Tribu* gestoßen bin;

- berücksichtigt werden hierbei nur Texte, die auffindbar bzw. einsehbar sind (vgl. A.1.4).

Natürlich können auf diesem Wege relevante Texte versehentlich unberücksichtigt bleiben; der Gesamtbestand der Bourbakitexte ist noch nicht sehr gut erschlossen.

A.1.4 Nicht einsehbare Bourbaki-Texte

Die oben angegebenen Quellen zur Erschließung des Bestandes bzw. zur Entschlüsselung der Nummern erlauben Rückschlüsse auf die Existenz einiger Texte, die nicht in den heutigen Beständen enthalten zu sein scheinen (bzw. aufgrund der im ACM gültigen Regelungen nicht einsehbar sind). In manchen Fällen läßt sich aus den Hinweisen auf diese Texte zugleich schließen, daß eine Einsichtnahme in sie in der vorliegenden Untersuchung eigentlich wünschenswert wäre; solche Texte führe ich im folgenden an und mache genauere Angaben zur Unvollständigkeit ihrer Lokalisation[504].

n°	wo erwähnt	Titel	zum Verbleib
78	Nancy-Katalog 3.40 BKI 11 *Cote* 78	*Homotopy Eilenberg*	am angegebenen Ort nicht auffindbar
83	*n°457*: BKI 12 (lies 11)	*Théorie de l'homologie* (nach *n°485*)	derzeit laut Liliane Beaulieu kein verbliebenes Exemplar bekannt
178	*n°485*	*Preliminary report on homological algebra* (nach *n°485*)	?
222	*n°485*; *n°459* nennt Grothendieck als Autor und *Tribu 36* als Besprechungsort	*Quelques remarques d'algèbre homologique*	?
239	*n°457*: BKI 11 Topologie élémentaire		unbekannt. Bestimmt für *livre VII, topologie P..réhomologique, Chap.I*; davon *état 2. Topologie élémentaire* ist im endgültigen Katalog BKI 12, aber dort wird *n°239* nicht aufgeführt; auch in der Box ist es nicht.
279	*n°457*: BKI 13; vgl. auch *Tribu 43*	*Livre inconnu Chapitre I – Catégories et foncteurs*	?
367	*n°457*: BKI 13	*Tiens un foncteur!*	?

[504] Einige Texte sind interessanterweise — obwohl sie in BKI 00 457 erwähnt werden — weder im Katalog noch im Bestand der *Archives Delsarte* aufzufinden, dafür aber im ACM: *n°82, 84, 103, 130.*

A.2 *La Tribu:* Studium im Blick auf die KT

Sehr schwierig zu rekonstruieren ist es, wer das jeweilige Protokoll verfaßt hat. In *Tribu 26* S.1 gibt es ein wenig Aufschluß über die Aufteilung der Arbeit des Protokollierens.

A.2.1 Die einzelnen Kongresse und ihre Teilnehmer

Nr.	*Titel*	Ort und Daten	Anwesende	*Archives Delsarte*-Signatur
21	*Compte-Rendu du Congrès de Nancy*	Nancy 03.–07.02.1950	Cartan, Chabauty, Delsarte, Dieudonné, Ehresmann, Godement, Mackey, Pisot, Roger, Samuel, Serre, Schwartz; *Cobayes:* Bruhat, Berger, Braconnier, Grothendieck, Riss	BKI 17-1 *Cote* 721
22	*Compte-Rendu du Congrès de la Revanche du Cocotier*	Royaumont 05.–17.04.1950	Cartan, Chabauty, Delsarte, Dieudonné, Godement, Mackey *(au début)*, Pisot, Roger, Samuel, Schwartz, Serre, Weil	BKI 17-1 *Cote* 722
23	*Compte-Rendu du Congrès de l'Horizon*	Royaumont 08.–15.10.1950	Cartan, Dieudonné, Dixmier, Eilenberg, Samuel, Serre; *Retardataires:* Godement, Schwartz, Koszul	BKI 17-1 *Cote* 723
24	*Compte-Rendu du Congrès de Nancy*	Nancy 27.01.–03.02.1951	Cartan, Delsarte, Dieudonné, Dixmier, Godement, Koszul, Sammy, Samuel, Serre, Schwartz; *Cobayes:* Glaeser, Grothendieck, Un Brésilien	BKI 17-1 *Cote* 724
25	*Compte-Rendu du Congrès oecumenique de Pelvoux-le-Poet*	Pelvoux-le-Poet, 25.06.–08.07.1951	Cartan, Delsarte, Dieudonné, Dixmier, Godement, Sammy, Samuel, Schwartz, Serre, Weil; *Visiteurs étrangers:* Hochschild, Borel; *Cobayes:* Cartier, Mirkil	BKI 17-1 *Cote* 725
26	*Compte-Rendu du Congrès-Croupion*	Royaumont, 01.–09.10.1951	Cartan, Dieudonné, Dixmier, Godement, Samuel, Schwartz, Serre	BKI 17-1 *Cote* 726

Nr.	*Titel*	Ort und Daten	Anwesende	*Archives Delsarte*-Signatur
26bis	*Décisions prises à l'occasion du séminaire de décembre 1951*			BKI 17-1 *Cote* 726bis
27	*Compte-Rendu du Congrès-Croupion des Vosges*	Celles-sur-Plaine, 08.–16.03.1952	Cartan, Dieudonné, Dixmier, Delsarte, Godement, Samuel, Schwartz; *Invité:* Grothendieck	BKI 17-1 *Cote* 727
28	*Congrès de la motorisation de l'Ane qui trotte*	Pelvoux-le-Poet 25.06.–08.07.1952	Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné, Dixmier, Godement, Sammy, Samuel, Schwartz, Serre, Weil; *Nobles visiteurs étrangers:* Borel, de Rham, Hochschild	BKI 17-1 *Cote* 728
29	*Congrès de l'incarnation de l'Ane qui trotte*	Celles-sur-Plaine 19.-26.10.1952	Cartan, Koszul, Serre, Weil; *quasi-présents:* Dixmier, Schwartz; *quasi-absent:* Delsarte	BKI 17-1 *Cote* 729
30	*Congrès nilpotent*	Celles-sur-Plaine 01.-08.03.1953	Cartan, Delsarte, Dixmier, Koszul, Schwartz, Serre, Weil; *visiteurs:* Smithies, Thom	BKI 17-1 *Cote* 729
31	*Congrès de la révélation du règlement*	Royaumont 06.–19.06.1953	Cartan, Delsarte, Dieudonné, Dixmier, Godement, Koszul, Schwartz, Serre, Weil, *quelques dames*	BKI 17-1 *Cote* 731
32	*Congrès du coryza*	Royaumont 02.–09.10.1953	Cartan, Dixmier, Godement, Koszul, Samuel, Schwartz, Serre; *Visiteur:* Bruhat, Nomizu	BKI 17-1 *Cote* 732
33	*Congrès de la Tangente*	Celles-sur-Plaine 28.03.-03.04.1954	Cartan, Dixmier, Godement, Koszul, Samuel, Schwartz, Serre; *Partielle présence de:* Delsarte, Weil	BKI 17-1 *Cote* 733
33bis	*Congrès extraordinaire des croulants*	Nancy 20.06.1954	Cartan, Delsarte, Dieudonné, Dixmier, Godement, Koszul, Samuel, Schwartz, Serre, Weil	BKI 17-1 *Cote* 733bis

Nr.	*Titel*	Ort und Daten	Anwesende	*Archives Delsarte*-Signatur
34	*Compte rendu du Congrès super-oecumenique du frigidaire et des revêtements troues*	Murols 17.–31.08.1954	Cartan, Chevalley, Delsarte *(partiellement)*, Dieudonné, Dixmier, Godement *(en retard)*, Koszul, Sammy, Samuel, Schwartz, Serre, Weil [. . .] *efficiency expert:* Mac Lane	BKI 17-1 *Cote* 734
35	*Congrès du banc public*	La Ciotat 27.02.–06.03.1955	Cartan, Dixmier, Koszul, Samuel, Serre	BKI 17-1 *Cote* 735
35bis	*Compte rendu du second caucus des Illinois*	Chicago 30.05.–02.06.1955	Borel, Chevalley, Dieudonné, Lang, Samuel, Weil	BKI 17-1 *Cote* 735bis
36	*Congrès des Résineux*	Juin 1955		fehlt in den *Archives Delsarte*; erwähnt in BKI 00 459
37	*Congrès de la lune*	Marlotte 23.–29.10.1955	Borel, Cartan, Chevalley, Godement, Grothendieck, Koszul, Schwartz	BKI 17-1 *Cote* 737; schwer lesbar
38	*Compte-Rendu du congrès des trois angles plats*	Amboise 11.–17.03.1956	Borel, Cartan, Chevalley, Dixmier, Godement, Grothendieck, Koszul, Samuel, Schwartz, Weil; *Cobayes:* Cartier, Bruhat	BKI 17-1 *Cote* 738
39	*Compte-Rendu du congrès des Tapis*	Sallières-les-bains (in den Anlagen: Die) 24.06.–07.07.1956	Borel *(en partie)*, Bruhat, Cartan, Cartier, Chevalley, Dewdon, Dixmier *(en partie)*, Godement, Grothendieck, Koszul, Lang, Sammy *dit* Zouli-Tapis, Samuel, Serre; *Visiteur:* Moore	BKI 17-1 *Cote* 739, schwer lesbar
40	*Compte-Rendu du congrès de l'intelligence peu commune*	Amboise, 07.–14.10.1956	Borel, Bruhat, Cartan *(en partie)*, Cartier, Chevalley, Dixmier, Grothendieck, Samuel	BKI 17-2 *Cote* 740
41	*Compte-Rendu du congrès du foncteur inflexible*	Amboise, 17.–24.03.1957	Bruhat, Cartan *(2 jours)*, Cartier, Chevalley, Dixmier, Godement, Grothendieck, Koszul, Samuel, Schwartz, Serre	BKI 17-2 *Cote* 741

