Das Haus des Nikolaus

Ein kleiner Ausflug in die Welt der Graphen

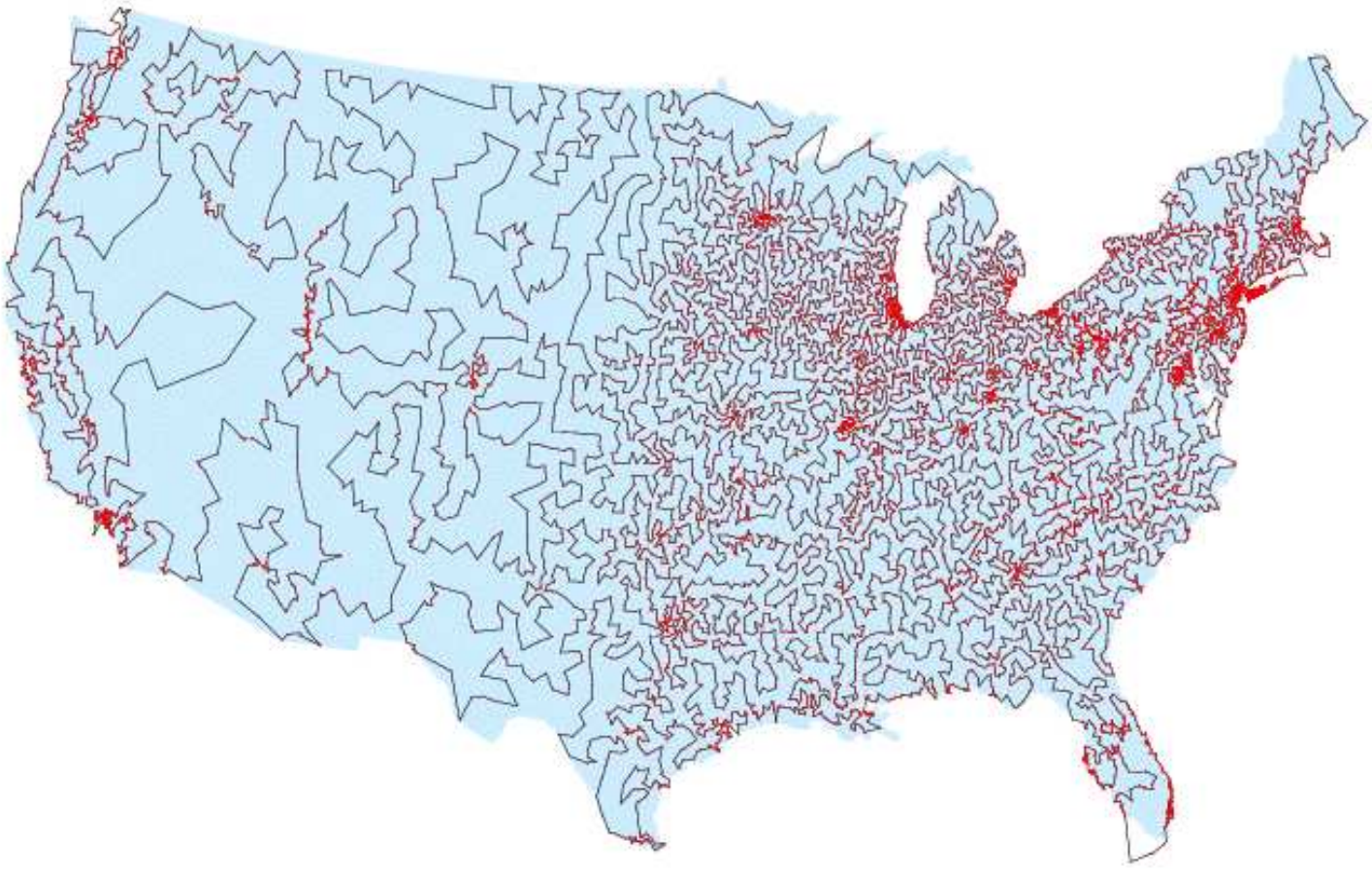
Markus Kaiser, Kathrin Klamroth

Arbeitsgruppe Optimierung & Approximation
Bergische Universität Wuppertal

