Einführung in die Optimierung

6. Handout

am 29. November 2005
WS 2005/06

Prof. Dr. K. Klamroth
S. Gaile
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik II
Universität Erlangen-Nürnberg

http://www2.am.uni-erlangen.de/~klamroth/optimintro05-06.html

Algorithmus 2.36: Karmarkar's Projektiver Algorithmus

(Input) • LP mit optimalem Zielfunktionswert 0 und ganzzahligen $A, \underline{b}, \underline{c}$ in der Form

$$(LP) \qquad \begin{array}{lrcl} \min & \underline{c}\,\underline{x} & & \\ \text{s.t.} & A\,\underline{x} & = & \underline{0} \\ & \underline{e}\,\underline{x} & = & 1 \\ & \underline{x} & \geq & \underline{0} \end{array}$$

- zulässiger innerer Punkt $\underline{x}^0$
- Schranke $L \in \mathbb{N}$, $L \gg 0$
- Schrittlänge $0 < \alpha < 1$ und $r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

(1) **Abbruchbedingung:**
Falls $\underline{c}\,\underline{x}^k < 2^{-L}$, gehe zu (5).

(2) **Projektive Transformation:**
Transformiere (LP) auf

$$(\overline{LP}) \qquad \begin{array}{lrcl} \min & \underline{c}\,D^k\,\underline{y} & & \\ \text{s.t.} & A\,D^k\,\underline{y} & = & \underline{0} \\ & \underline{e}\,\underline{y} & = & 1 \\ & \underline{y} & \geq & \underline{0} \end{array}$$

mit $D^k := \begin{pmatrix} x_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^k \end{pmatrix}$.

Sei $\quad \bar{\underline{c}} := \underline{c}\,D^k, \quad \bar{A} := \begin{pmatrix} A\,D^k \\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\underline{b}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{y}^k := (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^T.$

(3) **Gehe in die Richtung des steilsten Abstiegs:**
Bestimme $\bar{\underline{c}}_p := (I - \bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A})\,\bar{\underline{c}}^T$ und setze

$$\underline{y}^{k+1} := \underline{y}^k - \alpha\, r\, \frac{\bar{\underline{c}}_p}{||\bar{\underline{c}}_p||}.$$

(4) **Inverse Transformation:**
Bestimme

$$\underline{x}^{k+1} := \frac{D^k\,\underline{y}^{k+1}}{\underline{e}\,D^k\,\underline{y}^{k+1}}.$$

Setze $k := k + 1$ und gehe zu (1).

(5) **Optimales Runden:**
Gegeben $\underline{x}^k$, bestimme eine BFS $\underline{x}^*$ mit $\underline{c}\,\underline{x}^* \leq \underline{c}\,\underline{x}^k < 2^{-L}$ mit Hilfe eines Purifikationsschemas, STOP.