Einführung in die Optimierung

5. Handout
am 17. November 2005
WS 2005/06

Prof. Dr. K. Klamroth
S. Gaile
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik II
Universität Erlangen-Nürnberg

http://www2.am.uni-erlangen.de/~klamroth/optimintro05-06.html

Algorithmus 2.33: Dualer Simplex Algorithmus

(Input) (LP) $\min\{\underline{c}\,\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$,
Basis B so dass $\underline{\bar{c}} = \underline{c} - \underline{c}_B A_B^{-1} A \geq \underline{0}$.

(1) Bestimme $T(B)$.

(2) *Falls* $t_{i,n+1} \geq 0\ \forall i = 1,\ldots,m$
(STOP), $\underline{x} = (\underline{x}_B, \underline{x}_N)$ mit $x_{B(i)} = t_{i,n+1},\ i = 1,\ldots,m$ und $\underline{x}_N = \underline{0}$ ist eine optimale Lösung.

(3) Wähle $i \in \{1,\ldots,m\}$ mit $t_{i,n+1} < 0$.

(4) *Falls* $t_{ij} \geq 0\ \forall j = 1,\ldots,n$
(STOP), das LP ist unzulässig.

(5) Wähle $s \in \{1,\ldots,n\}$ mit

$$\frac{t_{0s}}{-t_{is}} = \min\left\{\frac{t_{0j}}{-t_{ij}} : t_{ij} < 0\right\}$$

und führe eine Pivot-Operation mit dem Pivot-Element $-t_{is}$ durch.
Gehe zu (2).

Algorithmus 2.34: Primal-Dualer Simplex Algorithmus

(Input) (LP) $\min\{\underline{c}\,\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b} \geq \underline{0},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$,
dual zuläassige Lösung $\underline{\pi}$.

(1) $J := \{j : A_j^T \underline{\pi}^T = c_j\}$.

(2) Löse das **reduzierte primale LP**

$$\textbf{(RP)}\quad \begin{array}{lrcl} \min & w = \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i & & \\ \text{s.t.} & \sum_{j\in J} x_j \cdot A_j + \underline{\hat{x}} & = & \underline{b} \\ & x_j, \hat{x}_i & \geq & 0 \quad \forall\, i,j \end{array}$$

oder sein duales

$$\textbf{(RD)}\quad \begin{array}{lrcll} \max & v = \underline{b}^T \underline{\alpha}^T & & & \\ \text{s.t.} & A_j^T \underline{\alpha}^T & \leq & 0 & \forall\, j \in J \\ & \alpha_i & \leq & 1 & \forall\, i = 1,\ldots,m \\ & \alpha_i & \gtrless & 0 & \forall\, i = 1,\ldots,m \end{array}$$

Bem.: Die optimale Basis aus der letzten Iteration kann als zulässige Startbasis für (RP) benutzt werden.

(3) *Falls* $w_{\text{opt}} = v_{\text{opt}} = 0$ für den optimalen Zielfunktionswert
(STOP), für eine optimale Lösung $(x_j)_{j\in J}$ von (RP) setze
$x_j := 0\ \ \forall\, j \notin J$;
$\underline{x} = (x_j)_{j=1}^n$ ist eine optimale Lösung von (P).
Sonst bestimme eine dual optimale Lösung $\underline{\alpha}_{\text{opt}}$ von (RD).

(4) *Falls* $A_j^T \underline{\alpha}_{\text{opt}}^T \leq 0\ \ \forall\, j \notin J$,
(STOP), (D) ist unbeschränkt, d.h. (P) ist unzulässig.
Sonst setze

$$\begin{aligned} \delta &:= \min\left\{\frac{c_j - A_j^T \underline{\pi}^T}{A_j^T \underline{\alpha}_{\text{opt}}^T} : j \notin J,\ A_j^T \underline{\alpha}_{\text{opt}}^T > 0\right\} \\ \underline{\pi} &:= \underline{\pi} + \delta \cdot \underline{\alpha}_{\text{opt}} \end{aligned}$$

und gehe zu (1).