Nr.	*Titel*	Ort und Daten	Anwesende	*Archives Delsarte*-Signatur
42	*Compte-Rendu du congrès oecumenique du diabolo*	Die, 23.06–07.07.1957	Borel, Bruhat, Cartan, Cartier, Dixmier, Godement, Grothendieck, Koszul, Lang, Samuel, Schwartz, Serre	BKI 17-2 *Cote* 742
43	*Compte-Rendu du congrès de la deuxième lune*	Marlotte, 06.10.–11.10.1957	Cartan *(partiellement)*, Chevalley, Dixmier, Godement, Grothendieck, Koszul, Samuel, Schwartz, Weil	BKI 17-2 *Cote* 743
44	*Compte-Rendu du congrès des minutes de silence*	Marlotte, 16.03.–22.03.1958	*(Présents totaux)* Chevalley, Dixmier, Godement, Koszul, Samuel, Schwartz; *(Présents à éclipses)* Cartan, Dieudonné, Grothendieck, Lang, Serre, Weil	BKI 17-2 *Cote* 744
45	*Compte-Rendu du congrès des hyperplans*	Pelvoux, 25.06.–07.07.1958	Borel, Bruhat, Cartan, Cartier, Dieudonné, Dixmier, Godement, Grothendieck, Lang, Sammy, Samuel, Serre, Tate	BKI 17-2 *Cote* 745
46	*Congrès du banquet auxiliaire*	La Ciotat, 05.10.–12.10.1958	Bruhat, Cartan *(partiellement)*, Chevalley, Dixmier, Godement, Malgrange, Serre	BKI 17-2 *Cote* 746
47	*Congrès "chez mon cousin"*	Amboise, 07.–14.03.1959	Bruhat, Cartan *(partiel)*, Chevalley, Dieudonné *(partiel)*, Dixmier, Godement, Grothendieck, Samuel, Schwartz, Serre, Tate	BKI 17-2 *Cote* 747
48				fehlt in den *Archives Delsarte*
49	*Congrès des deux trous*	Saint-Rémy-de-Provence, 28.09.–03.10.1959	Bruhat, Cartan, Cartier *(partiel)*, Chevalley, Dieudonné, Dixmier, Grothendieck *(partiel)*, Koszul	BKI 17-2 *Cote* 749
50	*Congrès krou-kroupion*	Bellème, 20.–26.03.1960	Bruhat, Cartan, Chevalley, Dieudonné, Dixmier, Grothendieck *(partiel)*, Koszul, Serre *(partiel)*	BKI 17-2 *Cote* 750

Nr.	*Titel*	Ort und Daten	Anwesende	*Archives Delsarte*-Signatur
51	*Congrès Un peu sec*	Pelvoux, 25.06.–07.07.1960	Borel, Bruhat, Cartan, Cartier, Dieudonné *(en partie)*, Dixmier *(en partie)*, Grothendieck, Koszul *(en partie)*, Lang, Sammy *(en partie)*, Serre, Tate, Weil	BKI 17-2 *Cote* 751
52	*Congrès de la Suspension*	Sancerre, 28.09.–03.10.1960	Bruhat, Cartier, Chevalley, Dixmier, Godement *(en partie)*, Samuel, Schwartz *(partiel)*, Serre	BKI 17-2 *Cote* 752
53	*Congrès "à la main"*	Sancerre, 12.–19.03.1961	Bruhat, Cartan, Cartier, Chevalley, Dieudonné, Dixmier, Godement, Samuel, Serre	BKI 17-2 *Cote* 753
54	*Congrès du Mur du çon*	Aiguines, 26.06.–08.07.1961	Borel, Cartan, Cartier, Dixmier *(partiel)*, Godement *(partiel)*, Lang, Sammy, Samuel, Schwartz, Serre, Tate	BKI 17-2 *Cote* 754
55	*Congrès du Revêtements reprisés,*	02–07.10.1961	Cartier, Chevalley, Dixmier, Koszul, Samuel *(partiel)*	BKI 17-2 *Cote* 755
56	*Congrès des Drapeaux,*	25.03.–31.03.1962	Bruhat, Cartier, Chevalley, Dixmier, Koszul, Samuel, Schwartz, Serre	BKI 17-2 *Cote* 756; hier endet der Bestand der *Archives Delsarte*

A.2.2 *Engagements du Congrès*

In der folgenden Tabelle habe ich die hier relevanten *Engagements du Congrès* zusammengestellt. Es ist nicht immer klar zu erkennen, ob die jeweiligen Texte auch entstanden sind, abgegeben und besprochen wurden und welche Nummer sie erhalten haben.

Die einzelnen Spalten haben folgende Bedeutung:

Spalte	Inhalt
1	Titel des *engagements*
2	Band der *Tribu*, in dem das *engagement* verzeichnet ist (in dieser Tabelle entfällt aus Platzgründen die Angabe *Tribu* vor der kursiven Bandnummer)
3	Beauftragter Verfasser
4	Datum der voraussichtlichen Abgabe; welche *Tribu* ergibt sich daraus als Besprechungsort? (es kommt allerdings auch vor, daß es Endredaktionen sind, die nicht mehr besprochen werden)
5	Band der *Éléments*, für den der Text vorgesehen ist
6	Erfolgte die Ablieferung? Unter welcher Nummer der *nomenclature*? (hier mache ich nur wenige Angaben; weitere Forschung ist notwendig)

1	2	3	4	5	6
Faisceaux	*34*	Godement	mai 55 (d.i. *36*)	???	laut BKI 00 *Cote* 459 wird in *36* über *Faisceaux* Godement (keine Nr.) gesprochen
Homologie des faisceaux	*37*	Grothendieck	sans date	?	
démonstrations relatives aux classes abéliennes	*37*	Grothendieck	sans date	*"les envoyer à Sammy"*; dies war womöglich nicht das Frühstadium einer Bourbaki-Publikation, sondern ist im Zusammenhang von Serres Brief an Grothendieck vom 13.07.1955 zu verstehen; vgl. ⟨#50 S.123⟩	

1	2	3	4	5	6
Rapport sur l'algèbre homologique	*25*	Sammy	printemps 52 (d.i. *27*	*Tribu 25* S.24: *"Le rapport comprendra la théorie des foncteurs et satellites".*	
Rapport sur l'algèbre Homologique	*28*	Sammy	juin 53 (d.i *31*)		
Algèbre homologique	*30*	Sammy	juin 53 (d.i. *31*)		
Etat 1 d'Algèbre homologique	*31*	Chevalley	juin 54 (d.i. *33bis*)		
Etat 1 d'Algèbre homologique	*32* (S.29)	Chevalley	sans date		
Algèbre homologique	*37*	Sammy	mai 56 (d.i. *39*)	*envoyer à Cartan*	vgl. die im Columbia-Nachlaß gefundenen Texte "II. Abelian Categories" und "IV. Resolutions" (6.3.3.1)
Algèbre homologique	*38*	Sammy	mai 56 (d.i. *39*)	?	
Algèbre homologique I, III et V	*39*	Sammy	mai 57 (d.i. *42*)	Teil I soll sein *catégories et foncteurs*; die Überschneidung mit Grothendieck (vgl. ⟨#90 S.258⟩) scheint niemanden zu stören	
Algèbre homologique I, II [lies wohl eher III] et V	*40*	Sammy	Mai 57 (d.i. *42*)		
Livre d'Algèbre Homologique	*42* (S.5)	Godement fait un rapport	keine Angabe eines Abgabedatums		

1	2	3	4	5	6
limites inductives, Appendice des	*38*	Samuel	mai 56 (d.i. *39*)	???	vgl. ⟨#76 S.240⟩
limites projectives	*45* (S.10)	Cartier	oct. 58 (d.i. *46*)		*n°314? n°315?*
rapport sur les foncteurs	*24* (S.2)	Sammy	juin 52		
Rapport sur le rôle des foncteurs au Livre I, chapitre des Structures	*25* (S.5)	Sammy	Janvier 52		
catégories et foncteurs, Fascicule de résultats	*39*	Grothendieck	sans date	vgl. vermutlich ⟨#90 S.258⟩	
catégories et foncteurs, Fascicule de résultats	*40*	Cartier	sans date	?	
catégories et foncteurs, Fascicule de résultats	*41*	Cartier	mars 1958 (d.i. *44*)	*Tribu 42* S.3: *"On envisage la possibilité d'un chap.V [von TE] (Catégories et Foncteurs); Cartier rédigera un fascicule de résultats pour Mars 1958"*.	Im März 58 war Cartier gar nicht anwesend (*Tribu 44*), auch nicht im Oktober 57 (*Tribu 43*). Allerdings wurde in *Tribu 43* ein Text gelesen — mit wenig Begeisterung (6.4.2).
catégories	*49*	Grothendieck			
catégories et foncteurs, Fascicule de résultats (???) [??? original]	*54*	Cartier			

1	2	3	4	5	6
catégories et foncteurs, Livre	*56*	Chevalley	octobre 62 (nicht mehr in den *Archives Delsarte*)	*"la place d'un tel chapitre n'a pas été décidé"*.	

A.2.3 Texte zur Struktur des Gesamtwerks, insbesondere zur möglichen Rolle der KT darin

Man spürt über die Jahre ein Ringen um die Struktur des Gesamtwerks (Sinnvoll wäre hier der Vergleich mit der Struktur der tatsächlich publizierten Teile, der hier ausbleiben muß). Dieses Ringen ist genau das, was sich Bourbaki vorgenommen hatte: Mathematik organisieren (im Singular: *la mathématique*). *Abandonner le linéaire* (s.u.) ist das Eingeständnis, daß die Aufgabe nicht zu bewältigen ist. In diesem Licht erscheint die der KT von manchen zugedachte Rolle eines solchen Organisationsprinzips zweifelhaft.

An welchen Stellen sollten Texte über Kategorientheorie in das Gesamtwerk einbezogen werden? Über die verschiedenen Vorschläge dazu geben die gelegentlich vorgenommenen Auflistungen der voraussichtlichen Struktur des Gesamtwerks einen Überblick.

- BKI 00 452 ist ein *plan général.*
- In *Tribu 25* auf S.3 steht ein *plan général.*
- *Tribu 39* enthält eine Übersicht über den Plan *("Numéro du Plan").* Aus dieser Übersicht ergeben sich folgende Absichten im Zusammenhang mit Kategorientheorie: In der *Première Partie* des Gesamtwerkes wird das *Livre I (Théorie des ensembles)* besprochen; hier geht es unter *Chap.IV (Structures)* um KT; für ein ausführliches Zitat vgl. 6.4.3. Zum *Livre II (Algèbre), Chap.III* ist zu lesen:

  > L'appendice des produits tensoriels sur les anneaux non commutatifs, adopté à Amboise, remplacera celui des applic.univ. [*Abkürzung original*] [...] on ajoute une footnote renvoyant aux limites inductives ultérieures. Le supplement des limites inductives n'a pas été lu. [...] Les limites inductives pourraient venir en préliminaire aux faisceaux [...]