30. März 2010

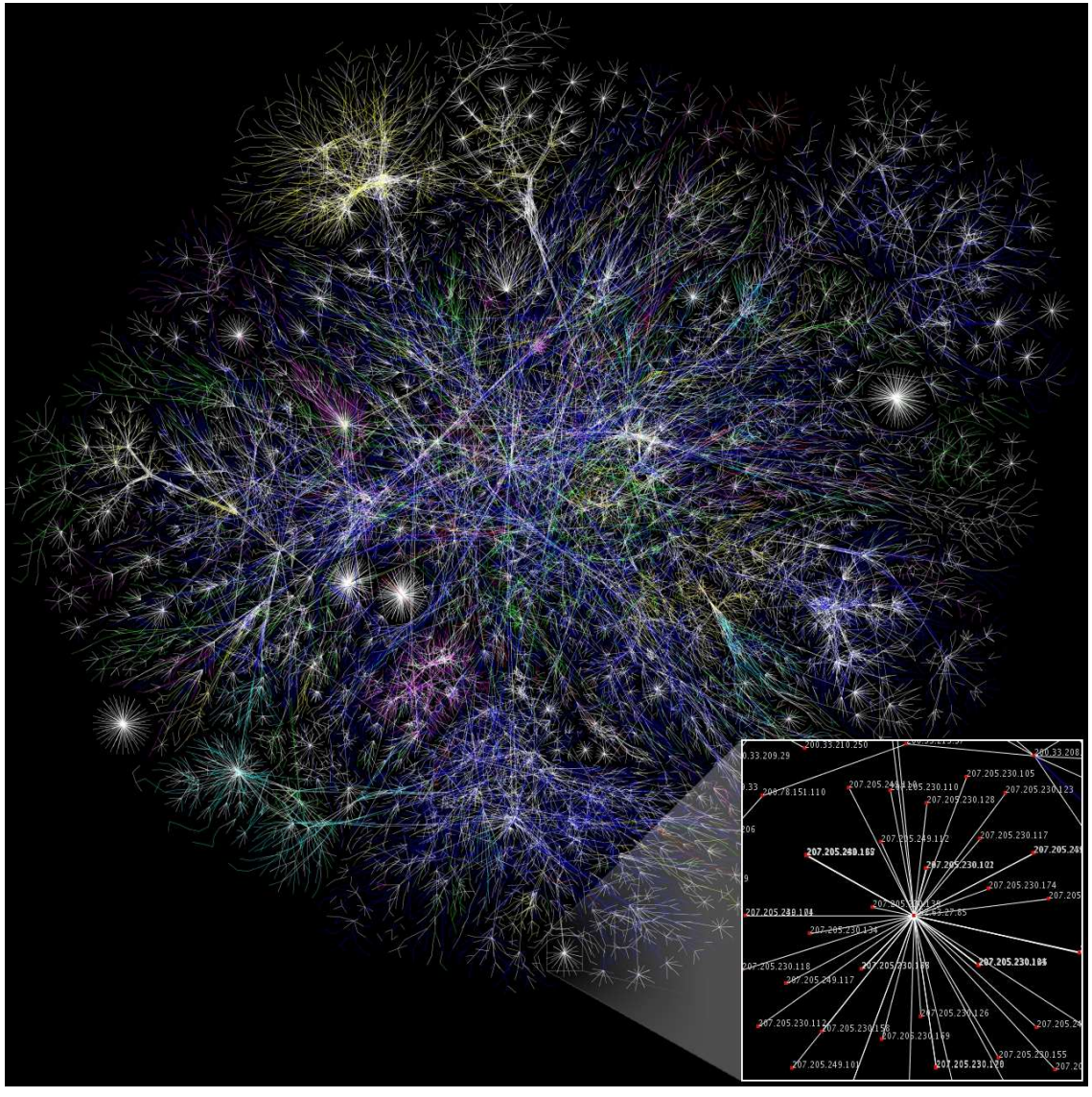
Beispiele für Graphen

Route eines Handelsreisenden



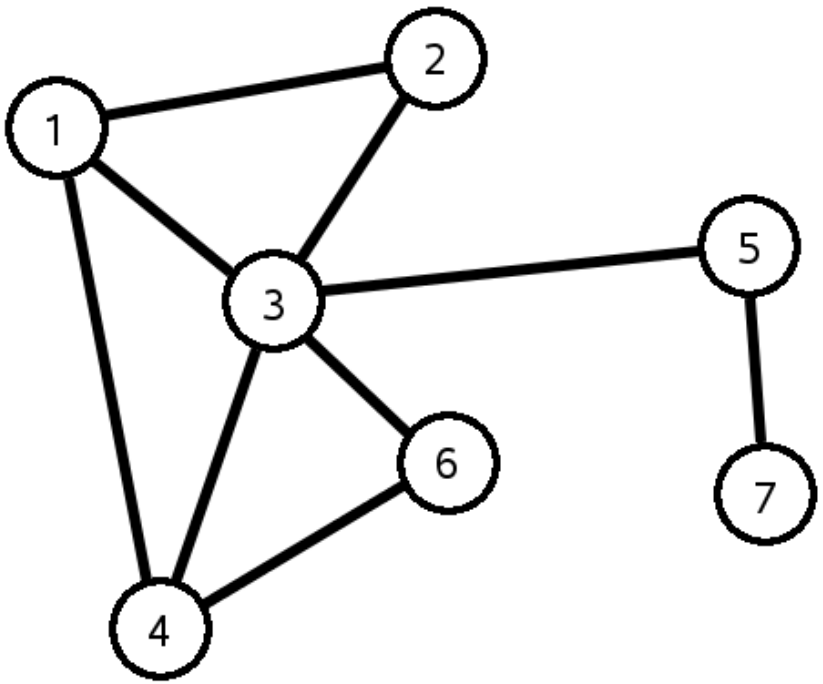
Soziales Netzwerk (wissenschaftliche Kooperationen)

