Chargierung von Industrieöfen

Drei Beispiele für 2d - Packungsprobleme

Markus Kaiser

Arbeitsgruppe Optimierung & Approximation
Fachbereich C - Mathematik und Informatik
Bergische Universität Wuppertal

30. November 2008

Übersicht

Allgemeine Problembeschreibung

- Während eines Verkaufsgesprächs soll die Produktionskapazität abgeschätzt werden. Dazu ist es nötig, die Anzahl der Werkstücke, die der Ofen fasst, zu ermitteln.

Allgemeine Problembeschreibung

- Während eines Verkaufsgesprächs soll die Produktionskapazität abgeschätzt werden. Dazu ist es nötig, die Anzahl der Werkstücke, die der Ofen fasst, zu ermitteln.
- Anforderungen an den zu entwickelnden Algorithmus:

Allgemeine Problembeschreibung

- Während eines Verkaufsgesprächs soll die Produktionskapazität abgeschätzt werden. Dazu ist es nötig, die Anzahl der Werkstücke, die der Ofen fasst, zu ermitteln.
- Anforderungen an den zu entwickelnden Algorithmus:
  - Bestimmung eines "Belegungsplans", der möglichst viele Werkstücke berücksichtigt. (Anzahl muss allerdings nicht notwendiger Weise optimal sein.)

Allgemeine Problembeschreibung

- Während eines Verkaufsgesprächs soll die Produktionskapazität abgeschätzt werden. Dazu ist es nötig, die Anzahl der Werkstücke, die der Ofen fasst, zu ermitteln.
- Anforderungen an den zu entwickelnden Algorithmus:
  - Bestimmung eines "Belegungsplans", der möglichst viele Werkstücke berücksichtigt. (Anzahl muss allerdings nicht notwendiger Weise optimal sein.)
  - Schnelle Laufzeit ($<$ 5 Minuten, bei Anordnungen von bis zu 1000 Teilen).

Allgemeine Problembeschreibung

- Während eines Verkaufsgesprächs soll die Produktionskapazität abgeschätzt werden. Dazu ist es nötig, die Anzahl der Werkstücke, die der Ofen fasst, zu ermitteln.
- Anforderungen an den zu entwickelnden Algorithmus:
  - Bestimmung eines "Belegungsplans", der möglichst viele Werkstücke berücksichtigt. (Anzahl muss allerdings nicht notwendiger Weise optimal sein.)
  - Schnelle Laufzeit (< 5 Minuten, bei Anordnungen von bis zu 1000 Teilen).
  - Berücksichtigung unterschiedlicher Ofen- und Werkstückformen.

Modellierung

- Obwohl das eigentliche Problem dreidimensional ist, genügt es die zweidimensionale Anordnung der Werkstücke innerhalb der Grundform des Ofens zu betrachten.

Modellierung

- Obwohl das eigentliche Problem dreidimensional ist, genügt es die zweidimensionale Anordnung der Werkstücke innerhalb der Grundform des Ofens zu betrachten.
- Annahmen:
  - Alle Werkstücke haben die selbe Form, d.h. die zu betrachtenden Grundrisse sind kongruent.

Modellierung

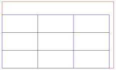
- Obwohl das eigentliche Problem dreidimensional ist, genügt es die zweidimensionale Anordnung der Werkstücke innerhalb der Grundform des Ofens zu betrachten.
- Annahmen:
  - Alle Werkstücke haben die selbe Form, d.h. die zu betrachtenden Grundrisse sind kongruent.
  - Der Grundriss der Werkstücke ist entweder rund oder rechteckig.

Modellierung

- Obwohl das eigentliche Problem dreidimensional ist, genügt es die zweidimensionale Anordnung der Werkstücke innerhalb der Grundform des Ofens zu betrachten.
- Annahmen:
  - Alle Werkstücke haben die selbe Form, d.h. die zu betrachtenden Grundrisse sind kongruent.
  - Der Grundriss der Werkstücke ist entweder rund oder rechteckig.
  - Die Grundform des Ofens ist entweder rechteckig oder hat die Form eines Kreisringes.

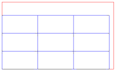
Betrachtete Packungsprobleme

- Betrachtet werden folgende Kombinationen:
  rechteckiger Ofen und rechteckige Werkstücke (RinR):

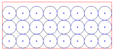


Betrachtete Packungsprobleme

- Betrachtet werden folgende Kombinationen: rechteckiger Ofen und rechteckige Werkstücke (RinR):

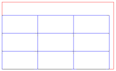


- rechteckiger Ofen und runde Werkstücke (KinR):

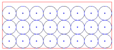


Betrachtete Packungsprobleme

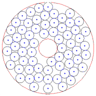
- Betrachtet werden folgende Kombinationen:
  rechteckiger Ofen und rechteckige Werkstücke (RinR):



- rechteckiger Ofen und runde Werkstücke (KinR):



- und kreisringförmiger Ofen und runde Werkstücke (KinK):



Überblick über PLP

- Das Problem, die Anzahl kongruenter Rechtecke, die auf einer rechteckigen Grundfläche angeordnet werden sollen, zu maximieren, ist allgemein unter dem Begriff Pallet Loading Problem bekannt.