  Mit dem Kongreß in Amboise ist zweifellos *38* gemeint, der unmittelbar vorausgehende Kongreß; vorher gibt es keine Kongresse in Amboise (es sei denn vor *20*, was ja hier wohl wegfällt). Geplant ist ein *Livre VII — (Topologie P... réhomologique)*; dazu heißt es:

  > Ce livre comprendra les faisceaux (déjà rédigés ; on les verra en Octobre 56, agrémentés si l'on veut des limites inductives) [...]

  Es folgt ein *Livre VIII (Homologie)*; dieses soll umfassen

  > Catégories, catégories abéliennes (Sammy continuera à envoyer des papiers ; il résumera les parties I et III manquants, et fera une rédaction détaillé de V ; détails plus loin sur II et IV.)

  (vgl. hierzu 6.3.3.1.)

- *Tribu 41* enthält (gemäß den *tables de matières* S.1) *plusieurs plans généraux contradictoires.* Auf S.3 versucht man einen *plan général* für das gesamte Projekt in 5 *parties*; hierzu heißt es zunächst *La première partie est terminée avec le livre d'Intégration.* Die *Partie II* ist überschrieben *"les catégories fondamentales"*; es ist nicht zu erkennen, ob dieser Titel in Analogie zur Rede von "Mutterstruktur" gemeint ist. Die *Partie II* soll umfassen:

  > livre I — Catégories et foncteurs (avec les catégories additives et abéliennes)
  > livre II — Algèbre homologique [...]
  > livre III — Catégories topologiques (avec fibrés, faisceaux, revêtements).

  Die übrigen Partien sind überschrieben *Analyse algébrique, Analyse Fonctionnelle, Les variétés.*

  Es folgt eine Diskussion dieses Vorschlags. Einigkeit besteht darüber, den ersten Teil mit dem Buch über Integration abzuschließen. Der Vorschlag habe den Vorteil, für die Varietäten alle erforderlichen Hilfsmittel bereitzustellen, aber den Nachteil, daß auf diesem Weg die Varietäten erst sehr spät werden erscheinen können. Die Konzeption des Buches über die Varietäten könne nicht mehr die vom Kongreß von Murols (also *34*) sein, zumindest was die wichtigsten Hilfsmittel betrifft (*"faire fonctionner la machine de Grothendieck"*).

  Anschließend gibt es einen Alternativvorschlag:

  > On a proposé, dans une optique tout à fait opposée, de faire un livre VII, préliminaire aux variétés, et qui comprendrait :
  >
  > Chap.I — Catégories et foncteurs.
  > Chap.II — Faisceaux.
  > Chap.III — Catégories locales.
  > Chap.IV — Fibrés.
  > Chap.V — Revêtements.
  >
  > Ce Livre ne comporterait ni catégories abéliennes, ni algèbre homologique.

  Die Numerierung *"livre VII"* von S.3 b) ist interessant. In *Tribu 39* war noch die *"topologie préhomologique"* mit *livre VII* gemeint (allerdings die Garben und eventuell *limites inductives* umfassend); in *Tribu 42* S.6 entspricht dies dem Buch über *"topologie élémentaire"*. In der Besprechung zu *n°239* (*Tribu 41*) ist *livre VIII Topologie élémentaire.* Die *"optique tout à fait opposée"* besteht wohl darin, den Vorschlag der neuen Teile ganz fallen zu lassen und mit der Nummer VII linear an die vorhandenen Bücher anzuknüpfen.

- *Tribu 42* hat, beginnend auf S.3, eine ausführliche Bestandsaufnahme des gesamten Projektes, überschrieben *Plan général — État des rédactions.* Zu *Première partie, Livre I (Ensembles)* heißt es (in Übereinstimmung mit dem in *Tribu 39* Gesagten):

> Le chap.IV des structures est à l'impression. On envisage la possibilité d'un chap.V (Catégories et Foncteurs) ; Cartier rédigera un fascicule de résultats pour Mars 1958.

Ansonsten umfaßt die *première partie* folgende *livres*: *Algèbre, Topologie générale, EVT, Intégration*. KT wird hier nicht erwähnt. Sodann heißt es:

> Le Congrès décide que la première partie se termine ici, et que l'on abandonne désormais l'ordre linéaire.

Es folgen Vorschläge für *autres parties*; darunter betreffen uns hier:

> Livre d'Algèbre Homologique — Godement fait un rapport. [...]
>
> Livre de Géometrie Algébrique — La tendance actuelle de Bourbaki est d'en faire le livre central. [...]
>
> Livre de Topologie Elémentaire

— wobei der Inhalt des letztgenannten Buches dem des *livre VII* aus dem Alternativvorschlag von *Tribu 41* entspricht.

Abkürzungsverzeichnis

A) Bibliographische Angaben und ähnliches

A.1) Verlage, Forschungseinrichtungen und -organisationen

ACM	*Archives de la création mathématique* (UPS 2065 du CNRS, Villejuif); vgl. Anhang A.1.1.
AMS	*American Mathematical Society*, Providence/Rhode Island
BI	Bibliographisches Institut Darmstadt
CNRS	*Centre national de la recherche scientifique*
DFH	Deutsch-Französische Hochschule, Saarbrücken
DMV	Deutsche Mathematikervereinigung
ENS	*École Normale Superieure*
EPT	*École polytechnique*
ICM	*International Congress of Mathematicians*
IHES	*Institut des Hautes Études Scientifiques*, Bures-sur-Yvette
IHP	*Institut Henri Poincaré*, Paris
LMS	*London Mathematical Society*
LPHS	*Laboratoire de Philosophie et d'Histoire des Sciences* (UMR 7117 CNRS), Nancy
MAA	*Mathematical Association of America*, Washington/DC
NY	New York (bei Verlagsangaben)
puf	*presse universitaire de France*
SMF	*Société Mathématique de France*
V&R	Verlag Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen

A.2) Zeitschriften, Schriftenreihen, Einzelwerke

AJM	*American Journal of Mathematics*, Johns Hopkins University Press/ Baltimore
AM	*Annals of Mathematics*
AMM	*American Mathematical Monthly*, MAA
AHES	*Archive for the history of exact sciences*, Springer/Berlin
BAMS	*Bulletin of the AMS*
BJPS	*British Journal for the Philosophy of Sciences*

CTGD	*Cahiers Topologie et Géometrie differentielle*, Université Picardie/Amiens
CMIRU	*Communications of the Mathematical Institute of the Rijksuniversiteit Utrecht*
CRASc	*Comptes rendues de l'Académie des Sciences*
Crelle	*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, De Gruyter/ Berlin
EPW	*Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*
FM	*Fundamenta mathematicæ*, Polnische Akademie der Wissenschaften/ Warschau
GTM	*Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag
HM	*Historia mathematica*, Academic Press/Orlando
JFM	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, DMV, De Gruyter/ Berlin
LNM	*Lecture Notes in Mathematics*
LNCS	*Lecture Notes in Computer Science*
MA	*Mathematische Annalen*, Springer/Heidelberg
MH	*Monatshefte*, Wien
MI	*Mathematical Intelligencer*, Springer/NY
MR	*Mathematical Reviews*, AMS
MS	*Mathematische Semesterberichte*, DMV
MZ	*Mathematische Zeitschrift*, Springer/Berlin
NAW	*Nieuw Archief voor Wiskunde*, Math. Centrum/Amsterdam
NORMAT	*Nordisk matematisk tidskrift*, Skand. University Press/Oslo
NTM	*Schriftenreihe zur Geschichte von Naturwissenschaft, Technik und Medizin*, Birkhäuser/Basel
PS	*Philosophia Scientiæ*, LPHS/Nancy
SB	*Séminaire Bourbaki.* SB 182 ist [1959], SB 190 ist [Grothendieck 1960b], SB 195 ist [Grothendieck 1960c].
SC	*Séminaire Cartan.* SC 50/51 ist [und Serre 1955].
SGA	*Séminaire de Géométrie Algébrique*, IHES. SGA 1 ist [Grothendieck. 1971], SGA 4 ist [und Verdier 1972], SGA $4\frac{1}{2}$ ist [Deligne 1977].
SHPS	*Studies in History and Philosophy of Science*, Pergamon/Oxford
stw	*suhrkamp taschenbuch wissenschaft*
TAMS	*Transactions of the AMS*
Tohoku	[Grothendieck 1957]

V&R–Studien	*Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik*, V&R
Zbl.	*Zentralblatt für die Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Springer/Berlin
ZMLG	*Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*
Ω	Ω-*Bibliography of Mathematical Logic*, ed. Gert H.Müller. Heidelberg: Springer 1987

A.3) Generelle Abkürzungen

Anm.	Anmerkung
bzw.	beziehungsweise
d.h.	das heißt
d.v.A.	der vorliegenden Arbeit
ebd.	ebenda, in der zuletzt zitierten Quelle
f	(bei Seitenangaben) und die folgende (bei MR–*items* bezeichnet ab 1980 der Buchstabe f das Heft Nr.f des Jahrgangs)
ff	(bei Seitenangaben) und die folgenden
fs	so werden Gesamtausgaben gekennzeichnet, die die originalen Seitenzahlen (Faksimileausgaben) oder jedenfalls die originalen Seitenumbrüche (dann kann man die zugehörige Originalseitenzahl errechnen oder umgekehrt) beibehalten.
i.S.	im Sinne
n.s.	*new series*
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

B) Mathematische Symbole und Abkürzungen

AB 3 etc.	vgl. 3.3.3.4
AC	*Axiom of Choice*; Auswahlaxiom
ÄR	Äquivalenzrelation
AFA	*Antifoundation axiom*; vgl. [Barwise und Moss 1991]
Cat	Kategorie aller Kategorien
$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$	Duale Kategorie zu $\mathcal{C}$
Cls	Kategorie aller Klassen
CH	Kontinuumshypothese

