Beweis einiger ausgezeichneter Eigenschaften, welchen von ebenen Seitenflächen eingeschlossene Körper unterworfen sind[1]

So wie die geradlinigen Figuren, deren natürliche Beschaffenheit in der Geometrie untersucht zu werden pflegt, gewisse allgemeine und sehr bekannte Eigenschaften haben, zum Beispiel dass die Zahl der Winkel gleich ist der Zahl der Kanten und dass die Summe der Winkel gleich ist zweimal so vielen rechten Winkeln, wie es Kanten gibt, weniger vier, so habe ich neulich die Grundlagen der Stereometrie angedeutet, in welchen ähnliche Eigenschaften von ebenen Seitenflächen eingeschlossener Körper enthalten sind. Da nämlich in der Stereometrie diejenigen Körper, welche ringsum nur von ebenen Seitenflächen begrenzt werden, den ersten Platz ebenso verdient einnehmen wie die geradlinigen Figuren in der Planimetrie oder dem, was eigentlich als Geometrie bezeichnet wird, so kommt es in den Sinn, ähnliche Grundsätze der Stereometrie zu sichern, aus welchen die Bildung der Körper folgen würde und deren vorzügliche Eigenschaften bewiesen werden könnten. Bei dieser Beschäftigung erscheint es höchst verwunderlich, dass, da die Stereometrie schon seit ebenso vielen Jahrhunderten vervollkommnet wird wie die Geometrie, dennoch ihre Anfangsgründe bisher unbekannt waren und sich auch niemand in diesem so langen Zeitraum gefunden hat, der sie zu erforschen und auch in eine Ordnung zu bringen versucht hätte. Als ich jedoch diese Mühe unternommen habe, habe ich viele ausgezeichnete Eigenschaften entdeckt, die allen in ebenen Seitenflächen enthaltenen Körpern gemein sind, und die denen völlig ähnlich scheinen, welche zu den Grundlagen der Lehre von den ebenen geradlinigen Figuren gerechnet zu werden pflegen; nicht ohne höchste Bewunderung habe ich festgestellt, dass die vorzüglichen unter ihnen in solchem Masse verborgen sind, dass ich damals alle Mühe, ihren Beweis herauszufinden, vergebens aufgewandt habe. Und auch von Freunden, welchen ich jene Eigenschaften mitgeteilt hatte, und ansonsten in diesen Dingen höchst bewandert, ist mir keinerlei Licht angezündet worden, woraus ich diese erwünschten Beweise hätte entnehmen können. Durch Betrachtung mehrerer Arten von Körpern nämlich war ich dazu verführt, einzusehen, dass die Eigenschaften, die ich bei jenen aufgedeckt hatte, sich überhaupt auf alle Körper erstrecken, auch wenn mir nicht erlaubt war, dies durch einen strengen Beweis zu zeigen; und so schätzte ich, dass diese Eigenschaften zur Klasse der Wahrheiten zu zählen sind, welche uns durchaus zu erkennen, nicht jedoch zu beweisen zustünde.

[1] "Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt prædita" (Eneström 231), *Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ* 4 (1752/3), 1758, pp.14–17, 140-160.

Die allgemeinen Eigenschaften der Körper jedoch, welche bisher des Beweises ermangeln, hängen von einer ab, so dass, wenn es erlaubt wäre, diese zu beweisen, alle Grundlagen der Stereometrie, die ich herausgestellt habe, ebenso gefestigt wären wie die Grundlagen der Geometrie. Diese noch unbewiesene Eigenschaft allerdings, welche viele andere in sich einschließt, ist in dieser Aussage enthalten:

Bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper übersteigt die Zahl der Raumwinkel zusammen mit der Zahl der Seitenflächen die Zahl der Grate um zwei.

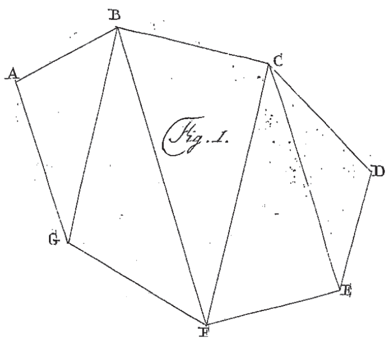
Hieraus habe ich eine andere nicht weniger ausgezeichnete, allen derartigen Körpern gemeine Eigenschaft abgeleitet, welche wie folgt lautet:

Bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper ist die Summe aller ebenen Winkel, aus welchen die Raumwinkel bestehen, gleich viermal so vielen rechten Winkeln, wie es Raumwinkel gibt, weniger acht.

Und diese Aussage hängt so mit der vorangegangenen zusammen, dass, wenn die eine bewiesen werden könnte, sogleich ein Beweis der anderen erhalten würde; weshalb der Mangel der Grundlagen der Stereometrie, den ich herausgestellt habe, behoben würde, wenn ein Beweis für irgendeine dieser beiden Aussagen gefunden würde.

Als ich jedoch dieses Argument von neuem geprüft habe, habe ich endlich die erwünschten Beweise dieser Aussagen errungen, und zwar habe ich diese fast in ähnlicher Weise erreicht, auf welche in der Geometrie die analoge Aussage über die Summe der Winkel jeder beliebigen geradlinigen Figur bewiesen zu werden pflegt. Wie nämlich in der Geometrie jedwede geradlinige Figur durch fortgesetztes Entfernen von Winkeln endlich auf ein Dreieck zurückgeführt wird, so habe ich festgestellt, dass, gegeben irgendein von ebenen Seitenflächen eingeschlossener Körper, von dort fortgesetzt Raumwinkel entfernt werden können, so dass endlich eine dreieckige Pyramide übrigbleibt; da diese unter den Körpern die einfachste Figur ist, habe ich erkannt, dass man, sind ihre Eigenschaften bekannt, auf diese Weise wiederum zu den Eigenschaften aller Körper hinaufsteigen kann. Bei der dreieckigen Pyramide ist nämlich die Zahl der Raumwinkel $= 4$, die Zahl der Seitenflächen $= 4$ und die Zahl der Grate $= 6$, das Doppelte wovon 12 die Zahl der ebenen Winkel ergibt, deren Summe 8 rechten Winkeln gleich ist.