Überblick über PLP

- Das Problem, die Anzahl kongruenter Rechtecke, die auf einer rechteckigen Grundfläche angeordnet werden sollen, zu maximieren, ist allgemein unter dem Begriff Pallet Loading Problem bekannt.
- Das Problem ist NP - vollständig (d.h. es ist kein polynomieller Algorithmus zur Lösung bekannt).

Überblick über PLP

- Das Problem, die Anzahl kongruenter Rechtecke, die auf einer rechteckigen Grundfläche angeordnet werden sollen, zu maximieren, ist allgemein unter dem Begriff Pallet Loading Problem bekannt.
- Das Problem ist NP - vollständig (d.h. es ist kein polynomieller Algorithmus zur Lösung bekannt).
- Um dennoch in polynomieller Zeit ein Ergebnis zu erhalten, werden Heuristiken verwendet, die versuchen eine möglichst gute Annäherung an die optimale Lösung zu erzielen. (z.B. die hier vorgestellte G4-Heuristik).

G4-Heuristik: Vorbemerkungen

- Bezeichnungen: Die rechteckige Grundfläche wird i.A. als Pallete mit Abmessungen $L \times W$ beschrieben. Die kleineren Rechtecke, die darauf angeordnet werden sollen, nennt man Boxen mit Abmessungen $l \times w$.

G4-Heuristik: Vorbemerkungen

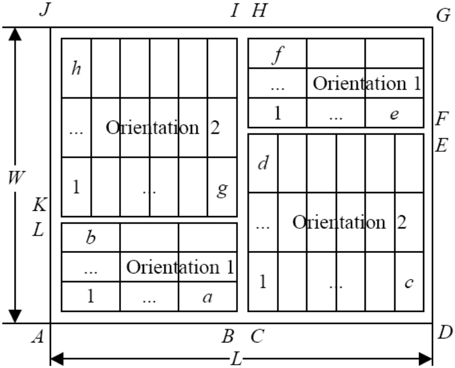
- Bezeichnungen: Die rechteckige Grundfläche wird i.A. als Pallete mit Abmessungen $L \times W$ beschrieben. Die kleineren Rechtecke, die darauf angeordnet werden sollen, nennt man Boxen mit Abmessungen $l \times w$.
- Die G4-Heuristik bestimmt unter allen Anordungen mit vier Guillotine - Blöcken diejenige mit der maximalen Anzahl an Boxen.

G4-Heuristik: Vorbemerkungen

- Bezeichnungen: Die rechteckige Grundfläche wird i.A. als Pallete mit Abmessungen $L \times W$ beschrieben. Die kleineren Rechtecke, die darauf angeordnet werden sollen, nennt man Boxen mit Abmessungen $l \times w$.
- Die G4-Heuristik bestimmt unter allen Anordungen mit vier Guillotine - Blöcken diejenige mit der maximalen Anzahl an Boxen.
- Annahme: oBdA gilt $l > w$ und $L > W$; die vier Blöcke liegen in den vier Ecken der Pallete, wobei die Ausrichtung der Boxen in den Blöcken links unten und rechts oben horizontal, in den übrigen vertikal ist.

G4-Heuristik: Schematische Darstellung

- Darstellung der prizipiellen Anordnung der einzelnen Boxen auf der Pallete durch die G4-Heuristik:



Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Zunächst werden für den Block links unten die maximale Anzahl von Spalten $\lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und Zeilen $\lfloor \frac{W}{b} \rfloor$ bestimmt.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Zunächst werden für den Block links unten die maximale Anzahl von Spalten $\lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und Zeilen $\lfloor \frac{W}{b} \rfloor$ bestimmt.
- Es gilt also: $0 \leq a \leq \lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und $0 \leq b \leq \lfloor \frac{W}{w} \rfloor$.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Zunächst werden für den Block links unten die maximale Anzahl von Spalten $\lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und Zeilen $\lfloor \frac{W}{b} \rfloor$ bestimmt.
- Es gilt also: $0 \leq a \leq \lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und $0 \leq b \leq \lfloor \frac{W}{w} \rfloor$.
- Die Anzahl der Spalten und Zeilen, die für die übrigen Blöcke zulässig ist, hängt von den gewählten Werten von a und b ab.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Zunächst werden für den Block links unten die maximale Anzahl von Spalten $\lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und Zeilen $\lfloor \frac{W}{b} \rfloor$ bestimmt.
- Es gilt also: $0 \leq a \leq \lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und $0 \leq b \leq \lfloor \frac{W}{w} \rfloor$.
- Die Anzahl der Spalten und Zeilen, die für die übrigen Blöcke zulässig ist, hängt von den gewählten Werten von a und b ab.
- Block rechts unten: Für die Anzahl c der Spalten gilt $c = \lfloor \frac{L-al}{w} \rfloor$ und für die Anzahl d der Zeilen $0 \leq d \leq \lfloor \frac{W}{l} \rfloor$.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Zunächst werden für den Block links unten die maximale Anzahl von Spalten $\lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und Zeilen $\lfloor \frac{W}{b} \rfloor$ bestimmt.
- Es gilt also: $0 \leq a \leq \lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und $0 \leq b \leq \lfloor \frac{W}{w} \rfloor$.
- Die Anzahl der Spalten und Zeilen, die für die übrigen Blöcke zulässig ist, hängt von den gewählten Werten von a und b ab.
- Block rechts unten: Für die Anzahl c der Spalten gilt $c = \lfloor \frac{L-al}{w} \rfloor$ und für die Anzahl d der Zeilen $0 \leq d \leq \lfloor \frac{W}{l} \rfloor$.
- Der Block rechts oben besteht aus $e = \lfloor \frac{cw}{l} \rfloor$ Spalten und $f = \lfloor \frac{W-dl}{w} \rfloor$ Zeilen.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Zunächst werden für den Block links unten die maximale Anzahl von Spalten $\lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und Zeilen $\lfloor \frac{W}{b} \rfloor$ bestimmt.
- Es gilt also: $0 \leq a \leq \lfloor \frac{L}{l} \rfloor$ und $0 \leq b \leq \lfloor \frac{W}{w} \rfloor$.
- Die Anzahl der Spalten und Zeilen, die für die übrigen Blöcke zulässig ist, hängt von den gewählten Werten von a und b ab.
- Block rechts unten: Für die Anzahl c der Spalten gilt $c = \lfloor \frac{L-al}{w} \rfloor$ und für die Anzahl d der Zeilen $0 \leq d \leq \lfloor \frac{W}{l} \rfloor$.
- Der Block rechts oben besteht aus $e = \lfloor \frac{cw}{l} \rfloor$ Spalten und $f = \lfloor \frac{W-dl}{w} \rfloor$ Zeilen.
- Der Block links oben schließlich besteht aus $g = \lfloor \frac{al}{w} \rfloor$ Spalten und $h = \lfloor \frac{W-bw}{l} \rfloor$ Zeilen.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Die Anzahl der insgesammt auf diese Weise angeordneten Boxen beträgt $n = ab + cd + ef + gh$.

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Die Anzahl der insgesammt auf diese Weise angeordneten Boxen beträgt $n = ab + cd + ef + gh$.
- Das zu lösende Maximierungsproblem hat die Form

$$\max_{a,b,d} n$$

Vorgehensweise der G4-Heuristik

- Die Anzahl der insgesammt auf diese Weise angeordneten Boxen beträgt $n = ab + cd + ef + gh$.
- Das zu lösende Maximierungsproblem hat die Form

$$\max_{a,b,d} n$$

- Dieses Problem wird durch die G4-Heuristik auf die einfachste mögliche Weise gelöst - durch Ausprobieren aller zulässigen Lösungen.

G4-Heuristik: Algorithmus

Input: L,W,l,w

1: Berechne $a_{max} = \lfloor \frac{L}{l} \rfloor$, $b_{max} = \lfloor \frac{W}{w} \rfloor$ und $n_0 = a_{max} b_{max}$. Initialisiere $a := 0$.

2: Falls $a = 0$ definiere $b = 0$, sonst $b = 1$.

3: Berechne $c = \lfloor \frac{L - al}{w} \rfloor$.

4: Falls $c = 0$ definiere $d = 0$, sonst $d = 1$.

5: Berechne $e = \lfloor \frac{cw}{l} \rfloor$ und $f = \lfloor \frac{W - dl}{w} \rfloor$. Falls einer der beiden Werte Null ist, setze den anderen auch auf 0.

G4-Heuristik: Algorithmus

6: Berechne $g = \lfloor \frac{al}{w} \rfloor$ und $h = \lfloor \frac{W-bw}{l} \rfloor$. Falls einer der beiden Werte Null ist, setze den anderen auch auf 0.

7: Berechne $n = ab + cd + ef + gh$. Falls $n < n_0$ gehe zu 8.; sonst $n_0 := n$ und speichere die Werte von a, b, c, d, e, f, g und h und gehe zu 8.

8: Falls $d < \left\lfloor \frac{W}{l} \right\rfloor$ setze $d := d + 1$ und gehe zu 5.

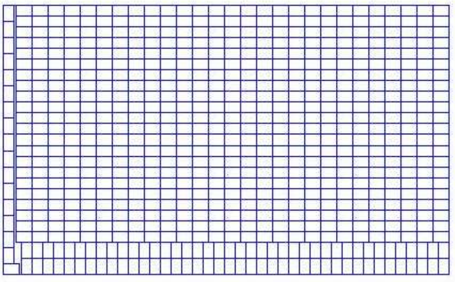
9: Falls $b < \left\lfloor \frac{W}{w} \right\rfloor$ setze $b := b + 1$ und gehe zu 3.

10: Falls $a < \left\lfloor \frac{L}{l} \right\rfloor$ setze $a := a + 1$ und gehe zu 2.

Output: n_0, a, b, c, d, e, f, g und h.