EVT	*espace vectoriel topologique*
FA	Fundiertheitsaxiom
fet	*full embedding theorem*
ggT	größter gemeinsamer Teiler
Grp	Kategorie der Gruppen
Htop	Homotopiekategorie (Objekte: topologische Räume; Pfeile: Homotopieklassen stetiger Abbildungen)
LCH	*large cardinal hypothesis*
$K^n \to S^n$-Problem	das Problem der Bestimmung der Homotopieklassen von Abbildungen von einem n-dimensionalen Polyeder K^n in eine n-Sphäre; vgl. 2.1.2.2
KT	Kategorientheorie
NBG	v.Neumann-Bernays-Gödel-Klassentheorie
Off(X)	Kategorie, deren Objekte die offenen Mengen eines topologischen Raumes X sind und deren Pfeile die Inklusionsabbildungen
$\mathfrak{P}(X)$	Potenzmenge von X
Set	Kategorie aller Mengen
TK	Tannaka-Kategorie; vgl. 4.2.4
Top	Kategorie der topologischen Räume
uct	*universal coefficient theorem*
ZF	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
ZFC	ZF + AC

C) Bourbaki

ACM	s.o.
BKI	verweist auf Texte, die in den *Archives Delsarte* im *Institut Élie Cartan (Université Henri Poincaré*, Nancy) aufbewahrt werden; vgl. Anhang A.1.1.
$n°X$	bezeichnet das Bourbaki-Manuskript mit der Bourbaki-internen Nummer X (vgl. Anhang A.1.2).
Tribu X	vgl. Anm.369
Kongreß X	vgl. Anm.369
(1951.2) u.ä.	vgl. Anm.369

Namensverzeichnis

Sachverzeichnis

Literaturverzeichnis

Abhyankar, Shreeram S. 1975. “High-school algebra in algebraic geometry.” *HM* 2 [4]: 567–572. MR57 #12081.

———. 1976. “Historical ramblings in algebraic geometry and related algebra.” *AMM* 83 [6]: 409–448. MR53 #5581.

Agazzi, E., und G. Darvas, Hg. 1997. *Philosophy of mathematics today.* episteme. Kluwer.

Alexander, J. W. 1920. “A proof of Jordan’s theorem about a simple closed curve.” *AM.*

———. 1922. “On transformations with invariant points.” *TAMS* 23:89–95.

———. 1926. “Combinatorial analysis situs.” *TAMS* 28:301–329.

———. 1930. “The combinatorial theory of complexes.” *AM* (2) 31:292–320.

Alexandroff, Paul. 1929. “Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen.” *AM* 30:101–187.

———. 1932. *Einfachste Grundbegriffe der Topologie.* Berlin: Springer.

———. 1935. “On local properties of closed sets.” *AM* 36:1–35.

Alexandroff, Paul, und Heinz Hopf. 1935. *Topologie. 1. Band.* Berlin: Springer.

Arbib, Michael A., und Ernest G. Manes. 1975. *Arrows, Structures, and Functors. The Categorical Imperative.* NY: Academic Press.

Artin, Emil. 1950. “The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra.” *BAMS* 56:65–72.

Artin, M., A. Grothendieck, und J. L. Verdier, Hg. 1972. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).* Volume 269 of *LNM.* Berlin: Springer-Verlag. MR50 #7130.

Baer, Reinhold. 1928. “Beiträge zur Galoisschen Theorie.” *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematische und Naturwissenschaftliche Klasse*, vol. Abhandlung 14.

———. 1934. “Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen.” *MZ* 38:375–416.

———. 1940. “Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group.” *BAMS* 46:800–806.

Banach, Stefan. 1922. “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.” *FM* 3:133–181. JFM **48** 201f.

———. 1979. *Œuvres.* Edited by Mazur et al. Warschau: Éditions scientifiques de Pologne.

Bar-Hillel, Y., et al., Hg. 1961. *Essays on the Foundations of Mathematics dedicated to A.A. Fraenkel on his seventieth anniversary.* The Hebrew University Jerusalem: Magnes Press.

Barr, Michael, und Charles Wells. 1985. *Triples, Topoi and Theories.* Volume 278 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer.

Barwise, Jon, und Larry Moss. 1991. “Hypersets.” *MI* 13 [4]: 31–41.

Bass, Hyman, Henri Cartan, Peter Freyd, Alex Heller, und Saunders MacLane. 1998. “Samuel Eilenberg (1913–1998).” *Notices AMS* 45 [10]: 1344–1352. MR99k:01045.

Beaulieu, Liliane. 1999. “Bourbaki’s art of memory. Commemorative practices in science: historical perspectives on the politics of collective memory.” *Osiris (2)* 14:219–251. MR2001h:01072.

Bell, J.L. 1981a. “Category Theory and the Foundations of Mathematics.” *BJPS* 32:349–358.

———. 1981b. “From absolute to local mathematics.” *Synthese* 69:409–426.

Belna, Jean-Pierre. 1996. *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege.* Mathesis. Paris: Vrin.

Bénabou, Jean. 1963. “Catégories avec multiplication.” *CRASc* 256:1887–1890. MR26 #6225.

———. 1985. “Fibered categories and the foundations of naive category theory.” *JSL* 50 [1]: 10–37. MR87h:18001.

Bernays, Paul. 1961. “Die hohen Unendlichkeiten und die Axiomatik der Mengenlehre.” In *[Bernays et al. 1961]*, 11–20.

Bernays, Paul, et al. 1961. *Infinitistic methods. Proceedings of the symposium on foundations of mathematics Warschau 1959.* NY: Pergamon Press. MR25 #4989.

Blanc, Georges, und M.R. Donnadieu. 1976. “Axiomatisation de la catégorie des catégories.” *CTDG* 17:135–170.

Blanc, Georges, und Anne Preller. 1975. “Lawvere’s Basic Theory of the category of categories.” *JSL* 40 [1]: 14–18.

Blass, Andreas. 1984. “The Interaction between Category Theory and Set Theory.” In *Mathematical Applications of Category Theory, Proceedings Denver 1983*, edited by J.W. Gray, Volume 30 of *AMS Series in Contemporary Mathematics*, 5–29.

Borel, Armand. 1953. “Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts.” *AM* 57:115–207.

Borel, Armand, und Jean-Pierre Serre. 1958. “Le théorème de Riemann-Roch.” *BSMF* 86:97–136. MR22 #6817.

Borel, Armand, et al., Hg. 1998. *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle. Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice, 1996).* Volume 3 of *Séminaires & Congrès. Collection SMF.*

Borsuk, Karol, und S. Eilenberg. 1936. “Ueber stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Raeume auf die Kreislinie.” *FM* 26:207–223.

Bourbaki, Nicolas. 1949. “Foundations of mathematics for the working mathematician.” *JSL* 14:1–8.

———. 1974. “Die Architektur der Mathematik.” In *[Otte 1974]*, 140–159.

Bouvier, Alain, und Michel George. 1983. *Dictionnaire des Mathématiques.* Deuxième édition revue et mise à jour. Paris: puf.

Brandt, H. 1925. “Über die Komponierbarkeit quaternärer quadratischer Formen.” *MA* 94:179–197.

———. 1926. “Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs.” *MA* 96:360–366.

———. 1928. “Idealtheorie in einer Dedekindschen Algebra.” *Jahresberichte DMV* 37:5–7.

Bridge, Jane. 1977. *Beginning model theory.* Clarendon Press.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1912. “Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.” *MA* 71:97–115.

Brown, Kenneth. 1982. *Cohomology of Groups.* Volume 87 of *GTM.* NY: Springer.

Brown, Robert F. 1971. *The Lefschetz fixed point theorem.* Glenview (Illinois): Scott, Foresman and Cie.

Brown, Ronald. 1968. *Elements of modern topology.* McGraw Hill.

Buchsbaum, David A. 1955. “Exact Categories and Duality.” *TAMS* 80:1–34.

———. 1959. “A note on homology in categories.” *AM (2)* 69:66–74. MR25 #3974.

———. 1960. “Satellites and universal functors.” *AM (2)* 71:199–209. MR22 #3751.

Cartan, Henri. 1943. “Sur le fondement logique des mathématiques.” *Revue Sci. (Rev. Rose Illus.)* 81:3–11. MR7,186f.

———. 1949. “Sur la notion de carapace en topologie algébrique.” In *[Cartan et al. 1949]*, 1–2. MR11,610f.

Cartan, Henri, und Samuel Eilenberg. 1956. *Homological Algebra.* Princeton University Press.

Cartan, Henri, Samuel Eilenberg, und Jean-Pierre Serre. 1955. *Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux. Seminaire Henri Cartan 3e annee: 1950/51. 2e ed. multigraphiee, revue et corrigee.* Paris: ENS.

Cartan, Henri, et al. 1949. *Topologie algébrique.* Volume 12 of *Colloques Internationaux du CNRS.* Paris: CNRS.

Carter, Jessica. 2002. "Ontology and Mathematical Practice." Ph.D. diss., University of Southern Denmark.

Cartier, P., L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Yu. Manin, und K. A. Ribet, Hg. 1990. *The Grothendieck Festschrift. Vol. I. A collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck.* Boston: Birkhäuser. MR91h:00035.

Cartier, Pierre. 2000. "Grothendieck et les motifs."

———. 2001. "A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry." *BAMS* 38 [4]: 389–408.

Cavaillès, Jean. 1976. *Sur la logique et la théorie des sciences.* Troisième édition. Paris: Vrin. Erstausgabe 1946 posthum.

Cech, E. 1932. "Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque." *FM* 19:149–183.

Chevalley, Claude, und Samuel Eilenberg. 1948. "Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras." *TAMS* 63:85–124. MR9,567a.

Church, Alonzo. 1941. *The calculi of Lambda-conversion.* Volume 6 of *AM Studies.* Princeton: Princeton University press.

———. 1956. *Introduction to mathematical logic.* Princeton: Princeton University press.

Cohen, P. 1963. "The independence of the continuum hypothesis I." *PNASUSA* 50:1143–1148.

———. 1964. "The independence of the continuum hypothesis II." *PNASUSA* 51:105–110.

Colmez, Pierre, und Jean Pierre Serre, Hg. 2001. *Correspondance Grothendieck-Serre.* Volume 2 of *Documents mathématiques.* SMF.

Copi, Irving M. 1971. *The theory of logical types.* London: Routledge & Kegan Paul.

Corry, Leo. 1996. *Modern algebra and the rise of mathematical structures.* Volume 17 of *Historical Studies.* Basel: Birkhäuser. Zbl.858.01022; MR97i:01023.