Es werde nun irgendein Punkt innerhalb des Körpers angenommen; wenn von dort zu den einzelnen Raumwinkeln gezogene gerade Linien angenommen würden, würde der Körper auf diese Weise in ebenso viele Pyramiden geteilt, wie es Seitenflächen gibt, welche ja die einzelnen Basen der Pyramiden darstellen, während ihre Spitzen in jenem Punkt vereint sind. Und ferner werden diese Pyramiden, wenn sie nicht dreieckig sind, leicht in dreieckige aufgeschnitten. Es ist wahr, dass diese Art, beliebige Körper in dreieckige Pyramiden aufzulösen, für das gegenwärtige Vorhaben wenig nützt; also stelle ich hier eine andere Art vor, auf welche jeder beliebige Körper durch fortgesetztes Entfernen seiner Raumwinkel endlich auf die dreieckige Pyramide zurückgeführt wird, woraus anschließend der Beweis der denkwürdigen Aussagen leicht zusammengefügt wird.



Diese Operation ist aber derjenigen ähnlich, durch welche jede beliebige geradlinige Figur, wenn nur ihre Winkel nacheinander entfernt werden, endlich auf das Dreieck zurückgeführt zu werden pflegt. Wenn nämlich (Fig. 1) eine ebene Figur $ABCDEFGA$ gegeben ist mit irgend einer Anzahl von Kanten, wenn von ihr durch die Gerade[2] CE das Dreieck CDE entfernt wird, wird die Figur

$$ABCEFGA$$

übrigbleiben, deren Winkelzahl um eins kleiner ist. Wenn nun von neuem durch die Gerade CF das Dreieck CFE entfernt wird, so wird die Figur $ABCFGA$ übrigbleiben; weswegen, wenn ferner das Dreieck BCF, sodann das Dreieck BGF entfernt wird, wird endlich das Dreieck ABG übriggelassen.

Aus dieser Auflösung werden leicht die beiden vorzüglichen Eigenschaften der ebenen Figuren bewiesen: Sei nämlich die Zahl der Kanten der Figur[3] $ABCDEFG = L$ und die Zahl der Winkel $= A$; und wenn durch das Ziehen der Geraden CE der Winkel D entfernt wird, wird die Zahl der Winkel der übriggebliebenen Figur $= A - 1$ sein; die Zahl der Kanten jedoch, weil zwei Kanten, nämlich CD und DE, weggenommen wurden, an ihre Stelle jedoch eine neue Kante, nämlich CE, getreten ist, wird $= L - 1$ sein. Daraus geht hervor, dass, wenn von neuem ein Winkel entfernt wird, die Zahl der Winkel $= A - 2$ und die Zahl der Kanten $= L - 2$ sein wird; und wenn nun auf diese Weise n Winkel entfernt worden sind, wird die Zahl der Winkel der übriggebliebenen Figur $= A - n$ sein und die Zahl der Kanten $= L - n$. Sei nun diese übriggebliebene Figur ein Dreieck, dann wird $A - n = 3$ sein und $L - n = 3$; woraus folgt, dass $L = A$ ist, oder anders gesagt, dass in jeder beliebigen geradlinigen Figur die Zahl der Kanten gleich der Zahl der Winkel ist.

Sei ferner R die Zahl der rechten Winkel, welchen alle Winkel der gegebenen Figur $ABCDEFG$ zusammengenommen gleich sind; wenn aber der Winkel D beziehungsweise das Dreieck CDE entfernt worden ist, werden von den Winkeln der Figur die drei Winkel des Dreiecks CDE weggenommen, und da diese gleich zwei Rechten sind, wird die Summe der Winkel der übriggebliebenen Figur $ABCEFG$ gleich $R - 2$ rechten Winkeln sein, bei einer Zahl von nun $A - 1$ Winkeln. Wenn erneut ein Winkel entfernt wird, so dass die Zahl der Winkel $= A - 2$ ist, wird ihre Summe $= R - 4$ Rechte sein; und wenn wir nun n Winkel abtrennten, so dass die Zahl der Winkel der übriggebliebenen Figur $= A - n$ wäre, so würde ihre Summe gleich $R - 2n$ rechten Winkeln sein. Sei nun diese übriggebliebene Figur ein Dreieck, beziehungsweise $A - n = 3$; da die Summe der Winkel $= 2$ Rechte ist, ist $R - 2n = 2$; allerdings ist dann auch $2A - 2n = 6$; wenn von dieser jene Gleichung abgezogen wird, hat man $2A - R = 4$ oder

[2] *rectam.* Inhaltlich wäre eher “Strecke” zu übersetzen.

[3] Gemeint ist $ABCDEFGA$ nach der bisherigen Bezeichnungsweise.

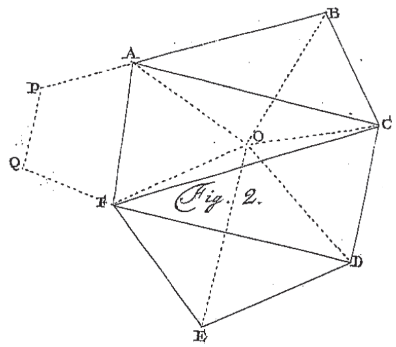
$R = 2A - 4 = 2L - 4$; und so steht fest, dass bei jedem beliebigen Vieleck die Summe aller Winkel gleich ist zweimal so vielen Rechten, wie es Kanten gibt, weniger vier.

Eine Untersuchung also in einer Weise ähnlich der, auf welche ich aus einem solchen Zerschneiden der geradlinigen Figuren zwei hervorragende Eigenschaften derartiger Figuren hervorgelockt habe, habe ich mir für die Körper vorgenommen, bis dass ich alle von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper durch fortgesetztes Entfernen der Raumwinkel endlich auf die dreieckigen Pyramiden zurückgeführt hätte; denn wenn ich dies erreicht hätte, wären die Zahl der Raumwinkel, die Zahl der Seitenflächen, die Zahl der Grate und die Summe der ebenen Winkel allesamt bekannt. Damit dies klarer werden möge, will ich die ganze Sache in den folgenden Aussagen zusammenfassen.