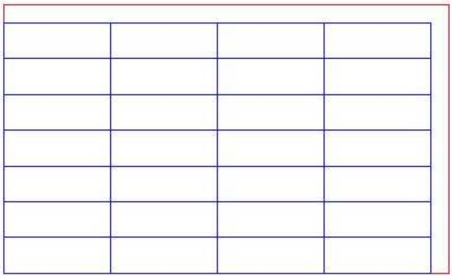
G4-Heuristik: Beispiel

- Beispiele für Anordnungen von Boxen auf einer Pallete mit Hilfe der G4-Heuristik:
- **Beispiel 1:** $L = 25$, $W = 15$, $l = 0.9$ und $w = 0.6$. Anzahl der angeordneten Boxen: 691



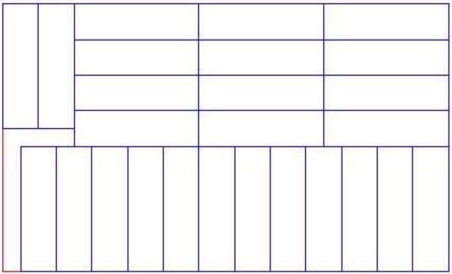
G4-Heuristik: Beispiel

- **Beispiel 2:** $L = 25$, $W = 15$, $l = 6$ und $w = 2$. Anzahl der angeordneten Boxen: 28



G4-Heuristik: Beispiel

- **Beispiel 3:** $L = 25$, $W = 15$, $l = 7$ und $w = 2$. Anzahl der angeordneten Boxen: 26



Bemerkungen zur G4-Heuristik

- Tests von Scheithauer und Terno: 99% der betrachteten Probleme werden optimal gelöst.

Bemerkungen zur G4-Heuristik

- Tests von Scheithauer und Terno: 99% der betrachteten Probleme werden optimal gelöst.
- Für alle Testbeispiele, in denen mehr als 50 Boxen in der optimalen Lösung enthalten sind, erreicht die G4-Heuristik die optimale Anzahl an Boxen.

Bemerkungen zur G4-Heuristik

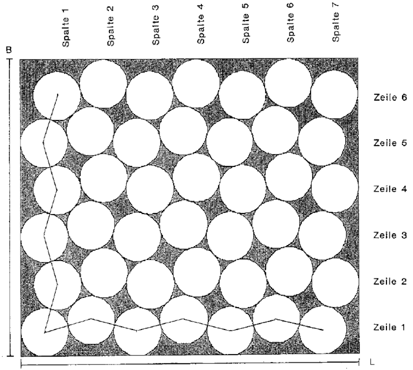
- Tests von Scheithauer und Terno: 99% der betrachteten Probleme werden optimal gelöst.
- Für alle Testbeispiele, in denen mehr als 50 Boxen in der optimalen Lösung enthalten sind, erreicht die G4-Heuristik die optimale Anzahl an Boxen.
- Die maximale Abweichung von der optimalen Lösung ist bei den betrachteten Problemen 1.

Bemerkungen zur G4-Heuristik

- Tests von Scheithauer und Terno: 99% der betrachteten Probleme werden optimal gelöst.
- Für alle Testbeispiele, in denen mehr als 50 Boxen in der optimalen Lösung enthalten sind, erreicht die G4-Heuristik die optimale Anzahl an Boxen.
- Die maximale Abweichung von der optimalen Lösung ist bei den betrachteten Problemen 1.
- Der Algorithmus läuft in pseudo-polynomieller Zeit.

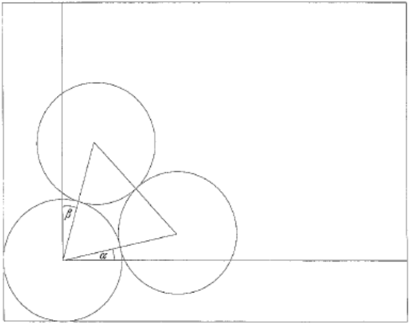
Schematische Darstellung

- Exemplarische Darstellung einer homogenen Anordnung von kongruenten Kreisen auf einer rechteckigen Grundfläche:



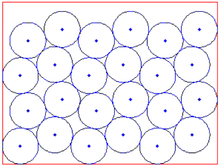
Winkel α und β

- Jede homogene Anordnung lässt sich durch die Anzahl der Zeilen m, die Spaltenzahl n, sowie die Winkel α und β beschreiben.



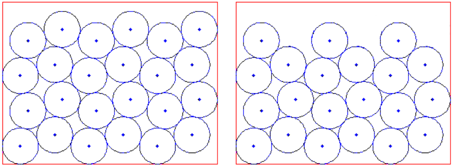
Anordnungsvarianten

- Um eine Anordnung eindeutig zu beschreiben, benötigt man darüber hinaus Informationen, ob die letzte Zeile bzw. Spalte vollständig ist.



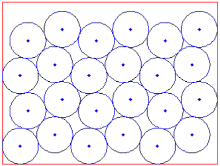
Anordnungsvarianten

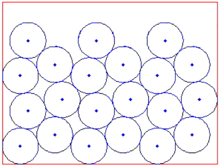
- Um eine Anordnung eindeutig zu beschreiben, benötigt man darüber hinaus Informationen, ob die letzte Zeile bzw. Spalte vollständig ist.