Costazza, Markus. 1993. "Die Abkehr vom Wahrheitsparadigma in der Wissenschaftsphilosophie." In *Argumentation und Entscheidung*edited by Roland Fischer, Markus Costazza und Ada Pellert, 193–242.

Dath, Dietmar. 2003. “Aber was tut Gott?” *FAZ* 272 [22.November]: 41.

Dedecker, Paul. 1958. “Introduction aux structures locales.” In *Colloque de Géométrie différentielle globale (CBRM)*, 103–135. Bruxelles.

Dedekind, Richard. 1887. “Was sind und was sollen die Zahlen.” In *[Dedekind 1932] II*, 335–391.

———. 1930, 1931, 1932. *Gesammelte Mathematische Werke in 3 Bänden.* Edited by Emmy Noether Robert Fricke et al. Braunschweig: Vieweg.

Deligne, Pierre. 1974. “La conjecture de Weil. I.” *IHES Publ. Math.* 43:273–307. MR49 #5013.

———. 1977. *Cohomologie étale. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA* $4\frac{1}{2}$. Volume 569 of *LNM.* Berlin: Springer-Verlag. MR57 #3132.

———. 1990. “Catégories tannakiennes.” In *[Cartier et al. 1990], Vol. II*, 111–195. MR92d:14002.

———. 1994. “À quoi servent les motifs?” In *[und Serre 1994]*, 143–161. MR95c:14013.

———. 1998. “Quelques idees maîtresses de l’œuvre de A. Grothendieck.” In *[Borel et al. 1998]*, 11–19. MR99k:01034.

Deuring, Max. 1935. *Algebren.* Volume 4, H. 1 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Berlin: Springer.

Dieudonné, Jean. 1939. “Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques.” *Rev. Sci.* 77:224.

———. 1990. “De l’Analyse fonctionnelle aux fondements de la Géométrie Algébrique.” In *[Cartier et al. 1990]*, 1–14.

Dold, Albrecht. 1972, 1980. *Lectures on Algebraic Topology.* Volume 200 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Berlin: Springer.

Drake, F. R. 1974. *Set theory. An Introduction to Large Cardinals.* Volume 76 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North–Holland.

Dress, Andreas. 1974. “Ein Brief.” In *[Otte 1974]*, 160–179.

Duren, Peter, und Uta C. Merzbach, Hg. 1988. *A century of mathematics in America. Part I.* Providence, RI: AMS. MR90a:01064.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, et al. 1992. *Einführung in die mathematische Logik.* 3.Auflage. Mannheim: BI.

Eckmann, B. 1998. “Naissance des fibrés et homotopie.” In *[Borel et al. 1998]*, 21–36.

Eckmann, B., und Peter Hilton. 1962. “Group-Like Structures in General Categories I. Multiplications and Comultiplications.” *MA* 145:227–255. 25 #108.

Ehresmann, Charles. 1957. “Gattungen von lokalen Strukturen.” *Jahresb. DMV* 60:227–255. MR20 #2392.

———. 1965. *Catégories et structures.* Paris: Dunod. MR35 #4274.

Eilenberg, Samuel. 1940. "Cohomology and continuous mappings." *AM, II. Ser.* 41:231–251.

———. 1949. "Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups." *BAMS* 55:3–37. MR11,8b.

———. 1993. "Karol Borsuk—personal reminiscences." *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1 [1]: 1–2. MR1 215 252.

———. 1995. "Foncteurs de modules et leurs satellites." In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1*, Exp. No. 46, 379–381. Paris: SMF. MR1 605 166.

Eilenberg, Samuel, D.K. Harrison, S. Mac Lane, und H. Roehrl, Hg. 1966. *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra in La Jolla 1965.* New York: Springer. 178.29005.

Eilenberg, Samuel, und G. Max Kelly. 1966. "Closed categories." In *[Eilenberg et al. 1966]*, 421–562. MR37 #1432.

Eilenberg, Samuel, und Saunders Mac Lane. 1942a. "Group extensions and homology." *AM (2)* 43:757–831. MROder in [Mac Lane 1979b, 183ff]. MR4,88d.

———. 1942b. "Natural isomorphisms in group theory." *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 28:537–543. MR4,134d.

———. 1945. "General theory of natural equivalences." *TAMS* 58:231–294. Oder in [Mac Lane 1979b, 273]. MR7,109d.

Eilenberg, Samuel, und Norman E. Steenrod. 1945. "Axiomatic approach to homology theory." *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 31:117–120. MR6,279d.

———. 1952. *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press.

Eilenberg, Samuel, und J. A. Zilber. 1950. "Semi-simplicial complexes and singular homology." *AM (2)* 51:499–513. MR11,734e.

———. 1953. "On products of complexes." *AJM* 75:200–204. MR14,670c.

Engeler, Erwin. 1993. *Foundations of Mathematics.* Springer.

Engeler, Erwin, und Helmut Röhrl. 1969. "On the problem of foundations of category theory." *dialectica* 23:58–66.

Epple, Moritz. 2000. "Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. Ein metahistorischer Essay." *MS* 47 [2]: 131–163.

Erdös, Paul, und Alfred Tarski. 1961. "On some problems involving inaccesible cardinals." In *[Bar-Hillel et al. 1961]*, 50–82.

Faddeev, D. K. 1947. "On factor-systems in Abelian groups with operators." *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.)* 58:361–364.

Feferman, Solomon. 1969. "Set–Theoretical Foundations of Category theory." *LNM* 106:201–247.

———. 1974. “Some Formal systems for the unlimited Theory of Structures and Categories.” *JSL* 39:374–375.

———. 1977. “Categorical Foundations and Foundations of Category theory.” In *Butts, Robert E.; Hintikka, Jaakko (eds.): Logic, Foundations of Mathematics and Computability theory*, 149–169. Dordrecht: Reidel.

Fisher, C. S. 1972. “Some Social Characteristics of Mathematicians and their Work.” *American Journal of Sociology* 78:1094–1118.

Fox, R. H. 1943. “Natural systems of homomorphisms. Preliminary report.” *BAMS* 49:373.

Fraenkel, A.A., Y. Bar-Hillel, und A. Lévy, Hg. 1973. *Foundations of Set Theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North–Holland.

Frank, Manfred. 1992. “Über Stil und Bedeutung. Wittgenstein und die Frühromantik.”

Fréchet, M. 1906. “Sur quelques points du calcul fonctionnel.” *Palermo Rend.* 22:1–74.

Freudenthal, Hans. 1937. “Entwickelung von Räumen und ihren Gruppen.” *Compositio Math.* 4:145–234.

Freyd, Peter J. 1964. *Abelian Categories: An introduction to the theory of functors.* NY: Harper and Row. MR29 #3517.

Gabriel, P. 1962. “Des catégories abéliennes.” *BSMF* 90:323–448.

Gödel, Kurt. 1931. “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.” *Monatshefte* 38:173–198.

———. 1940. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory.* Volume 3 of *AM Studies.* Princeton: Princeton University Press.

Gelfand, S.I., und Y.I. Manin. 1996. *Methods in homological Algebra.* Springer.

Gibbs, Josiah Willard, und Edwin Bidwell Wilson. 1901. *Vector Analysis: A Textbook for the use of Students of m+p.* New York: Charles Scribner’s Sons.

Gillies, Donald, Hg. 1992. *Revolutions in Mathematics.* Oxford Science Publications. Oxford: Clarendon.

Giraud, et al. 1968. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* Volume 3 of *advanced studies in pure math.* Amsterdam: North-Holland. MR39 #2777.

Godement, Roger. 1958. *Théorie des faisceaux et topologie algébrique.* Paris: Hermann.

Goldblatt, Robert. 1977. *Topoi. The Categorial Analysis of Logic.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North–Holland.

Gray, J.W. 1979. “Fragments of the History of Sheaf theory.” *LNM* 753:1–79.

Grosholz, Emily. 1992. "Was Leibniz a mathematical revolutionary?" In *[Gillies 1992]*, 117–133.

Grothendieck, Alexander. 1955a. *A general theory of fiber spaces with structure sheaf.* University of Kansas: National Science Foundation Research Project.

———. 1955b. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Volume 16 of *Mem. AMS.* Providence, RI: AMS. MR17,763c.

———. 1956. "La théorie de Fredholm." *BSMF* 84:319–384. MR19,558d.

———. 1957. "Sur quelques points d'algèbre homologique." *Tôhoku Math. J.* 9:119–221.

———. 1958. "Sur une note de Mattuck-Tate." *Crelle* 200:208–215. 25 #75.

———. 1959. "Geometrie formelle et geometrie algebrique." In *1958/59*, Volume 11 of *Sem. Bourbaki*, No.182, 28 p.

———. 1960a. "The cohomology theory of abstract algebraic varieties." In *Proc. ICM (Edinburgh, 1958)*, 103–118. New York: Cambridge Univ. Press. MR24 #A733.

———. 1960b. "Technique de descente et theoremes d'existence en geometrie algebrique. I: Generalites. Descente par morphismes fidelement plats. (Technique of descent and existence theorems in algebraic geometry)." In *1959/60*, Volume 12 of *Sem. Bourbaki*, No.190, 29 p.

———. 1960c. "Technique de descente et theoremes d'existence en geometrie algebrique. II: Le theoreme d'existence en theorie formelle des modules." In *1959/60*, Volume 12 of *Sem. Bourbaki*, No.195, 22 p.

———. 1961. "Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I." *IHES Publ. Math.*, no. 11:167. MR29 #1209.

———. 1962. "Techniques de construction en geometrie analytique. I: Description axiomatique de l'espace de Teichmueller et de ses variantes." In *Familles d'Espaces Complexes et Fondements de la Geom. Anal.*, Volume 13 of *Sem. H. Cartan 1960/61*, No.7–8, 33 p.

———. 1969. "Standard conjectures on algebraic cycles." In *Algebraic Geometry (International Colloquium, Tata Institute for Fundamental Research, Bombay, 1968)*, 193–199. London: Oxford Univ. Press. MR42 #3088.

Grothendieck., Alexander, Hg. 1971. *Revêtements étales et groupe fondamental. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1).* Volume 224 of *LNM.* Berlin: Springer-Verlag. MR50 #7129.

Guedj, Denis. 1985. "Nicholas Bourbaki, collective mathematician: an interview with Claude Chevalley. Translated from the French by Jeremy Gray." *MI* 7 [2]: 18–22. MR87f:01025a.