Internet-Karte

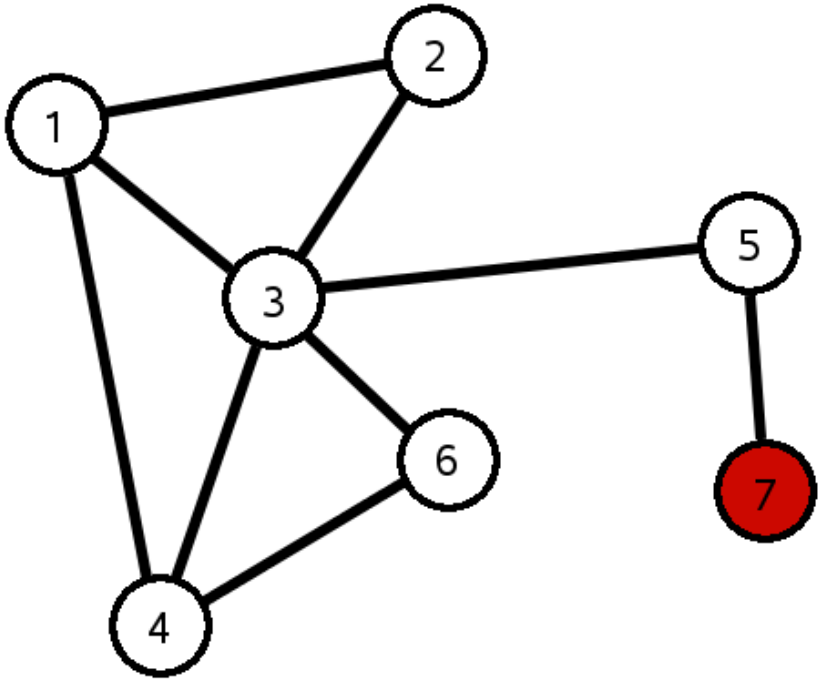


Knotengrade in einem kleinen Graphen

Knotengrad