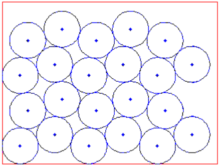


Anordnungsvarianten

- Um eine Anordnung eindeutig zu beschreiben, benötigt man darüber hinaus Informationen, ob die letzte Zeile bzw. Spalte vollständig ist.

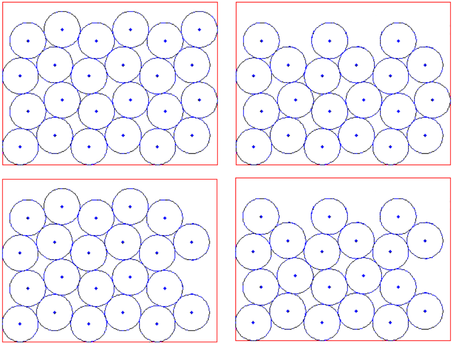






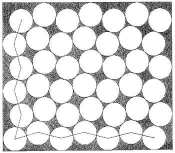
Anordnungsvarianten

- Um eine Anordnung eindeutig zu beschreiben, benötigt man darüber hinaus Informationen, ob die letzte Zeile bzw. Spalte vollständig ist.



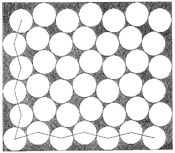
Homogene Anordnungen

- Die beiden folgenden Anordnungstypen werden anhand der jeweils geltenden Winkelrestriktionen unterschieden:
  Mit $\alpha + \beta \leq 30°$, $0° \leq \beta$ und $0° \leq \alpha$ ergibt sich (Typ A):

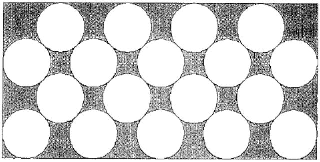


Homogene Anordnungen

- Die beiden folgenden Anordnungstypen werden anhand der jeweils geltenden Winkelrestriktionen unterschieden:
  Mit $\alpha + \beta \leq 30°$, $0° \leq \beta$ und $0° \leq \alpha$ ergibt sich (Typ A):

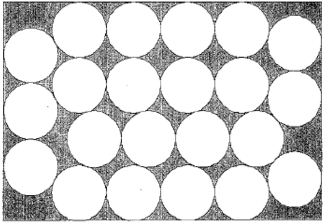


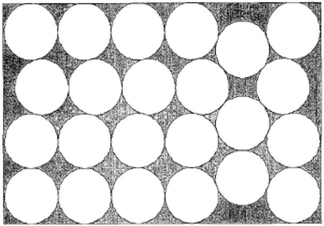
- Mit $30° \leq \alpha \leq 60°$ und $\beta = 90° - \alpha$ ergibt sich (Typ B):



Inhomogene Anordnungen

- Beispiele für inhomogene Anordnungen:





Heuristik: Annahmen

- Im Folgenden soll eine Heuristik vorgestellt werden, die die maximale Anzahl an Kreisen nach oben beschriebenen Anordnungsschema (Typ A) mit vollständiger letzter Zeile und vollständiger letzter Spalte ermittelt.

Heuristik: Annahmen

- Im Folgenden soll eine Heuristik vorgestellt werden, die die maximale Anzahl an Kreisen nach oben beschriebenen Anordnungsschema (Typ A) mit vollständiger letzter Zeile und vollständiger letzter Spalte ermittelt.
- Das Vorgehen bei den übrigen Anordnungsvarianten ist analog.

Heuristik: Annahmen

- Im Folgenden soll eine Heuristik vorgestellt werden, die die maximale Anzahl an Kreisen nach oben beschriebenen Anordnungsschema (Typ A) mit vollständiger letzter Zeile und vollständiger letzter Spalte ermittelt.
- Das Vorgehen bei den übrigen Anordnungsvarianten ist analog.
- Es gelten also die Winkelrestriktionen $\alpha + \beta \leq 30°$, $0° \leq \beta$ und $0° \leq \alpha$.

Heuristik: Annahmen

- Im Folgenden soll eine Heuristik vorgestellt werden, die die maximale Anzahl an Kreisen nach oben beschriebenen Anordnungsschema (Typ A) mit vollständiger letzter Zeile und vollständiger letzter Spalte ermittelt.
- Das Vorgehen bei den übrigen Anordnungsvarianten ist analog.
- Es gelten also die Winkelrestriktionen $\alpha + \beta \leq 30°$, $0° \leq \beta$ und $0° \leq \alpha$.
- Weitere Annahme: $L \geq B \geq 5r$

Heuristik: Problemformulierung

- Damit gilt für die Anzahl m der Zeilen und die Anzahl n der Spalten: $m \geq 2$ und $n \geq 2$