Gugenheim, V.K.A.M, und J.C. Moore. 1957. "Acyclic Models and Fibre spaces." *TAMS* 85:265–306.

Hakim, M. 1972. *Topos annelés et schémas relatifs.* Volume 64 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Berlin: Springer-Verlag. 51 #500.

Hall, P. 1938. "Group Rings and Extensions. I." *AM* 39:220–234.

Halmos, Paul Richard. 1969. *Naive Mengenlehre.* Zweite Auflage. Volume 6 of *Moderne Mathematik in elementarer Darstellung.* Göttingen: V & R.

Hartshorne, Robin. 1977. *Algebraic Geometry.* Volume 52 of *GTM.* Berlin: Springer-Verlag.

Hatcher, W.S. 1982. *The logical foundations of mathematics.* Pergamon.

Hausdorff, Felix. 1908. "Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen." *MA* 65:435–505.

———. 1914. *Mengenlehre.* Berlin: De Gruyter.

Hecke, Erich. 1923. *Vorlesungen über die Theorie der Algebraischen Zahlen.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Heinzmann, Gerhard. 1998a. "La pensée mathématique en tant que constructice de réalités nouvelles." *PS* 3 [1]: 99–111.

———. 1998b. "Poincaré on understanding mathematics." *PS* 3 [2]: 43–60.

———. 2002. "Some coloured elements of the foundations of mathematics in the 20th century." In *to appear.*

———. 2003. "Nature et structure de la justification en mathématiques: l'exemple du transfini."

Heller, Alex. 1958. "Homological algebra and abelian categories." *AM* 68 [3]: 484–525.

Heller, Alex, und K. A. Rowe. 1962. "On the category of sheaves." *AJM* 84:205–216. MR26 #1887.

Heller, Alex, und Miles Tierney, Hg. 1976. *Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg).* New York: Academic Press.

Herbrand, Jacques. 1933. "Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini. II." *MA* 108:699.

Herreman, Alain. 2000. "Découvrir et transmettre."

Hess, Kathryn. 1999. "A history of Rational Homotopy Theory." In *[James 1999b]*, 757–796.

Higgins, Philip J. 1971. *Categories and Groupoids.* Volume 32 of *London Mathematical Studies.* Van Nostrand Reinhold.

Hilton, Peter. 1981. "The Language of Categories and Category Theory." *MI* 3:79–82.

———. 1987. "The birth of homological algebra." *Expo. Math.* 5:137–142. Zbl.618.55010; MR88j:01017.

Hilton, Peter, und Wylie. 1960. *Homology theory. An Introduction to algebraic topology.* Cambridge University Press.

Hirzebruch, Friedrich. 1956. *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Volume neue Folge Heft 9 of *Ergebnisse der Mathematik.* Berlin: Springer.

Hopf, Heinz. 1926. "Abbildung geschlossener Mannigfaltigkeiten auf Kugeln in n Dimensionen." *Jahresbericht DMV* 34:130–133.

———. 1928. "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel." *Göttinger Nachrichten, Mathematisch–Physikalische Klasse*, pp. 127–136. hier zitiert nach [Hopf 1964, 5-13].

———. 1930. "Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten." *Crelle* 163:71–88. auch in [Hopf 1964, 14-13].

———. 1931. "Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche." *MA* 104:637–665. auch in [Hopf 1964, 38-63].

———. 1933. "Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre." *Commentarii Mathematici Helvetici* 5:39–54. hier zitiert nach [Hopf 1964, 80-94].

———. 1935. "Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension." *FM* 25:427–440. auch in [Hopf 1964, 95-106].

———. 1942. "Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe." *Comment. Math. Helv.* 14:257–309.

———. 1964. *Selecta.* Berlin: Springer.

Houzel, Christian. 1990. "Les debuts de la théorie des faisceaux." In *[Kashiwara und Schapira 1990]*, 7–22. Zbl.709.18001.

———. 1998. "Histoire de la théorie des faisceaux." In *[Borel et al. 1998]*, 101–119.

———. 2002a. "Bourbaki und danach." *Mathematische Semesterberichte* 49:1–10.

———. 2002b. *La géométrie algébrique, Recherches historiques, préface de Roshdi Rashed.* Blanchard.

Hulek, Klaus. 1997. "Der Satz von Riemann-Roch." In *[Weyl 1997]*, 217–229.

Hurewicz, W., und N. E. Steenrod. 1941. "Homotopy relations in fibre spaces." *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 27:60–64. MR2,323b.

Hurewicz, Witold. 1936a. "Beiträge zur Topologie der Deformationen III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen." *Proceedings of the Koninklijke Akademie von Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences* 39:117–126. Seifert: ZBL.013.22903.

———. 1936b. "Beiträge zur Topologie der Deformationen IV. Asphärische Räume." *Proceedings of the Koninklijke Akademie von Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences* 39:215–224. Seifert: ZBL.013.28303.

———. 1941. “On duality Theorems.” *BAMS* 47:562.

———. 1995. *Collected works of Witold Hurewicz. With contributions by Ryszard Engelking, Roman Pol, Edward Fadell, Solomon Lefschetz and Samuel Eilenberg.* Edited by Krystyna Kuperberg. Providence, RI: AMS. MR97m:01105.

Illusie, Luc. 1990. “Catégories dérivées et dualité, travaux de J.-L. Verdier.” *Enseign. Math.* 36:369–391.

Isbell, J.R. 1960. “Adequate Subcategories.” *Illinois Math. Journal* 4:541–552.

———. 1963. “Two set–theoretical theorems in categories.” *FM* 53:43–49.

———. 1966. *BAMS* 72:619–655. MR34 #5896.

James, I. M. 1999a. “From combinatorial topology to algebraic topology.” In *[James 1999b]*, 561–573.

———, Hg. 1999b. *History of Topology.* Amsterdam: North Holland.

Janik, Allan, und Stephen Toulmin. 1998. *Wittgensteins Wien.* Dt. Übersetzung von *Wittgenstein's Vienna*, 1972. Wien: Döcker Verlag.

Jannsen, Uwe, Steven Kleiman, und Jean-Pierre Serre, Hg. 1994. *Motives.* Volume 55 of *Proceedings of symposia in pure mathematics.* Providence, RI: AMS. MR94i:11003.

Jensen, Ronald Björn, Hg. 1967. *Modelle der Mengenlehre.* Volume 37 of *LNM.* Berlin: Springer.

Jänich, Klaus. 1990. *Topologie.* 3.Auflage. Springer.

Johnstone, P. T. 1977. *Topos Theory.* Volume 10 of *L.M.S. Monographs.* London: Academic Press.

Jordan, Camille. 1877. “Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique.” *Crelle* 84:89–215.

Kan, Daniel M. 1957. “On c. s. s. complexes.” *AJM* 79:449–476. MR19,759e.

———. 1958a. “Adjoint functors.” *TAMS* 87:294–329. MR24 #A1301.

———. 1958b. “Functors involving c.s.s. complexes.” *TAMS* 87:330–346. MR24 #A1720.

Kantor, Jean-Michel, Hg. 2000. *Jean Leray (1906–1998).* Volume Supplément au numéro 84 of *Gazette des mathématiciens.* SMF.

Kaplanski, Irving. 1960. “Review zu Formes sesquilinéaires et formes quadratiques (Bourbaki, Éléments de mathématique, Part I, Livre II, chap.9; 1959).” *BAMS* 66:266–267.

Kashiwara, Masaki, und Pierre Schapira. 1990. *Sheaves on manifolds. With a short history “Les debuts de la theorie des faisceaux” by Christian Houzel.* Volume 292 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Berlin: Springer-Verlag.

Katz, Nicholas M. 1975. “Review zu [Deligne 1974].” *Mathematical Reviews* 49:#5013.

Keisler, H.Jerome, und Alfred Tarski. 1963. "From accessible to inaccessible cardinals." *FM*, vol. 53.

Kelley, J. L., und E. Pitcher. 1947. "Exact homomorphism sequences in homology theory." *AM* 48:682–709.

Kelley, J.L. 1955. *General topology.* NY (Princeton lt. [Feferman 1969] und [Drake 1974]): Van Nostrand. MR16.1136, Zbl.66.166.

Kleiman, S.L. 1968. "Algebraic cycles and the Weil conjectures." In *[Giraud et al. 1968]*, 359–386.

Künneth, H. 1923. "Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten." *MA* 91:65–85.

Kragh, Helge. 1987. *An Introduction to the Historiography of Science.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kreisel, Georg. 1965. Mathematical Logic.

———. 1969. "Appendix II [zu [Feferman 1969]]." *LNM* 106:233–245.

———. 1972. "Review zu [Mac Lane 1971a]." *Mathematical Reviews* 44:#25.

———. 1974. "Die formalistisch–positivistische Doktrin der mathematischen Präzision im Licht der Erfahrung." In *[Otte 1974]*, 64–137.

Krömer, Ralf. 1998. *Zur Geschichte des axiomatischen Vektorraumbegriffs (Diplomarbeit).* Universität des Saarlandes.

———. 2000. "Akzeptanz neuer mathematischer Konzepte am Beispiel des Vektorraumbegriffs." *PS* 4 [2]: 147–172.

———. 2001a. "The metaphor of tool and foundation of mathematics." In *Mathematics throughout the ages*, edited by Eduard Fuchs, Volume 17 of *Research Center for the history of sciences and humanities. History of mathematics*, 287–295. Prag: Prometheus.

———. 2001b. "Tarski's Axiom of Inaccessibles and Grothendieck Universes — Historical and Critical Remarks on the Foundations of Category Theory." In *Logika 21*, Volume 2312 of *Acta Universitatis Wratislaviensis*, 45–57. Wrocław.

Kuehnrich, Martin. 1977. "Das Yoneda–Lemma in der Zermelo–Fraenkelschen Mengentheorie." *ZMLG* 23:443–446.

Kunz, Ernst. 1980. *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie.* Volume 46 of *vieweg studium.* Braunschweig: Vieweg.

Kuratowski, Kazimierz, und Mostowski. 1968. *Set Theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North–Holland.

Lawvere, F. William. 1964. "An elementary theory of the category of sets." *PNASUSA* 52:1506–1511.

———. 1966. "The Category of Categories as a foundation of mathematics." In *[Eilenberg et al. 1966]*, 1–21. MR34 #7332.

———. 1969. “Adjointness in Foundations.” *Dialectica* 23:281–295.