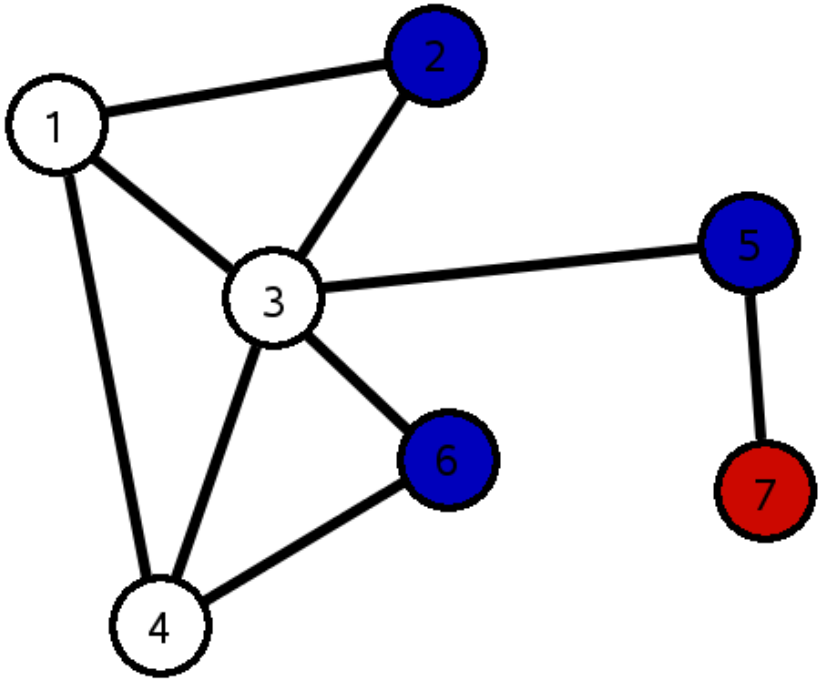
Knotengrad



Knoten mit

Grad 1

Knotengrad

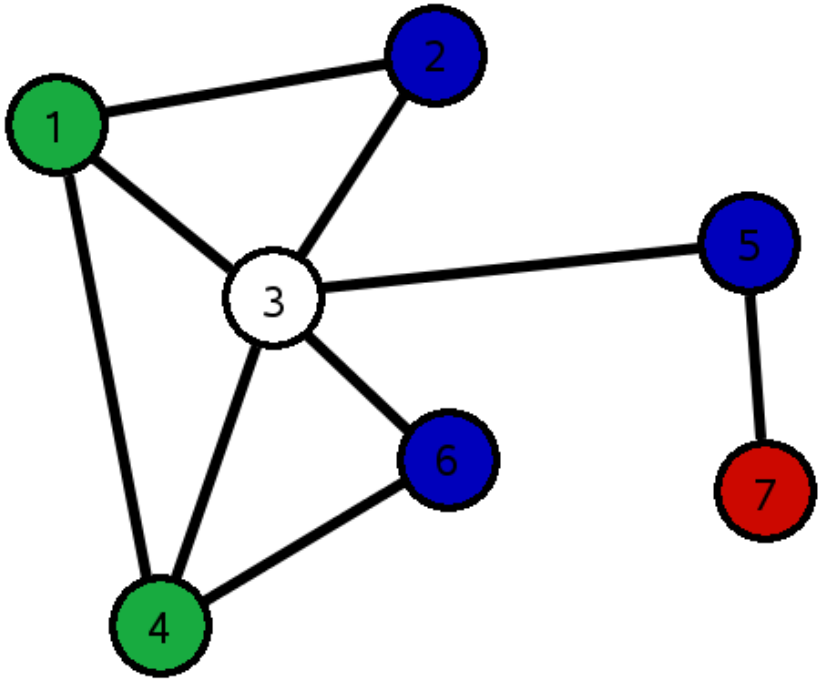


Knoten mit

