Einführung in die Optimierung

4. Handout
am 19. November 2008
WS 2008/09

Prof. Dr. K. Klamroth
M. Stiglmayr, K. Dächert
Optimierung und Approximation
Bergische Universität Wuppertal

http://www.math.uni-wuppertal.de/~klamroth/linopt.html

Algorithmus 2.25: 2-Phasen Methode

(Input) LP $\min\{\underline{c}\,\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$

(1) **Transformation des Systems** $A\underline{x} = \underline{b}$**:**

a) Multipliziere alle Gleichungen $A^i\underline{x} = b_i$, für die $b_i < 0$ ist, mit (-1).

b) Bestimme diejenigen Gleichungen $A^i\underline{x} = b_i$, für die es eine Variable $x_{s(i)}$ gibt die nur in dieser Gleichung vorkommt und für die gilt $a_{i\,s(i)} > 0$. Transformiere diese Gleichungen in

$$\frac{1}{a_{i\,s(i)}} A^i\underline{x} = \frac{b_i}{a_{i\,s(i)}}.$$

Sei $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ die Indexmenge dieser Gleichungen.

c) Für alle $i \in \overline{I} := \{1, \ldots, m\} \setminus I$, führe künstliche Variable $\hat{x}_i$ ein, d.h. ersetze $A^i\underline{x} = b_i$ durch $A^i\underline{x} + \hat{x}_i = b_i$. Bezeichne die neue Nebenbedingungsmatrix als $\tilde{A}$ und den erweiterten Lösungsvektor als $\tilde{\underline{x}}$.

(2) **Phase 1 des Simplex-Verfahrens**

a) Setze $(\underline{\tilde{x}}_B, \underline{\tilde{x}}_N)^T$ mit

$$\tilde{x}_{B(i)} := \begin{cases} x_{s(i)} = \frac{b_i}{a_{i\,s(i)}} & \\ \hat{x}_i = b_i & \end{cases} \quad \mathit{if} \quad \begin{array}{l} i \in I \\ i \in \overline{I} \end{array}$$

If $\overline{I} = \emptyset$, *goto* (3).

b) Bestimme eine optimale Lösung $\underline{\tilde{x}}^*$ des LP's

$$\min \left\{ \sum_{i \in \overline{I}} \hat{x}_i : \tilde{A}\underline{\tilde{x}} = \underline{b},\ \underline{\tilde{x}} \geq \underline{0} \right\}.$$

c) *If* $\sum\limits_{i \in \overline{I}} \hat{x}_i^* > 0$ (STOP),
das LP $\min\{\underline{c}\,\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq \underline{0}\}$ ist unzulässig.

d) *If* $\sum\limits_{i \in \overline{I}} \hat{x}_i^* = 0$,
pivotiere alle künstlichen Variablen $\hat{x}_i$ aus der Basis heraus (falls sie nicht schon Nichtbasis-Variable sind).

e) Entferne alle Spalten aus dem letzten Tableau, die zu künstlichen Variablen gehören, und ersetze die Hilfszielfunktion $\sum\limits_{i \in \overline{I}} \hat{x}_i$ durch die ursprüngliche Zielfunktion $\underline{c}\,\underline{x}$.

f) Wende auf das resultierende Tableau elementare Zeilenoperationen an, so dass danach $t_{0\,B(i)} = 0$ für alle Basis-Variablen $x_{B(i)}$ gilt.

(3) **Phase 2 des Simplex-Verfahrens**
Wende das Simplex-Verfahren auf das in Schritt (2f) erstellte Tableau an.