Proposition 1. Problem

1. *Gegeben irgendeinen von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper, einen gegebenen Raumwinkel so entfernen, dass bei dem übrigbleibenden Körper die Zahl der Raumwinkel um eins kleiner ist.*

Lösung



Sei O (Fig. 2) der auszumerzende Raumwinkel, in welchem die Grate AO, BO, CO, DO, EO, FO zusammenlaufen, so dass er gebildet wird aus den ebenen Winkeln AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA, und die Punkte A, B, C, D, E, F mögen die benachbarten Raumwinkel des Körpers darstellen, die mit dem Winkel O zusammenhängen durch die Geraden AO, BO, CO, DO, EO, FO. Da nun auf solche Weise ein Teil von dem Körper abgetrennt werden muss, dass der Winkel O ganz und gar entfernt wird, die restlichen jedoch allesamt übrigbleiben, und dennoch kein neuer Raumwinkel ausgebildet werde, werde ein erster Schnitt vorgenommen durch irgendeinen benachbarten Winkel B, entlang der Ebene ABC, bis dass er sich zu den Winkeln A und C erstreckt; dann werde aus O der Schnitt AOC durchgeführt; durch diese Verabredung wird von dem Körper die dreieckige Pyramide $OABC$ abgeschnitten. Dann, das Messer bei AC angesetzt, werde ein Schnitt geführt zum Winkel F entlang der Ebene AFC, und aus O ein weiterer Schnitt FOC, so dass die dreieckige Pyramide $OADF$ abgetrennt wird. Ferner werde der Körper entlang der Ebene CDF aufgeschnitten, und es werde aus O ein weiterer Schnitt bis zu DF vorgenommen, so dass auf diese Weise die dreieckige Pyramide $OCDF$ entfernt wird. Endlich wird ein Schnitt entlang DEF die dreieckige Pyramide $ODEF$

wegschneiden, und so wird der Raumwinkel O gänzlich ausgemerzt, und weil die restlichen Raumwinkel verbleiben und kein neuer durch die vorgenommenen Schnitte gebildet worden ist, wird die Zahl der Raumwinkel des übriggebliebenen Körpers um eins verringert sein. W. z. b. w.

Korollar 1

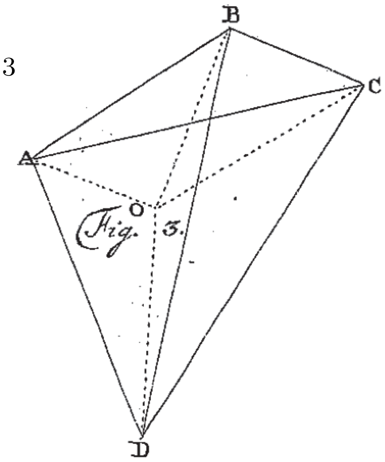
2. Wenn der Körper selbst eine dreieckige Pyramide gewesen wäre, wäre er durch einen derartigen Schnitt ganz entfernt worden, so dass nichts übrigbliebe. Weil wir allerdings diesen Schnitt deswegen einführen, dass wir den Körper endlich auf die dreieckige Pyramide zurückführten, wäre der Schnitt, wenn der Körper schon in dieser Weise eine Pyramide wäre, überhaupt nicht der Mühe wert.

Korollar 2

3. Wenn der Raumwinkel O, der vom Körper abgeschnitten werden soll, nur von drei ebenen Winkeln gebildet würde beziehungsweise wenn nur drei Grate in ihm zusammenliefen, dann würde er durch einen einzigen Schnitt vom Körper abgetrennt, und es würde auf diese Weise eine einzige dreieckige Pyramide entfernt.

Korollar 3

4. Wenn der Raumwinkel O von vier ebenen Winkeln gebildet würde und ebenso viel Grate in ihm zusammenliefen, dann müssten, um ihn auszumerzen, zwei dreieckige Pyramiden entfernt werden. Dies kann jedoch auf zweierlei Art geschehen (Fig. 3); denn die zwei wegzuschneidenden Pyramiden sind entweder $OABC$ und $OACD$ oder $OABD$ und $OBCD$. Und wenn die Punkte A, B, C, D nicht in derselben Ebene liegen, würde der übriggebliebene Körper ein jeweils verschiedenes Aussehen annehmen.



Korollar 4

5. Wenn der Raumwinkel von fünf ebenen Winkeln gebildet würde und die in ihm zusammenlaufenden Geraden sich zu fünf anderen Raumwinkeln erstreckten, dann würde der Winkel O durch das Abtrennen von drei dreieckigen Pyramiden weggeschnitten, und dies könnte auf fünf verschiedene Weisen geschehen, die durchaus verschiedenes übrigliessen, es sei denn, die fünf benachbarten Raumwinkel wären in derselben Ebene gelegen.

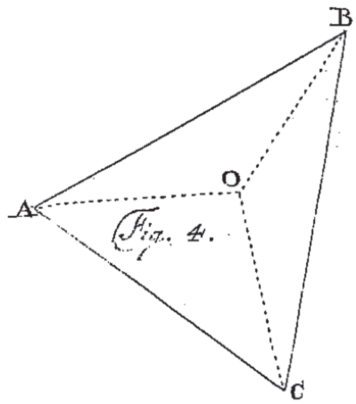
Korollar 5

6. Da also dieses Wegschneiden eines Raumwinkels bei jedem beliebigen Raumwinkel des gegebenen Körpers verrichtet werden kann und, wenn nicht nur drei ebene Winkel zur Bildung des Raumwinkels zusammenlaufen, auf verschiedene Weise vorgenommen werden kann, ist offensichtlich, dass jeder beliebige Körper, wenn er nicht schon eine dreieckige Pyramide ist, auf mehrere Weisen um einen Raumwinkel vermindert werden kann.

Korollar 6

7. Wie viele Raumwinkel also ein gegebener Körper auch haben möge, wird deren Zahl auf diese Weise stetig um eins verringert, bis er endlich, wenn nur noch vier Raumwinkel übriggeblieben sind, auf die dreieckige Pyramide zurückgeführt sein wird, und weil ja die abgeschnittenen Teile einzig dreieckige Pyramiden sind, wird auf diese Weise der ganze Körper in dreieckige Pyramiden aufgeschnitten.