Grad 1

Grad 2

Knotengrad



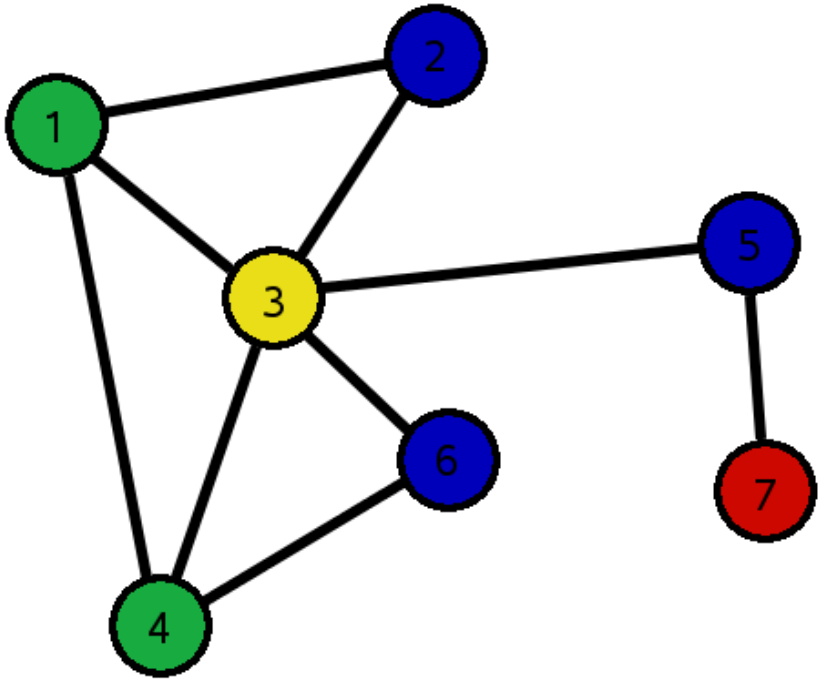
Knoten mit

Grad 1

Grad 2

Grad 3

Knotengrad