Heuristik: Problemformulierung

- Damit gilt für die Anzahl m der Zeilen und die Anzahl n der Spalten: $m \geq 2$ und $n \geq 2$
- Das zu lösende Optimierungsproblem hat somit die Form

$$\begin{aligned}
\max \quad & n \cdot m \\
s.t. \quad & \alpha + \beta \leq 30^\circ \\
& 0^\circ \leq \beta, 0^\circ \leq \alpha \\
& m \geq 2, n \geq 2, m, n \in \mathbb{Z} \\
& n \leq \frac{\frac{L}{2r} - 1 + \cos\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha} \\
& m \leq \frac{\frac{B}{2r} - 1 + \cos\beta - \sin\alpha}{\cos\beta}
\end{aligned}$$

Heuristik: Spaltenanzahl bestimmen

- Zunächst wird die minimale und die maximale Anzahl der Spalten bestimmt:

Heuristik: Spaltenanzahl bestimmen

- Zunächst wird die minimale und die maximale Anzahl der Spalten bestimmt:
- In Abhängigkeit von den Winkeln α und β lässt sich die Spaltenanzahl als $n = \left\lfloor \frac{\frac{L}{2r} - 1 + \cos\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha} \right\rfloor$ bestimmen.

Heuristik: Spaltenanzahl bestimmen

- Zunächst wird die minimale und die maximale Anzahl der Spalten bestimmt:
- In Abhängigkeit von den Winkeln α und β lässt sich die Spaltenanzahl als $n = \left\lfloor \frac{\frac{L}{2r} - 1 + \cos\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha} \right\rfloor$ bestimmen.
- Die minimale Spaltenanzahl ergibt sich bei den Winkeln $\alpha = 0^\circ$ und $\beta = 30^\circ \Rightarrow n_{min} = \left\lfloor \frac{L}{2r} - 0.5 \right\rfloor$

Heuristik: Spaltenanzahl bestimmen

- Zunächst wird die minimale und die maximale Anzahl der Spalten bestimmt:
- In Abhängigkeit von den Winkeln α und β lässt sich die Spaltenanzahl als $n = \left\lfloor \frac{\frac{L}{2r} - 1 + \cos\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha} \right\rfloor$ bestimmen.
- Die minimale Spaltenanzahl ergibt sich bei den Winkeln $\alpha = 0°$ und $\beta = 30° \Rightarrow n_{min} = \left\lfloor \frac{L}{2r} - 0.5 \right\rfloor$
- Die maximale Spaltenanzahl erhält man mit der Winkelkombination $\alpha = 30°$ und $\beta = 0° \Rightarrow$ $n_{max} = \left\lfloor 1 + \frac{\frac{L}{2r}}{\cos 30°} \right\rfloor$

Heuristik: Spaltenanzahl bestimmen

- Zunächst wird die minimale und die maximale Anzahl der Spalten bestimmt:
- In Abhängigkeit von den Winkeln α und β lässt sich die Spaltenanzahl als $n = \left\lfloor \frac{\frac{L}{2r} - 1 + \cos\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha} \right\rfloor$ bestimmen.
- Die minimale Spaltenanzahl ergibt sich bei den Winkeln $\alpha = 0°$ und $\beta = 30° \Rightarrow n_{min} = \left\lfloor \frac{L}{2r} - 0.5 \right\rfloor$
- Die maximale Spaltenanzahl erhält man mit der Winkelkombination $\alpha = 30°$ und $\beta = 0° \Rightarrow$ $n_{max} = \left\lfloor 1 + \frac{\frac{L}{2r}}{\cos 30°} \right\rfloor$
- Für die Anzahl der Spalten jeder zulässigen Anordnung gilt: $n \in [n_{min}, n_{max}]$

Heuristik: Winkelkonstellationen

- Da durch die Winkelrestriktionen ein konvexes Gebiet beschrieben wird, kann gezeigt werden, dass Winkelkombinationen, die eine optimale Anordnung erzeugen, auf dem Rand dieses Gebiets liegen.

Heuristik: Winkelkonstellationen

- Da durch die Winkelrestriktionen ein konvexes Gebiet beschrieben wird, kann gezeigt werden, dass Winkelkombinationen, die eine optimale Anordnung erzeugen, auf dem Rand dieses Gebiets liegen.
- Deshalb genügt es die folgenden drei "Geraden" zu betrachten:
- W_1: $\alpha = 0°$ und $0° \leq \beta \leq 30°$
- W_2: $0° \leq \alpha \leq 30°$ und $\beta = 0°$
- W_3: $\alpha \in [0°, 30°]$ und $\beta = 30° - \alpha$

Heuristik: potenziell optimale Kombinationen

- Für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ und jeden der drei Fälle W_i, $i = 1, 2, 3$ kann nun eine maximale und minimale Überdeckung $L_{max}^{i,n}$ bzw. $L_{min}^{i,n}$ der Längsseite der Grundfläche bestimmt werden.