Scholion



8. Wenn die Zahl der Raumwinkel des gegebenen Körpers $= S$ ist, wird, nachdem einer von ihnen auf die angegebene Weise weggeschnitten worden ist, die Zahl der Raumwinkel des übriggebliebenen Körpers $= S - 1$ sein. Damit die Gültigkeit der Proposition in dieser Verminderung fortgesetzt wird, scheint diese die Ausnahme mehrerer Fälle zu verlangen; wenn nämlich der gegebene Körper die dreieckige Pyramide wäre (Fig. 4), würde, ein Winkel weggeschnitten, sogleich die ganze Pyramide entfernt, so dass nichts übrigbleibt. Wenn nämlich ein Schnitt entlang der Ebene ABC vorgenommen wird, welche die Basis der Pyramide $OABC$ bildet, wird sogleich die ganze Pyramide weggeschnitten. Allerdings kann in diesem Fall die

Sache so aufgefasst werden, als wenn die Basis ABC übrigbliebe, welche, auch wenn sie eine ebene mit keinerlei Dicke ausgestattete Figur ist, dennoch als ein aus nur drei Winkeln bestehender Körper angesehen werden kann, welcher als zwei Seitenflächen und drei Grate habend zu denken ist; es werde hier nämlich auf ein dreieckiges Prisma von verschwindender Höhe verwiesen, bei welchem die seitlichen Seitenflächen[4] in nichts aufgehen und die obere Basis mit ihren Winkeln in die untere Basis eingeht. Auf diese Weise jedoch bleiben die beiden oben erwähnten Eigenschaften der Körper erhalten; weil nämlich die Zahl der Raumwinkel in diesem Fall $S = 3$ ist, die Zahl der Seitenflächen $H = 2$ und die Zahl der Grate $A = 3$, ist offenbar $S + H = A + 2$. Dann allerdings ist die Summe der in beiden Seitenflächen enthaltenen ebenen Winkel gleich 4 rechten Winkeln, welche Zahl $= 4S-8$ ist. Dasselbe kommt bei allen Pyramiden heraus; wenn der Spitzenwinkel[5] O von dort abgetrennt wird, wo die ganze Pyramide zugleich entfernt wird, dann ist allerdings einzig die Basis als übriggeblieben aufzufassen, welche, wenn sie ein Vieleck mit n Kanten ist, wird aufgefasst werden können als ein Körper, bei dem die Zahl der Raumwinkel $S = n$ sei, die Zahl der Seitenflächen $H = 2$ und die Zahl der Grate $A = n$, so dass von neuem $S + H = A + 2$ ist. Ferner, da beide Seitenflächen Vielecke mit n Kanten sind, werden alle Winkel, die in beiden enthalten sind, gleich sein $4n - 8 = 4S - 8$ rechten Winkeln, wie es der zweite Satz verlangt. Und wenn auch diese Fälle der Wahrheit nicht entgegenstehen, ist es dennoch bei dem gegenwärtigen Unternehmen nicht notwendig, die Aufmerksamkeit auf sie zu richten; da wir uns nämlich vorgenommen haben, alle Körper auf die dreieckigen Pyramiden zurückzuführen, können wir uns, wenn der Körper schon eine derartige Pyramide sein sollte, das Abschneiden irgendeines Winkels völlig ersparen;[6] wenn er aber eine Pyramide mit mehrseitiger Basis wäre, dann ziemte es sich, nicht den senkrechten Winkel, sondern irgendeinen der auf der Basis gelegenen Winkel von dort abzuschneiden, der nur aus drei ebenen Winkeln gebildet ist; auf diese Weise wird nach dem Abschneiden immer eine Pyramide übrigbleiben, deren Zahl der Raumwinkel um eins kleiner ist als zuvor. Und welcher Körper im allgemeinen auch gegeben sei, so ziemte es sich immer, dass das Abschneiden begonnen werde mit dem Raumwinkel, der aus möglichst wenigen ebenen Winkeln gebildet ist, so dass immer ein gewisser Teil des Körpers verbleiben wird, bis dass man zur dreieckigen Pyramide gelange. Inzwischen hängt jedoch die Gültigkeit der folgenden Beweise nicht von dieser Einschränkung ab, welche ich freilich nur zu dem Zweck angefügt habe, dass der Schaden, dass etwas als nicht wahr erscheint, vermieden werde.

---

[4] *hedræ laterales.* Eine Schwäche der Übersetzung *hedra* = Seitenfläche. Hier wird der Mantel eines Prismas seiner oberen und unteren Basis gegenübergestellt.

[5] *angulus verticalis.* Gemeint ist der der Basis gegenüberliegende Raumwinkel, die Spitze der Pyramide.

[6] Dies scheint gemeint zu sein, wenngleich der Casus bei *resectione* nicht zu *supersedendum* passt.

Proposition 2. Problem

9. *Wenn von einem gegebenen Körper ein beliebiger Raumwinkel auf die zuvor beschriebene Weise entfernt wird und so die Zahl der Raumwinkel um eins verringert wird, im übriggelassenen Körper sowohl die Zahl der Seitenflächen als auch die Zahl der Grate, und ebenso die Summe aller ebenen Winkel bestimmen.*