Knoten mit

Grad 1

Grad 2

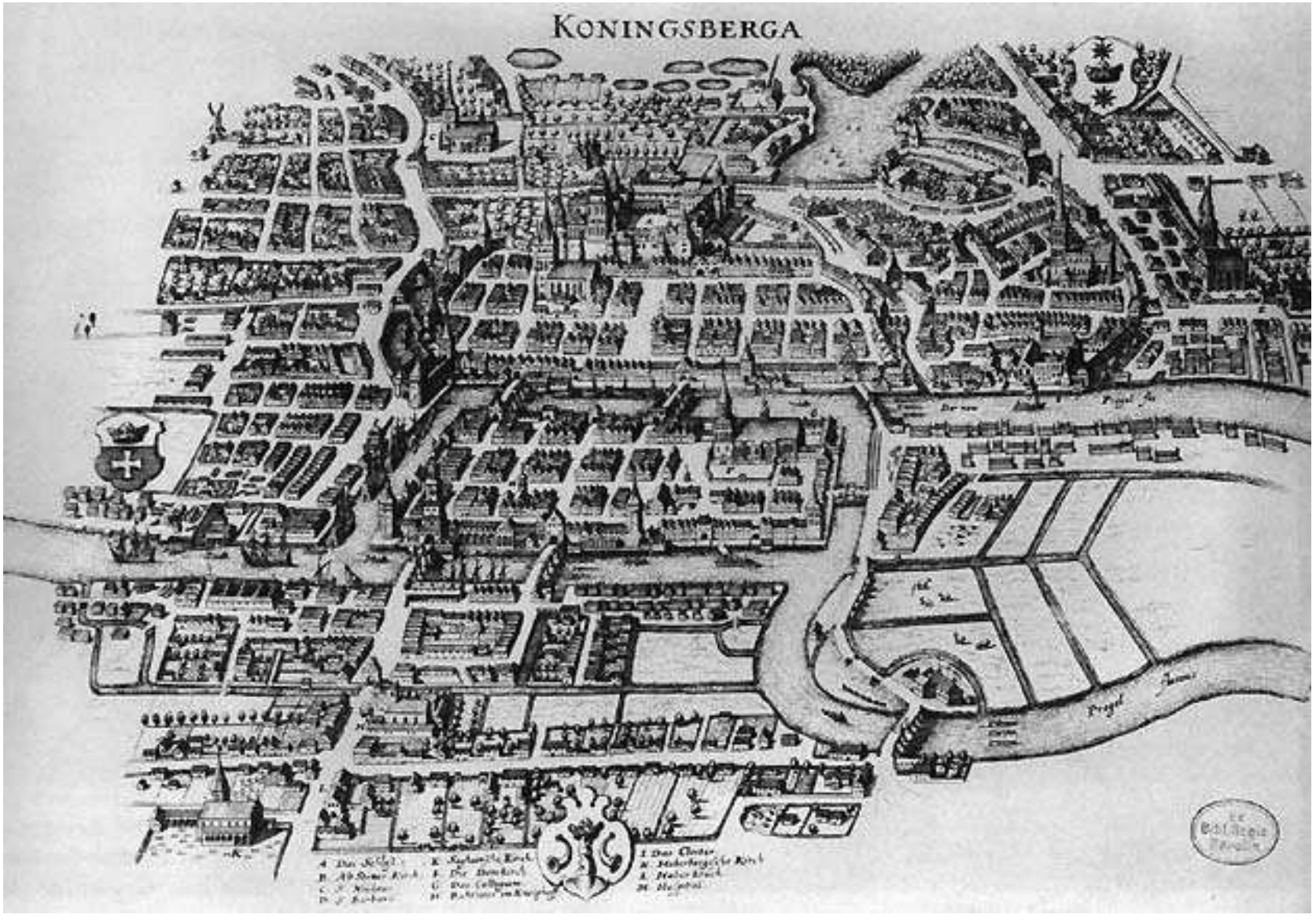
Grad 3

Grad 5

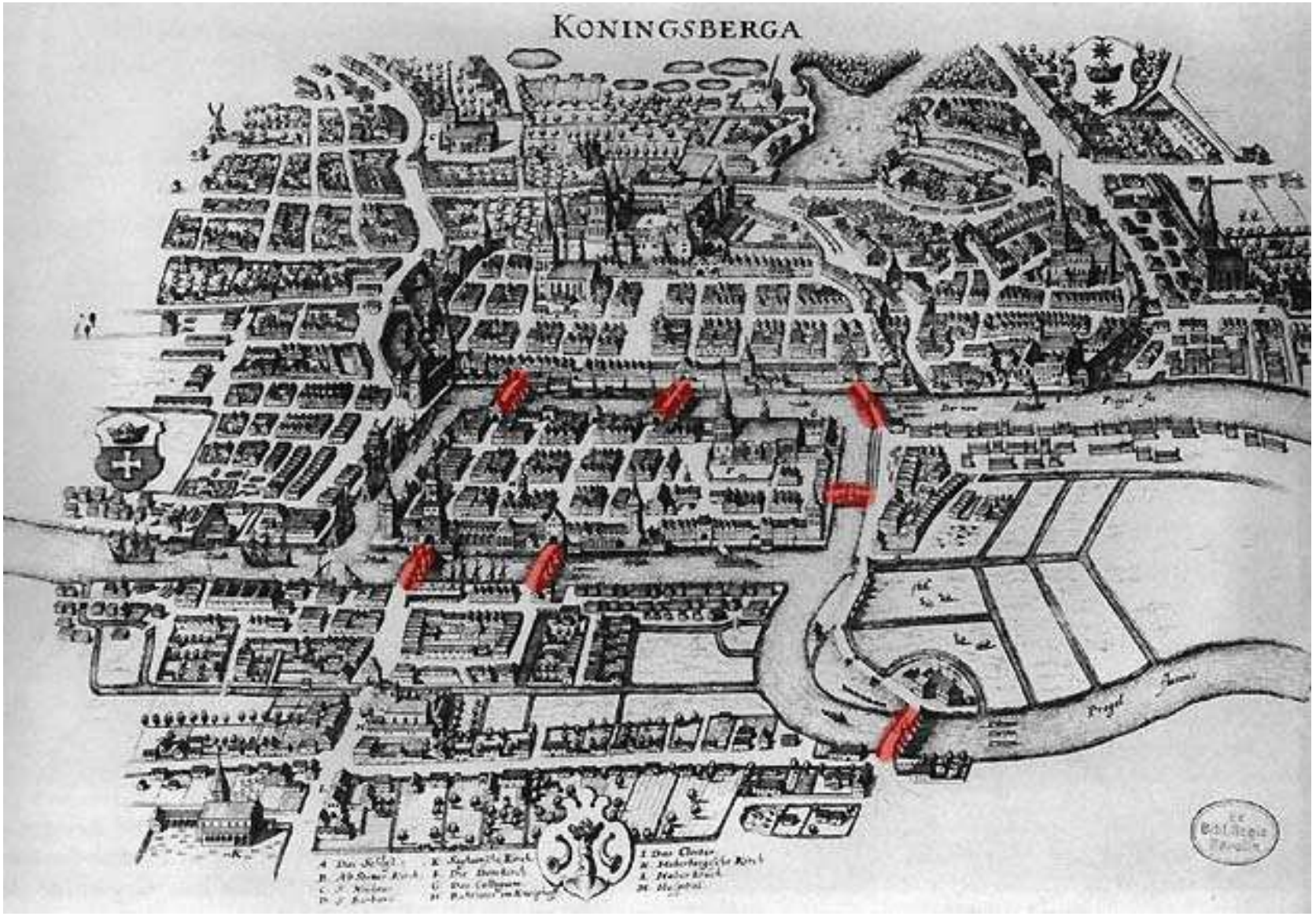