Lefschetz, Solomon. 1926. “Intersections and transformations of complexes and manifolds.” *Transactions AMS* 28:1–49.

———. 1927. “Manifolds with a boundary and their transformations.” *Transactions AMS* 29:429–462.

———. 1930. *Topology.* New York: AMS (AMS colloquium publications, vol. XII). IX, 410 p. .

———. 1942. *Algebraic Topology.* Volume 27 of *AMS Colloquium Publ.* Providence/RI: AMS.

Leray, Jean. 1945. “Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations.” *J. Math. Pures Appl. (9)* 24:95–167. MR7,468e.

———. 1946a. “L’anneau d’homologie d’une représentation.” *CRASc* 222:1366–1368. MR8,49d.

———. 1946b. “Propriétés de l’anneau d’homologie de la projection d’un espace fibré sur sa base.” *CRASc* 223:395–397. MR8,166b.

———. 1946c. “Structure de l’anneau d’homologie d’une représentation.” *CRASc* 222:1419–1422. MR8,49e.

———. 1946d. “Sur l’anneau d’homologie de l’espace homogène, quotient d’un groupe clos par un sousgroupe abélien, connexe, maximum.” *CRASc* 223:412–415. MR8,166c.

———. 1949. “L’homologie filtrée.” In *[Cartan et al. 1949]*, 61–82. MR11,677f.

———. 1950. “L’anneau spectral et l’anneau filtré d’homologie d’un espace localement compact et d’une application continue.” *J. Math. Pures Appl. (9)* 29:1–80, 81–139. MR12,272e.

Loewy, A. 1925. “Neue elementare Begründung und Erweiterung der Galoisschen Theorie.” *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematische und Naturwissenschaftliche Klasse*, no. 1925 Abh.7, 1928 Abh.1.

Longo, Giuseppe. 1988. “On Church’s formal theory of functions and functionals. The λ–calculus: connections to higher type recursion theory, proof theory, category theory.” *Annals of Pure and Applied Logic* 40:93–133. MR91h:03022.

———. 1997. “De la cognition à la géometrie. 2 - Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et Mathématiques . À partir du livre “Le sens du mouvement”, par A. Berthoz, Odile-Jacob, 1997.” *Intellectica* 25:hier zitiert nach `http://www.di.ens.fr/users/longo/download.html`.

Lubkin, Saul. 1960. “Imbedding of Abelian categories.” *TAMS* 97:410–417.

Lutz, Bernd, Hg. 1995. *Metzler Philosophenlexikon.* 2.Auflage. J.B.Metzler.

Lévi, Azriel. 1973. “the role of classes in set theory.” In *[und Lévy 1973]*, 119–153. Hier zitiert nach [Müller 1976] 173–215.

Mach, Ernst. 1883. *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt.* unveränderter Nachdruck der 9.Aufl. von 1933; Darmstadt 1963. Leipzig: Brockhaus.

Mac Lane, Saunders. 1950. “Duality for Groups.” *BAMS* 56:485–516. Oder in [Mac Lane 1979b, 337ff].

———. 1959 (1961). “Locally small categories and the Foundations of Set–theory.” In *[Bernays et al. 1961]*, 25–43.

———. 1963. “Natural Associativity and Commutativity.” *Rice University Studies* 49 [4]: 28–46. auch in [Mac Lane 1979b, 415ff].

———. 1965. “Categorical Algebra.” *BAMS* 71:40–106. MR30 #2053.

———. 1967. *Homology.* First. Volume 114 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Berlin: Springer-Verlag. MR50 #2285.

———. 1969. “One Universe as a Foundation for Category Theory.” *LNM* 106:192–200.

———. 1970. “Influence of M.H.Stone on the origins of category theory.” In *Functional analysis related fields. Conference Chicago 1968*, 228–241. Zbl.261.18001.

———. 1971a. “Categorical Algebra and set–theoretic foundations.” In *[Scott 1971]*, 231–240.

———. 1971b. *Categories for the working mathematician.* Volume 5 of *GTM.* Springer.

———. 1974. “Internal Logic in Topoi and other Categories.” *JSL* 39 [2]: 427–428.

———. 1976a. “Topology and Logic as a Source of Algebra.” *Bull.AMS* 82:1–40.

———. 1976b. “The work of Samuel Eilenberg in topology.” In *[Heller und Tierney 1976]*, 133–144. MR54 #2387; Zbl.338.55001

———. 1978. “Origins of the cohomology of groups.” *Enseign. Math.* (2) 24 [1–2]: 1–29. MR81j:01030.

———. 1979a. *J.Alg.* 60:119–120.

———. 1979b. *selected papers.* NY: Springer.

———. 1980. “The Genesis of Mathematical Structures, as exemplified in the Work of Charles Ehresmann.” *CTGD* 21:353–365.

———. 1981. “History of abstract algebra: Origin, Rise and Decline of a movement.” In *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics*, edited by J. Dalton Tarwater et al., Volume 13 of *Mathematical series of texas technical university*, 3–35. Lubbock/Texas. MR83m 01042.

———. 1986. *Mathematics: Form and Function.* NY: Springer.

———. 1988a. “Concepts and categories in perspective.” In *[Duren und Merzbach 1988]*, 323–365.

———. 1988b. “Group extensions for 45 Years.” *MI* 10 [2]: 29–35.

———. 1989. “The development of mathematical ideas by collision: the case of categories and topos theory.” In *Categorical topology and its relation to analysis, algebra and combinatorics (Prague, 1988)*, edited by Jiri Adamek und Saunders Mac Lane, 1–9. Teaneck, NJ: World Sci. Publishing. MR90m:18002; Zbl.854.18002

———. 1996a. “The development and prospects for category theory.” In *The European Colloquium of Category Theory Tours, 1994*, Volume 4 of *Appl. Categ. Structures*, 129–136. MR97e:18001.

———. 1996b. “Samuel Eilenberg’s work in category theory.” In *The European Colloquium of Category Theory (Tours, 1994)*, edited by René Damphousse, Pierre; Guitart, Volume 4 of *Applied Categorial Structures*, 137–138. Zbl.853.18001.

Manin, Yu. I. “Georg Cantor and his heritage.” Talk at the meeting of the DMV and the Cantor Medal award ceremony. Unpublished manuscript.

Markoff, A. 1945. “On free topological groups.” *Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR]* 9:3–64. MR7,7b.

Marquis, Jean Pierre. 1995. “Category theory and the foundations of mathematics: philosophical excavations.” *Synthese* 103:421–447.

———. 1997a. “Abstract Mathematical Tools and Machines in mathematics.” *Philosophia mathematica* 5:250–272.

———. 1997b. “Category theory and structuralism in mathematics: syntactical considerations.” In *[Agazzi und Darvas 1997]*, 123–136.

Massey, William S. 1999. “A history of cohomology theory.” In *[James 1999b]*, 579–603.

Mathias, A. R. D. 1992. “The Ignorance of Bourbaki.” *MI* 14 [3]: 4–13. 764.01009 K.

Mautner, F.I. 1946. “An Extension of Klein’s Erlanger Programm: Logic as Invariant Theory.” *AJM* 68:345–384.

Mayer, W. 1929a. “Über abstrakte Topologie.” *monatshefte* 36:1–42.

———. 1929b. “Über abstrakte Topologie.” *monatshefte* 36:219–258.

McLarty, Colin. 1990. “The uses and abuses of the history of topos theory.” *Br. J. Philos. Sci.* 41 [3]: 351–375. Zbl.709.18002; MR92b 01044

Mehrtens, Herbert. 1990. *Moderne Sprache Mathematik. Eine Geschichte des Streits um Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Meschkowski, Herbert. 1976. *Mathematisches Begriffswörterbuch.* Volume 99 of *Hochschultaschenbücher.* Darmstadt: BI.

Miller, Haynes. 2000. “Leray in Oflag XVIIA: the origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences.” In *[Kantor 2000]*, Gaz. Math. no. 84, suppl., 17–34. MR1 775 587.

Milnor, J. 1956. *AM* 63:272–284.

Milnor, John. 1957. "The geometric realization of a semi-simplicial complex." *AM (2)* 65:357–362. MR18,815d.

Mittelstraß, Jürgen, Hg. 1980. *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie.* Mannheim: BI.

Müller, Gerd H. 1975. "Set theory as a "frame" of mathematics." In *[Rose und Shepherdson 1975].*

———, Hg. 1976. *Sets and Classes. On the Work by Paul Bernays.* Volume 84 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Amsterdam: North–Holland.

———. 1981. "Framing mathematics." *Epistemologia* 4:253–286.

———. 1997. "Reflection in set theory. The Bernays-Levy axiom system." In *[Agazzi und Darvas 1997]*, 137–169.

Müller, Heinz. 1947. *Scharfe Fassung des Begriffes* faisceau *in einer gruppentheoretischen Arbeit Camille Jordan's.* Zürich: Dissertationsdruckerei AG. Gebr. Leemann & Co. Zbl.034.16302.

Mumford, David. 1965. *Geometric invariant theory.* Berlin: Springer-Verlag. MR35 #5451.

———. 1971. "Appendix to Chapter IV [The arithmetic genus and the generalized theorem of Riemann-Roch]." In *[Zariski 1935] 2nd edition*, 88–91.

Newman, M.H.A. 1926, 1927. "On the foundations of combinatory analysis situs." *Proc. Akademie von Wetenschappen Amsterdam* 29, 30:611–626, 627–641, 670–673.

Oberschelp, A. 1964. "Eigentliche Klassen als Urelemente in der Mengenlehre." *MA* 157:234–260.

———. 1983. *Klassenlogik.* BI.

Osius, G. 1976. "Eine Erweiterung der NGB–Mengenlehre als Grundlage der Kategorientheorie." *FM* 92:173–207.

Otte, Michael, Hg. 1974. *Mathematiker über die Mathematik.* Springer.

———. 1994. *Das Formale, das Soziale und das Subjektive. Eine Einführung in die Philosophie und die Didaktik der Mathematik.* Volume 1106 of *stw.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Peirce, Charles Sanders. 1931-1935. *Collected Papers (ed. Ch.Hartshorne/P.Weiss), 6 Bde.* 2nd ed. 1960. Cambridge MA: Belknap Press.

Perec, Georges. 1969. *La disparition.* Paris: Édition Denoël.