Lösung

Sei für den gegebenen Körper die Zahl der Raumwinkel $= S$, die Zahl der Seitenflächen $= H$, die Zahl der Grate $= A$, und sei die Summe aller ebenen Winkel gleich R rechten Winkeln. Sei nun O (Fig. 2) der wegzuschneidende Raumwinkel, so, dass, wenn er weggeschnitten ist, die künftige Zahl der Raumwinkel bei dem übriggebliebenen Körper $= S - 1$ sei; dass wir aber die übrigen Beschaffenheiten des verbleibenden Körpers kennenlernten, mögen wir zunächst die Summe der ebenen Winkel betrachten, welche wir bei dem ganzen Körper $= R$ rechten Winkeln setzen. Zunächst aber verlassen durch das Wegschneiden des Winkels O alle in den Dreiecken AOB, BOC, COD, DOE, EOF und FOA enthaltenen Winkel die Aufrechnung der ebenen Winkel, da ja diese Dreiecke von der Oberfläche des Körpers abgetrennt werden. Sei n die Zahl dieser Dreiecke beziehungsweise der benachbarten Winkel A, B, C, D etc.; dann ist die Summe der weggenommenen Winkel $= 2n$ rechten Winkeln. Sind aber diese Dreiecke weggenommen, so wird an deren Stelle die Oberfläche des Körpers schon von den Dreiecken ABC, ACF, CFD und DEF begrenzt werden, deren Zahl um zwei kleiner ist als jene[7] und deswegen $= n - 2$. Da nun die Winkel dieser Dreiecke hinzukommen und ihre Summe $= 2n - 4$ rechten Winkeln ist, steht fest, dass durch das Wegschneiden des Raumwinkels O die Summe der ebenen Winkel R zuerst um $2n$ rechte Winkel verringert, dann aber wiederum um $2n - 4$ rechte Winkel erhöht wird, woraus sich eine Verringerung um 4 rechte Winkel ergibt. Daher wird bei dem übrigbleibenden Körper die Summe aller ebenen Winkel gleich $R - 4$ Rechten sein, und so wird durch das Wegschneiden jedwedes Raumwinkels die Summe aller ebenen Winkel um vier rechte Winkel verringert.

Wenn alle in O zusammenlaufenden Seitenflächen Dreiecke wären, würden all diese Seitenflächen durch das Wegschneiden des Winkels O entfernt; wenn deren Zahl n genannt würde, würde sich daher die Zahl der Seitenflächen H um die Zahl n verringern; aber anstelle dieser Seitenflächen werden neu aus dem Schnitt entstandene dreieckige Seitenflächen auf der Oberfläche des Körpers erscheinen, nämlich ABC, ACF, CFD, DFE, deren Zahl $= n - 2$ ist; daher wird die Zahl der Seitenflächen, die vorher H war, nun

$$H - n + (n - 2) = H - 2$$

sein. Wenn sich allerdings herausstellte, dass zwei oder mehr dieser Dreiecke in derselben Ebene gelegen wären, wie wenn die Dreiecke ABC und ACF in derselben Ebene gebildet sind, dann sind jene als nicht zwei, sondern eine einzige

[7] Dies ist im allgemeinen Fall beweisbedürftig; Euler geht im Scholion des §15 darauf ein.

viereckige Seitenfläche vorstellend einzuschätzen, so dass die künftige Zahl der Seitenflächen $= H-3$ wäre; und wenn es μ Male auftritt, dass zwei Seitenflächen derart in dieselbe Ebene fallen, wäre die Zahl der Seitenflächen $= H - 2 - \mu$. Wenn aber nicht alle der in O zusammenlaufenden Seitenflächen Dreiecke wären, sondern eine, etwa $AOFQP$, mehr als drei Kanten hätte, steht fest, dass durch das Wegschneiden des Dreiecks AOF nicht die gesamte Seitenfläche entfernt wird, sondern der verbliebene Teil $AFQP$ nun auch in die Zählung der Seitenflächen eingeht; so wäre die Zahl der Seitenflächen $= H - 2 - \mu + 1$; und wenn unter den in O zusammenlaufenden Seitenflächen ν nicht dreieckige Seitenflächen gefunden würden, wäre die Zahl der übriggebliebenen Seitenflächen $= H - 2 - \mu + \nu$. Zur Ermittelung der Zahl der Grate, die nach dem Wegschneiden des Winkels O übrigbleiben werden, setzen wir zuerst, wie zuvor, dass alle in O zusammenlaufenden Seitenflächen Dreiecke sind; dann aber fallen aus der Zahl der Grate zunächst gewiss die Grate OA, OB, OC, OD etc. weg, deren Zahl $= n$ ist, an ihrer Stelle allerdings kommen neu hinzu die Grate AC, CF, FD, deren Zahl $= n - 3$ ist, so dass die Zahl der Grate

$$= A - n + (n - 3) = A - 3$$

sein wird, wenn nämlich die neuen Seitenflächen ABC, ACF etc. gegeneinander geneigt wären. Wenn aber ihrer zwei, ABC und ACF, in derselben Ebene gelegen wären, so dass sie als eine einzige Seitenfläche bildend einzuschätzen sind, verschwände der Grat AC, und die Zahl der Grate wäre $A - 3 - 1$; und wenn es μ Male auftritt, dass zwei Seitenflächen derart in dieselbe Ebene fallen, wie wir zuvor gesetzt haben, so wäre die Zahl der Grate $= A - 3 - \mu$. Wenn ferner irgendeine der den Winkel O bildenden Seitenflächen nicht dreieckig wäre, nämlich die Seitenfläche $AOFQP$, dann geht aus dem Wegschneiden des Dreiecks AOF ein neuer Grat AF hervor, welcher zuvor nicht vorhanden war, weswegen in diesem Fall die Zahl der Grate um eins erhöht werden wird. Und wenn, wie wir zuvor gesetzt haben, unter den in O zusammenlaufenden Seitenflächen ν nicht dreieckige Seitenflächen gefunden würden, wäre die Zahl der Grate bei dem gegebenen Körper nach Wegschneiden des Winkels O gleich $A - 3 - \mu + \nu$, während sie vorher $= A$ war. W. z. f. w.

Korollar 1

10. Wenn nun also ein von ebenen Seitenflächen eingeschlossener Körper um einen Raumwinkel gestutzt würde, so dass die Zahl der Raumwinkel dann $= S - 1$ wäre, während sie zuvor $= S$ war, würde die Summe aller ebenen Winkel um vier rechte Winkel vermindert, beziehungsweise, während sie zuvor $= R$ rechten Winkeln war, wäre sie nun $= R - 4$ rechten Winkeln.

Korollar 2

11. Da die Zahl der Seitenflächen, die zuvor $= H$ war, nun nach dem Weghauen des Winkels O gleich $H - 2 - \mu + \nu$ ist, ist es offensichtlich, dass es

geschehen kann, dass eine größere Zahl von Seitenflächen hervorgeht, was geschieht, wenn $\nu > 2 + \mu$ ist, wo μ und ν diejenigen Werte erhalten, welche in der Lösung angegeben sind.