Heuristik: potenziell optimale Kombinationen

- Für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ und jeden der drei Fälle W_i, $i = 1, 2, 3$ kann nun eine maximale und minimale Überdeckung $L^{i,n}_{max}$ bzw. $L^{i,n}_{min}$ der Längsseite der Grundfläche bestimmt werden.
- Mit Hilfe dieser Schranken und einiger weiterer geometrischer Überlegungen lässt sich die für jeden der Fälle W_i eine optimale Winkelkonstellation angeben:

Heuristik: potenziell optimale Kombinationen

- Für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ und jeden der drei Fälle W_i, $i = 1, 2, 3$ kann nun eine maximale und minimale Überdeckung $L^{i,n}_{max}$ bzw. $L^{i,n}_{min}$ der Längsseite der Grundfläche bestimmt werden.
- Mit Hilfe dieser Schranken und einiger weiterer geometrischer Überlegungen lässt sich die für jeden der Fälle W_i eine optimale Winkelkonstellation angeben:
- $W_1 : \alpha = 0^\circ$ und

$$\beta = \begin{cases} 30^\circ & \text{falls} \quad L^{1,n}_{max} < L \\ \arcsin\left(\frac{L}{2r} - n\right) & \text{falls} \quad L^{1,n}_{min} \leq L < L^{1,n}_{max} \end{cases}$$

Heuristik: potenziell optimale Kombinationen

- $W_2 : \beta = 0^\circ$ und

$$\alpha = \begin{cases} 0^\circ & \text{falls} \quad L_{max}^{2,n} \leq L \\ \arccos \frac{\frac{L}{2r} - n}{n-1} & \text{falls} \quad L_{max}^{2,n} > L \end{cases}$$

Heuristik: potenziell optimale Kombinationen

- $W_2 : \beta = 0^\circ$ und

$$\alpha = \begin{cases} 0^\circ & \text{falls} \quad L_{max}^{2,n} \leq L \\ \arccos \frac{\frac{L}{2r} - n}{n-1} & \text{falls} \quad L_{max}^{2,n} > L \end{cases}$$

- $W_3 : \beta = 30^\circ - \alpha$ und

$$\alpha = \begin{cases} 0^\circ & \text{falls} \quad L_{max}^{3,n} \leq L \\ \arccos \frac{2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 - 4(n^2-n+1)(a^2 - \frac{3}{4})}}{2(n^2-n+1)} & \text{falls} \quad L_{max}^{3,n} > L \end{cases}$$

mit $a = \frac{L}{2r} - 1$ und $b = (n-1) + 0.5$

Heuristik: Zeilenanzahl und Ergebnis

- Die Anzahl $m(\alpha, \beta)$ der Zeilen lässt sich dann in Abhängigkeit von α und β als $m(\alpha, \beta) = \frac{\frac{B}{2r} - 1 + \cos\beta - \sin\alpha}{\cos\beta}$ für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ bestimmen.

Heuristik: Zeilenanzahl und Ergebnis

- Die Anzahl $m(\alpha, \beta)$ der Zeilen lässt sich dann in Abhängigkeit von α und β als $m(\alpha, \beta) = \frac{\frac{B}{2r} - 1 + \cos\beta - \sin\alpha}{\cos\beta}$ für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ bestimmen.
- Da für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ bis zu vier Kombinationen von α und β ermittelt werden, erhält man für jedes n ebenso viele Kandidaten für m.

Heuristik: Zeilenanzahl und Ergebnis

- Die Anzahl $m(\alpha, \beta)$ der Zeilen lässt sich dann in Abhängigkeit von α und β als $m(\alpha, \beta) = \frac{\frac{B}{2r} - 1 + \cos\beta - \sin\alpha}{\cos\beta}$ für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ bestimmen.
- Da für jedes $n \in [n_{min}, n_{max}]$ bis zu vier Kombinationen von α und β ermittelt werden, erhält man für jedes n ebenso viele Kandidaten für m.
- Die Ausgabe der Heuristik besteht in dem Wertepaar (n, m), dessen Produkt den größten Wert ergibt.

Problematik

- Für die beiden vorangegangenen Probleme konnten aufgrund der rechteckigen Grundfläche, anhand von geometrischen Überlegungen, Heuristiken aufgestellt werden, um möglichst viele Werkstücke zu positionieren.

Problematik

- Für die beiden vorangegangenen Probleme konnten aufgrund der rechteckigen Grundfläche, anhand von geometrischen Überlegungen, Heuristiken aufgestellt werden, um möglichst viele Werkstücke zu positionieren.
- Im Fall der kreisringförmigen Grundfläche ist dies leider nicht mehr so einfach möglich.

Problematik

- Für die beiden vorangegangenen Probleme konnten aufgrund der rechteckigen Grundfläche, anhand von geometrischen Überlegungen, Heuristiken aufgestellt werden, um möglichst viele Werkstücke zu positionieren.
- Im Fall der kreisringförmigen Grundfläche ist dies leider nicht mehr so einfach möglich.
- Die hier vorgestellte Heuristik stellt lediglich einen ersten Versuch dar, eine zufriedenstellende Anordnung zu erreichen.

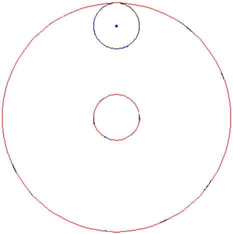
Problemformulierung

$$
\begin{aligned}
\max \quad & n \\
s.t. \quad & \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq 2r \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\} \\
& \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \geq r_{in} + r \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
& \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq r_{out} - r \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet n die Anzahl und r den Radius der anzuordnenden Kreise, (x_i, y_i) die Koordinaten des Mittelpunktes des i-ten Kreises, r_{in} den Radius des Innenkeises und r_{out} den Radius des Außenkreises; der Mittelpunkt des Kreisringes liegt im Ursprung.