Poincaré, Henri. 1895. "Analysis situs." *Journal de l'École Polytechnique* 1:1–121.

———. 1905. *La Valeur de la Science.* Paris: Flammarion.

———. 1908. *Science et méthode.* Paris: Flammarion.

———. 1968. *Science et hypothèse.* Paris: Flammarion.

———. 2002. *L'Opportunisme scientifique.* Publications des Archives Henri-Poincaré. Edited by Laurent Rollet. Basel: Birkhäuser.

Pontrjagin, L. 1927. "Zum Alexanderschen Dualitätssatz. I, II." *Nachrichten Göttingen*, pp. 315–322, 446–456.

———. 1931. "Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze." *MA* 105:165–205.

———. 1934a. "The general topological theorem of duality for closed sets." *AM.*

———. 1934b. "Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de Hilbert." *CRASc* 198:238.

———. 1934c. "The theory of topological commutative groups." *AM.*

Pumplün, Dieter. 1999. *Elemente der Kategorientheorie.* Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Quine, Willard Van Orman. 1937. "New foundations for mathematical logic." *AMM.* Auch in [Quine 1953], 80–101.

———. 1948. "On what there is." *Review of Metaphysics.* hier zitiert nach [Quine 1953], 1–19.

———. 1953. *From a logical point of view. Nine logic-philosophical Essays.* Second revised edition 1980. Cambridge Massachusetts: Harvard University press.

———. 1958. *Mathematical Logic.* Second edition. Cambridge: Harvard University Press.

———. 1969. *Ontological Relativity and Other Essays.* NY: Columbia.

———. 1977. *Relativité de l'ontologie et (quelques) autres essais, traduit par J.Largeault.* Paris: Aubier-Montaigne. Französische Ausgabe von [Quine 1969].

Ritter, Joachim, Hg. ab 1971. *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Rose, M.E., und J.C. Shepherdson, Hg. 1975. *Logic Colloquium ´73, Proceedings of the Logic Colloquium in Bristol July 73.* Volume 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Amsterdam: North–Holland. MR51 #10015.

Saavedra Rivano, Neantro. 1972. *Catégories Tannakiennes.* Volume 265 of *LNM.* Berlin: Springer-Verlag. MR49 #2769.

Sacks, Gerald. 1975. "Remarks against foundational activity." *HM* 2 [4]: 523–528. MR58 #127.

Samuel, Pierre. 1948. "On universal mappings and free topological groups." *BAMS* 54:591–598.

Scholz, Erhard. 1979. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré (Diss).*

Schreier, Otto. 1926. “Über die Erweiterung von Gruppen I.” *Monatshefte* 34:165–180.

Scott, Dana S., Hg. 1971. *Axiomatic Set Theory. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the AMS held at the University of California 1967.* Volume XIII Part I of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.* AMS.

Segal, Graeme. 1968. “Classifying Spaces and spectral sequences.” *IHES Publ. Math.* 34:105–112. MR38 #718.

Seifert, H., und W. Threlfall. 1934. *Lehrbuch der Topologie.* Leipzig: Teubner.

Semadeni, Z., und A. Wiweger. 1979. *Einführung in die Theorie der Kategorien und Funktoren.* Leipzig: Teubner.

Senechal, Marjorie. 1998. “The continuing silence of Bourbaki—an Interview with Pierre Cartier, June 18, 1997.” *MI* 20 [1]: 22–28.

Serre, Jean-Pierre. 1950a. “Cohomologie des extensions de groupes.” *CRASc* 231:643–646. MR12,272f.

———. 1950b. “Homologie singulière des espaces fibrés. I. La suite spectrale.” *CRASc* 231:1408–1410. MR12,520b.

———. 1951. “Homologie singulière des espaces fibrés. Applications.” *AM (2)* 54:425–505. MR13,574g.

———. 1953a. “Cohomologie modulo 2 des complexes d’Eilenberg-MacLane.” *Comment. Math. Helv.* 27:198–232. MR15,643c.

———. 1953b. “Groupes d’homotopie et classes de groupes abéliens.” *AM (2)* 58:258–294. MR15,548c.

———. 1955. “Faisceaux algébriques cohérents.” *AM* 61:197–278. MR16,953.

———. 1955–1956. “Géométrie algébrique et géométrie analytique.” *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6:1–42. MR18,511a.

———. 1960. “Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil.” *AM (2)* 71:392–394. MR22 #3018.

———. 1989. “Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck.” *K-Theory* 3 [3]: 199–204. MR91b:01084.

Serre, Jean-Pierre, und G. P. Hochschild. 1953. “Cohomology of group extensions.” *TAMS* 74:110–134. MR050.02104.

Shafarevich, I. R. 1974. *Basic algebraic geometry. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 213.* New York: Springer-Verlag. MR51 #3163.

Shields, Allen. 1987. “Years ago.” *MI* 9 [1]: 6–7.

Siegel, Carl Ludwig. 1968. “Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß.” In *Zur Erinnerung an Edmund Landau (1877–1938). Festschrift*, 299–306. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Sonner, Johann. 1962. "On the formal definition of categories." *MZ* 80:163–176.

Spanier, Edwin H. 1966. *Algebraic Topology.* Volume 11 of *McGraw Hill series in higher mathematics.* McGraw Hill.

Steenrod, Norman E. 1936. "Universal homology groups." *AJM* 58:661–701.

———. 1940. "Regular cycles of compact metric spaces." *AM (2)* 41:833–851. MR2,73c.

———. 1943. "Homology with local coefficients." *AM (2)* 44:610–627. MR5,104f.

Stork, Heinrich. 1977. *Einführung in die Philosophie der Technik.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Tarski, Alfred. 1935. "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen." *Stud. Phil.*, vol. 1.

———. 1938. "Über unerreichbare Kardinalzahlen." *FM* 30:68–89.

———. 1939. "On Well–Ordered Subsets of any Set." *FM* 32:176–183.

Thiel, Christian. 1972. *Grundlagenkrise und Grundlagenstreit. Studie über das normative Fundament der Wissenschaften am Beispiel von Mathematik und Sozialwissenschaft.* Meisenheim am Glan: Verlag Anton Hain.

———. 1995. *Philosophie und Mathematik.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Tucker, A.W. 1933. "An abstract approach to manifolds." *AM.*

Turing, Alan Mathison. 1938. "The extensions of a group." *Compositio Math.* 5:357–367.

van der Waerden, Bartel Leendert. 1930. "Kombinatorische Topologie." *Jahresberichte DMV* 39:121–139.

———. 1930, 1931. *Moderne Algebra.* Berlin: Springer. JFM **56** 138 2 Bände.

Veblen, Oswald. 1923. "The intersection numbers." *TAMS* 25:540–550.

———. 1st ed. 1921, 2nd ed. 1931. *Analysis situs.* Volume 5 of *AMS Colloquium Publications.* AMS.

Veblen, Oswald, und J. H. C. Whitehead. 1931. "A set of axioms for differential geometry." *Proc. Nat. Acad. Sci.* 17:551–561.

Verdier, Jean-Louis. 1996 (1997?). *Des catégories dérivées des catégories abéliennes. With a preface by Luc Illusie. Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.* Volume 239 of *Astérisque.* MR98c:18007.

Vietoris, Ludwig. 1927. "Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen." *MA*, no. 97:454–472.

Volkert, Klaus Thomas. 1986. *Die Krise der Anschauung.* Volume 3 of *V&R–Studien.* Göttingen.

———. 2002. *Das Homöomorphismusproblem, insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935.* Volume Cahier spécial 4 of *Philosophia Scientiæ.*

Wang, Hao. 1971. "Logic, Computation and Philosophy." *L'âge de la science* 3:101–115. auch in: Computation, Logic, Philosophy. A collection of essays. Kluwer 1990 S.47-59 (die hier befolgte Pagination).

Washnitzer, G. 1959. "Geometric syzygies." *AJM* 81:171–248.

Weibel, Charles A. 1999. "History of homological algebra." In *[James 1999b]*, 797–836.

Weil, André. 1940. *L'intègration dans les groupes topologiques et ses applications.* Paris: Hermann. Vom Autor neu herausgegeben in Princeton, N. J., im Jahre 1941. MR3,198b.

———. 1946. *Foundations of Algebraic Geometry.* New York: AMS. MR9,303c.

———. 1948. *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent.* Paris: Hermann. 10,262c.

———. 1949. "Numbers of solutions of equations in finite fields." *BAMS* 55:497–508. MR10,592e.

———. 1952. "Number-theory and algebraic geometry." *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2.* Providence, R. I.: AMS, 90–100. MR13,579d.

———. 1956. "Abstract versus classical algebraic geometry." *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III.* Erven P. Noordhoff N.V., Groningen, 550–558. MR19,1078a.

———. 1962. *Foundations of algebraic geometry.* Erweiterte Neuausgabe von [Weil 1946]. MR26 #2439.

Weyl, Hermann. 1939. *The Classical Groups, Their Invariants and Representations.* Princeton: Princeton UP.

———. 1985. "Axiomatic Versus Constructive Procedures in Mathematics." *MI* 7 [4]: 10–17.

———. 1997. *Die Idee der Riemannschen Fläche.* Edited by Reinhold Remmert. Stuttgart: Teubner.

Whitney, Hassler. 1937. "The maps of an n-complex into an n-sphere." *Duke Math.J.* 3:51–55.

———. 1938. "Tensor Products of Abelian Groups." *Duke Math.J.* 4:495–528.

Wittgenstein, Ludwig. 1984a. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Werkausgabe Band 6. Volume 506 of *stw.* Edited by G.H. von Wright G.E.M.Anscombe, Rush Rees. Frankfurt am Main: suhrkamp.

———. 1984b. *Über Gewißheit.* Werkausgabe Band 8. Volume 508 of *stw.* Edited by G.E.M.Anscombe. Frankfurt am Main: suhrkamp.

———. 1984c. *Philosophische Untersuchungen*. Werkausgabe Band 1. Volume 501 of *stw*. Frankfurt am Main: suhrkamp.

Yoneda, N. 1954. “On the homology theory of modules.” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo - Sect. I, 7*, pp. 193–227.

Zariski, Oskar. 1935. *Algebraic Surfaces*. Volume III, Heft 5 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Berlin: Springer.

Zassenhaus, H. 1937. *Lehrbuch der Gruppentheorie*. Volume 21 of *Hamburger math. Einzelschriften*. Leipzig.