Korollar 3

12. Dasselbe kann offensichtlich bei der Zahl der Grate vorkommen, welche, während sie vor der Stutzung des Winkels O gleich A war, nun $= A - 3 - \mu + \nu$ gefunden wird; welche Zahl größer ist als jene, wenn $\nu > 3 + \mu$; in diesem Fall wird also erst recht die Zahl der Seitenflächen erhöht.

Korollar 4

13. Da in den Ausdrücken $H - 2 - \mu + \nu$ und $A - 3 - \mu + \nu$ die Buchstaben μ und ν jeweils dasselbe bezeichnen, ist offensichtlich die Abnahme der Zahl der Grate A um eins größer als die Abnahme der Zahl der Seitenflächen.[8] Wenn also die Zahl der Seitenflächen nach dem Weghauen eines Raumwinkels $= H - \alpha$ wäre, so wäre die Zahl der Grate $= A - \alpha - 1$.

Korollar 5

14. Daher ist also die Differenz der Zahl der Seitenflächen und der Zahl der Grate, welche anfangs $= A - H$ war[9], nun nach der Entfernung eines Raumwinkels $= A - H - 1$. Diese Differenz wird immer um eins kleiner sein, wie auch immer der Körper betreffend das Verhältnis der Buchstaben μ und ν beschaffen sei.

Scholion

15. Hieraus ist es nun auf das leichteste möglich, Beweise der oben angegebenen Sätze herzurichten, die in keinerlei Hinsicht den in der Geometrie üblichen Beweisen unterlegen sind, außer dass hier wegen der Naturbeschaffenheit der Körper mehr dem Vorstellungsvermögen zu schulden ist, weil ja die Körper auf die Ebene abgebildet werden; aber wenn auf diese Weise räumliche Figuren hergestellt würden, würde alles ebenso klar werden.[10] Ferner steht, was ich bei der

[8] Hierbei kann es sich durchaus, wie in den beiden vorangehenden Korollaren dargelegt, um negative „Abnahmen“ handeln, wo dann die erste um eins kleiner als die zweite ist.

[9] Euler hat im Korollar 2 zu Proposition 2 von E230 gezeigt, dass stets $A > H$ ist; daher ist $A - H$ der korrekte Ausdruck für die besagte Differenz.

[10] Man beachte, dass es hier keineswegs etwa darum geht, durch die Verwendung von Figuren und den Appell an das räumliche Vorstellungsvermögen würden geometrische Beweise grundsätzlich eines Teils ihrer Strenge beraubt; vielmehr spricht Euler lediglich davon, dass räumliche Verhältnisse in ebener Darstellung immer nur unvollkommen wiedergegeben werden können, und ersinnt sogar eine Abhilfe, nämlich die Konstruktion räumlicher Figuren oder Modelle, die dann vollgültig die Rolle der ebenen Figuren in der ebenen Geometrie (die Euler diesen nicht streitig macht) spielen könnten.

Lösung dieses Problems als gültig angenommen habe, aus sich heraus fest; wenn nämlich ein Vieleck $ABCDEF$ gegeben wäre, von n Kanten begrenzt, so wird dem, der ein wenig seine Aufmerksamkeit darauf richtet, bald offenbar sein, dass, wenn die Figur durch das Ziehen von Diagonalen in Dreiecke aufgeschnitten würde, die Zahl dieser Dreiecke $= n - 2$ wäre und die Zahl der auf diese Weise gezogenen Diagonalen $= n-3$; ein Viereck wird nämlich von einer Diagonalen in zwei Dreiecke, ein Fünfeck durch zwei Diagonalen in drei Dreiecke und ein Sechseck durch drei Diagonalen in vier Dreiecke geschnitten und so weiter.

Proposition 3. Satz

16. *Bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper ist die Summe aller ebenen Winkel, die auf seinen Seitenflächen vorhanden sind, gleich viermal so vielen rechten Winkeln, wie es Raumwinkel gibt, weniger acht; beziehungsweise wenn die Zahl der Raumwinkel* $= S$ *ist, so ist die Summe aller ebenen Winkel gleich* $4S - 8$ *rechten Winkeln.*

Beweis

Sei bei einem beliebigen Körper die Zahl der Raumwinkel $= S$, die Summe aller ebenen Winkel jedoch sei gleich R rechten Winkeln, so dass zu zeigen ist, dass $R = 4S - 8$ ist. Es werde nun auf die zuvor beschriebene Weise von dem Körper ein Raumwinkel abgeschnitten, so dass die Zahl der Raumwinkel, welche er behalten wird, $= S-1$ ist, und die Summe der ebenen Winkel $= R-4$ rechten Winkeln ist. Wenn von neuem ein Raumwinkel abgeschnitten würde, so dass die Zahl der restlichen $= S - 2$ wäre, wäre die Summe der ebenen Winkel $= R - 8$, und so fortfahrend wird offenbar sein, dass für jedwede Zahl von Raumwinkeln sich die Summe aller ebenen Winkel verhält wie in der folgenden Tabelle angegeben.

Zahl der Raumwinkel	Summe aller ebenen Winkel
S	R rechte Winkel
$S-1$	$R-\ \ 4$
$S-2$	$R-\ \ 8$
$S-3$	$R-12$
$\vdots$	$\vdots$
$S-n$	$R-4n$

Da wir also durch dieses fortgesetzte Stutzen zu $S-n$ Raumwinkeln gelangen werden, wird die Summe aller ebenen Winkel $= R - 4n$ rechten Winkeln sein. Aber auf diese Weise kommen wir schließlich auf 4 Raumwinkel, in welchem Fall der Körper in der dreieckigen Pyramide aufgehen wird, bei welcher feststeht, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich 8 rechten Winkeln ist: das heisst, wenn $S - n = 4$ ist, so auch $R - 4n = 8$ oder $R = 4n + 8$. Aber daher ist auch $n = S - 4$, und wenn man diesen Wert hier einsetzt, so ist

$$R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8,$$

so dass bei jedwedem Körper die Summe der ebenen Winkel gleich ist viermal so vielen rechten Winkeln, wie es Raumwinkel gibt, weniger acht. W. z. b. w.