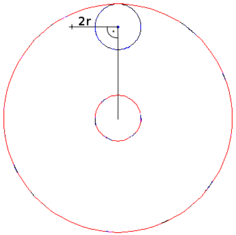
Heuristik: Schritt 1

- Der erste Kreis wird an der äußeren Kreislinie platziert:



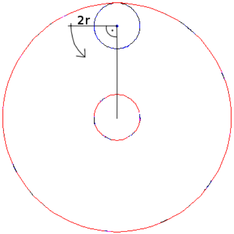
Heuristik: Schritt 2

- Ausgehend vom Mittelpunkt des ersten Kreises wird der Punkt bestimmt, der in Richtung des Lotes auf die Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt des Kreisringes, eine Entfernung von $2r$ hat.



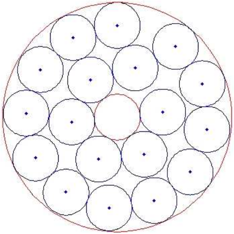
Heuristik: Schritt 3

- Ausgehend von diesem Punkt wird entlang eines Kreises mit Radius $2r$ um den Mittelpunkt des ersten Kreises entgegen dem Uhrzeigersinn ein Punkt gesucht, der keine der Nebenbedingungen verletzt und somit den Mittelpunkt eines weiteren Kreises bilden kann:



Heuristik: Iteration

- Dieses Vorgehen wiederholt man bei jedem neu bestimmten Kreis. Auf diese Weise wird iterativ eine Anordnungder folgenden Form erzeugt:



Ideen für alternative Heuristiken

- Variation der Lage des ersten Kreises.

Ideen für alternative Heuristiken

- Variation der Lage des ersten Kreises.
- Kreise in der äußersten Reihe gleichmäßig verteilen und nachfolgende Reihen "auf Lücke" anordnen.

Ideen für alternative Heuristiken

- Variation der Lage des ersten Kreises.
- Kreise in der äußersten Reihe gleichmäßig verteilen und nachfolgende Reihen "auf Lücke" anordnen.
- Zunächst von einer Kreisscheibe als Grundfläche ausgehen und den inneren Kreis nachträglich "ausschneiden".

Ideen für alternative Heuristiken

- Variation der Lage des ersten Kreises.
- Kreise in der äußersten Reihe gleichmäßig verteilen und nachfolgende Reihen "auf Lücke" anordnen.
- Zunächst von einer Kreisscheibe als Grundfläche ausgehen und den inneren Kreis nachträglich "ausschneiden".
- Für jeden vorhandenen Kreis nicht nur einen Nachbarn bestimmen sondern mehrere.

Ideen für nachträgliche Optimierung

- Simulation eines "Schüttelns" oder einer "Gravitationskraft" , anschließend evtl. entstandene Lücken durch neue Kreise auffüllen.

Ideen für nachträgliche Optimierung

- Simulation eines "Schüttelns" oder einer "Gravitationskraft" , anschließend evtl. entstandene Lücken durch neue Kreise auffüllen.
- Weitere Kreise an geeigneten Stellen "nachschieben".

Ideen für nachträgliche Optimierung

- Simulation eines "Schüttelns" oder einer "Gravitationskraft" , anschließend evtl. entstandene Lücken durch neue Kreise auffüllen.
- Weitere Kreise an geeigneten Stellen "nachschieben".
- Die Anordnung durch Hinzufügen eines weiteren Kreises an einer beliebigen Stelle unzulässig machen und versuchen das nichtlineare Ungleichungssystem der Nebenbedingungen zu lösen (d.h. eine zulässige Lösung zu erzeugen).

Ideen für nachträgliche Optimierung

- Simulation eines "Schüttelns" oder einer "Gravitationskraft" , anschließend evtl. entstandene Lücken durch neue Kreise auffüllen.
- Weitere Kreise an geeigneten Stellen "nachschieben".
- Die Anordnung durch Hinzufügen eines weiteren Kreises an einer beliebigen Stelle unzulässig machen und versuchen das nichtlineare Ungleichungssystem der Nebenbedingungen zu lösen (d.h. eine zulässige Lösung zu erzeugen).

Allgemeines Problem der nachträglichen Optimierung: sehr großer Aufwand aufgrund der großen Anzahl an Nebenbedingungen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literatur

Isermann, H. (1991).
Heuristiken zur Lösung des zweidimensionalen Packproblems für Rundgefäße.
OR Spektrum (1991), 13:213–223.

Li, K. W. and Wang, Z. (2007).
Layer-layout-based heuristics for loading homogeneous items into a single container.
Journal of Zhejiang University Science A 8(12):1944–1952.

Scheithauer, G. and Terno, J. (1996):
The G4-Heuristic for the Pallet Loading Problem.
Journal of the Operational Research Society 47:511–522.