Scholion

17. Obwohl der zweite Satz so von diesem abhängt, dass, wenn dieser bewiesen worden ist, zugleich die Wahrheit jenes unumstößlich dargetan ist, kann dennoch auch der Beweis des zweiten Satzes aus dem vorausgeschickten Problem auf folgende Weise hergestellt werden.

Proposition 4. Satz

18. *Bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper übersteigt die Zahl der Seitenflächen zusammen mit der Zahl der Raumwinkel die Zahl der Grate um zwei.*

Beweis

Sei bei einem beliebig gegebenen Körper:

$$\begin{array}{ll} \text{die Zahl der Raumwinkel} & = S \ , \\ \text{die Zahl der Seitenflächen} & = H \ , \\ \text{die Zahl der Grate} & = A \ ; \end{array}$$

aber wie wir zuvor gesehen haben, wenn die Zahl S durch Entfernen eines Raumwinkels um eins vermindert wird, so dass sie $S - 1$ sei, dann wird die Differenz der Zahl der Grate und der Zahl der Seitenflächen künftig $= A - H - 1$ sein. Wird dieses Stutzen also fortgesetzt, so gilt:

Wenn die Zahl der Raumwinkel ist	so wird die Zahl der Grate die Zahl der Seitenflächen überschreiten um
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
$S - 3$	$A - H - 3$
$\vdots$	$\vdots$
$S - n$	$A - H - n$

Wenn man also auf diese Weise bis zur dreieckigen Pyramide gelangen würde, bei welcher die Zahl der Raumwinkel $= 4$ ist, die Zahl der Seitenflächen $= 4$ und die Zahl der Grate $= 6$, so dass die Zahl der Grate die Zahl der Seitenflächen künftig um 2 überschreiten würde, ist es offensichtlich, dass, wenn $S - n = 4$ ist, $A - H - n = 2$ ist. Daher ist also sowohl $n = S - 4$ als allerdings auch $n = A - H - 2$; und so erhalten wir

$$S - 4 = A - H - 2 \quad \text{beziehungsweise} \quad H + S = A + 2;$$

weswegen feststeht, dass bei jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körper die Zahl der Seitenflächen zusammen mit der Zahl der Raumwinkel die Zahl der Grate um zwei übersteigt. W. z. b. w.

Scholion

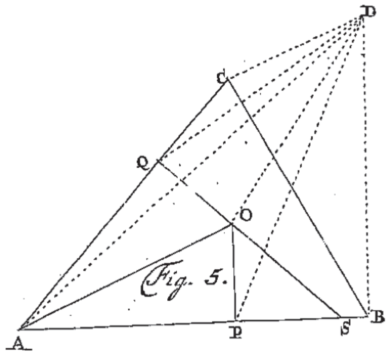
19. Diese Sätze also bewiesen, sind die Grundlagen der Stereometrie, welche ich vor einiger Zeit erklärt habe, mit zuverlässigsten Beweisen versehen, so dass sie den Grundlagen der Geometrie in überhaupt nichts nachstehen. Ich gebe allerdings zu, auf diese Weise nur die ersten Grundlagen der Stereometrie bekannt gemacht zu haben, auf welche diese noch höher zu vervollkommnende Wissenschaft aufgebaut werden müsste, welche ja eine große Zahl glänzender Beschaffenheiten der Körper beinhaltet, welche uns bislang völlig unbekannt sind. Da jedoch der Rauminhalt[11] irgendeines gegebenen Körpers gesucht zu werden pflegt, liefere ich als Schlussschnörkel, wie der Rauminhalt einer jedweden dreieckigen Pyramide zu finden ist; da nämlich, irgend ein Punkt im Inneren eines von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Körpers angenommen, ein Körper in ebenso viele Pyramiden aufgelöst wird, wie er Seitenflächen hat, wobei eine beliebige Seitenfläche die Basis einer Pyramide bildet, jedwede Pyramide jedoch, deren Basis nicht dreieckig ist, leicht in dreieckige Pyramiden aufgelöst werden kann, genügt es, den Rauminhalt einer dreieckigen Pyramide zu finden. Da dieser erhalten wird, wenn die Basis mit dem dritten Teil der Höhe multipliziert wird, will ich eröffnen, auf welche Weise, wenn die Kanten der Pyramide gegeben wären, aus diesen der Rauminhalt bestimmt werden könnte, gleich wie die Fläche eines Dreiecks aus den drei gegebenen Kanten bestimmt zu werden pflegt.

Proposition 5. Problem

20. *Gegeben sechs Kanten oder die Grate einer dreieckigen Pyramide, deren Rauminhalt bestimmen.*

[11] *soliditas.*

Sei (Fig. 5) $ABCD$ eine dreieckige Pyramide, deren Basis das Dreieck ABC und deren Spitze D; und mögen ihre Kanten $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$ gesetzt werden. Nun mögen auf den Seitenflächen ADB und ADC von D aus zu den gegenüberliegenden Basen[12] die Senkrechten DP und DQ abgetragen werden, und auf der Basis ABC mögen aus den Punkten P und Q zu den Kanten AB und AC die Normalen PO und QO gezogen werden; diese schneiden sich in O, und die Gerade DO aus der Spitze D wird senkrecht auf der Basis ABC stehen[13];



deswegen ist der Rauminhalt der Pyramide $= \frac{1}{3}DO \times$ die Fläche von ABC; aber wenn AO gezogen ist, ist

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{AD^2 - AP^2 - PO^2}.$$

Nun steht aus den Grundlagen der Geometrie fest, dass

$$AP = \frac{aa + dd - ee}{2a} \quad \text{und} \quad AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}.$$

Wird daher QO bis S gezogen, so ist, wenn der Winkel BAC α genannt wird,

$$QS = AQ \tan\alpha \quad \text{und} \quad AS = \frac{AQ}{\cos\alpha},$$

daher

$$PS = \frac{AQ}{\cos\alpha} - AP.$$

Da aber $QS : AQ : AS = PS : PO : OS$ ist, ist

$$PO = \frac{AQ \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\tan\alpha} = \frac{AQ}{\sin\alpha} - \frac{AP}{\tan\alpha}, \quad \text{bzw.} \quad PO = \frac{AQ - AP\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

dann allerdings

$$OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{\sin\alpha} = \frac{AQ}{\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{AP}{\sin\alpha}$$

und deswegen

$$QO = QS - OS = AQ\tan\alpha - \frac{AQ}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{AP - AQ\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

[12] nämlich der Dreiecke.
[13] Dies scheint beweisbedürftig.

Daher ist

$$AO^2 = AP^2 + PO^2 = \frac{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

und deswegen

$$DO^2 = \frac{AD^2 \sin^2\alpha - AP^2 - AQ^2 + 2AP \cdot AQ \cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Allerdings ist die Fläche des Dreiecks $ABC = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, weshalb der Rauminhalt der Pyramide

$$\frac{1}{6}ab\sqrt{AD^2\sin^2\alpha - AP^2 - AQ^2 + 2AP \cdot AQ\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\begin{pmatrix} aabbdd\sin^2\alpha - \frac{1}{4}bb(aa+dd-ee)^2 - \frac{1}{4}aa(bb+dd-ff)^2 \\ +\frac{1}{2}ab(aa+dd-ee)(bb+dd-ff)\cos\alpha \end{pmatrix}}.$$

Ferner ist aus dem Dreieck ABC

$$\cos\alpha = \frac{aa+bb-cc}{2ab} \text{ und deswegen } \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4aabb}(aa+bb-cc)^2;$$

werden diese Werte eingesetzt, so wird als Rauminhalt der Pyramide hervorgehen:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\begin{pmatrix} 4aabbdd - dd(aa+bb-cc)^2 - bb(aa+dd-ee)^2 - aa(bb+dd-ff)^2 \\ +(aa+bb-cc)(aa+dd-ee)(bb+dd-ff) \end{pmatrix}},$$

was durch Entwickeln der Terme in die folgende Form übergeht:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\begin{pmatrix} aaccdd & +aabbee + aabbff + aaddff + bbccdd + bbddee \\ aaccff & +aaeeff + bbccee + bbeeff + ccddee + ccddff \\ & -aabbcc - aaddee - bbddff - cceeff \\ & -a^4ff - aaf^4 - b^4ee - bbe^4 - c^4dd - ccd^4 \end{pmatrix}},$$

was anscheinend noch bequemer so ausgedrückt werden kann:

$$\frac{1}{12}\sqrt{\begin{pmatrix} +aaff(bb+cc+dd+ee) & -aaff(aa+ff) & -aabbcc \\ +bbee(aa+cc+dd+ff) & -bbee(bb+ee) & -aaddee \\ +ccdd(aa+bb+ee+ff) & -ccdd(cc+dd) & -bbddff - cceeff \end{pmatrix}}.$$

Und so wird aus den sechs gegebenen Kanten a, b, c, d, e, f der dreieckigen Pyramide ihr Rauminhalt bestimmt. W. z. f. w.

Scholion 1

21. Damit das Verhältnis, nach welchem in diesem Ausdruck die Kanten a, b, c, d, e, f untereinander zusammengestellt werden, klarer durchschaut wegen möge, ist festzuhalten, dass aus ihnen vier Dreiecke gebildet werden, und zwar besteht

$$\begin{array}{lll} \triangle ABC & \text{aus den Kanten} & a, b, c, \\ \triangle ABD & \text{aus den Kanten} & a, d, e, \\ \triangle ACD & \text{aus den Kanten} & b, d, f, \\ \triangle BCD & \text{aus den Kanten} & c, e, f, \end{array}$$

weshalb klar ist, dass die Kante a mit jeder einzelnen der übrigen zusammenläuft, um Dreiecke zu bilden, ausgenommen mit der Kante f, und deshalb werde ich diese Kanten a und f unverbunden[14] nennen, weil sie untereinander nicht verbunden sind; auf ähnliche Weise sind die Kanten b und e disjunkt und ebenso die Kanten c und d.

Es treten also nach dem Wurzelzeichen zuerst Terme auf, die aus disjunkten Kanten gebildet sind, $aaff$, $bbee$, $ccdd$, welche multipliziert werden mit der Summe der Quadrate der übrigen, weiter werden dieselben Terme negativ genommen multipliziert mit der Summe ihrer Quadrate[15], und davon werden endlich die Produkte aus den Quadraten der Kanten eines jeden Dreiecks abgezogen.

Scholion 2

22. Es kann durchaus eine etwas einfachere Formel für den Rauminhalt der Pyramide gefunden werden, wenn nur drei Kanten gegeben sind, die in einem Raumwinkel zusammenlaufen, zusammen mit den ebenen Winkeln, welche diesen bilden.

Seien nämlich die drei im Raumwinkel A zusammenlaufenden Kanten

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = d,$$

ferner die ebenen Winkel:

$$BAC = p, \quad BAD = q, \quad CAD = r.$$

Dann ist aber der Rauminhalt der Pyramide

$$\frac{1}{6}abd\sqrt{1 - \cos^2 p - \cos^2 q - \cos^2 r + 2\cos p \cdot \cos q \cdot \cos r},$$

welches auf die folgende Form zurückzuführen ist:

$$\frac{1}{3}abd\sqrt{\sin\frac{p+q+r}{2}\sin\frac{p+q-r}{2}\sin\frac{p+r-q}{2}\sin\frac{q+r-p}{2}};$$

[14] *disiuncta*. Inhaltlich würde man heute eher von “windschief” als von “disjunkt” sprechen.
[15] nämlich der Kanten.

woraus ersichtlich ist, dass, damit ein reeller Inhalt[16] herauskommt, jeweils zwei der drei in einem beliebigen Raumwinkel zusammenlaufenden ebenen Winkel p, q und r zusammengenommen größer sein müssen als der dritte.

[16] *area ... realis* (statt *area* wäre eher *soliditas* zu erwarten gewesen); aus dem Kontext geht hervor, dass Euler hier in der Tat an die Unterscheidung reell/imaginär denkt.