Das Königsberger Brückenproblem

Leonhard Euler 1707 - 1783

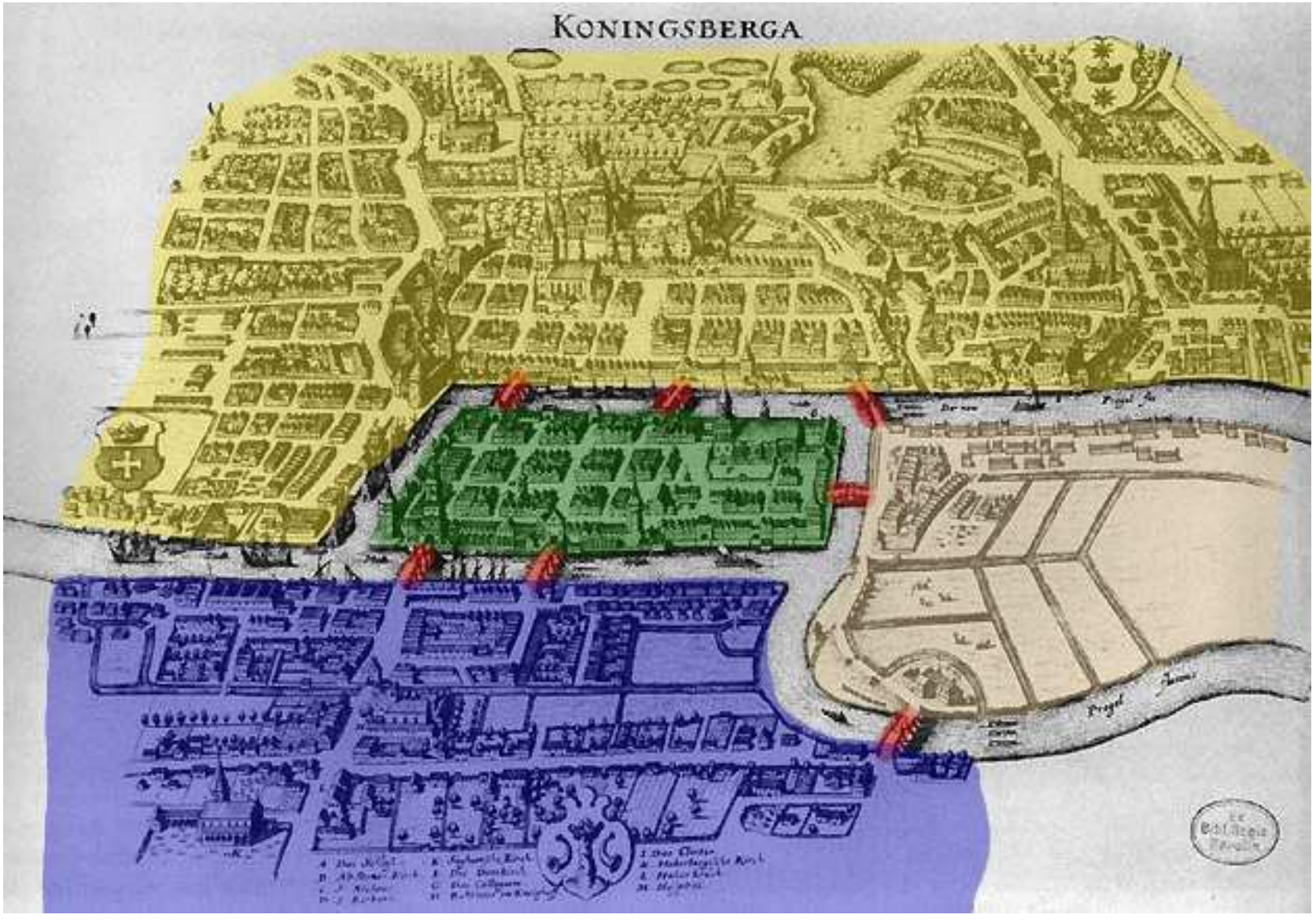
Königsberg im Jahr 1652



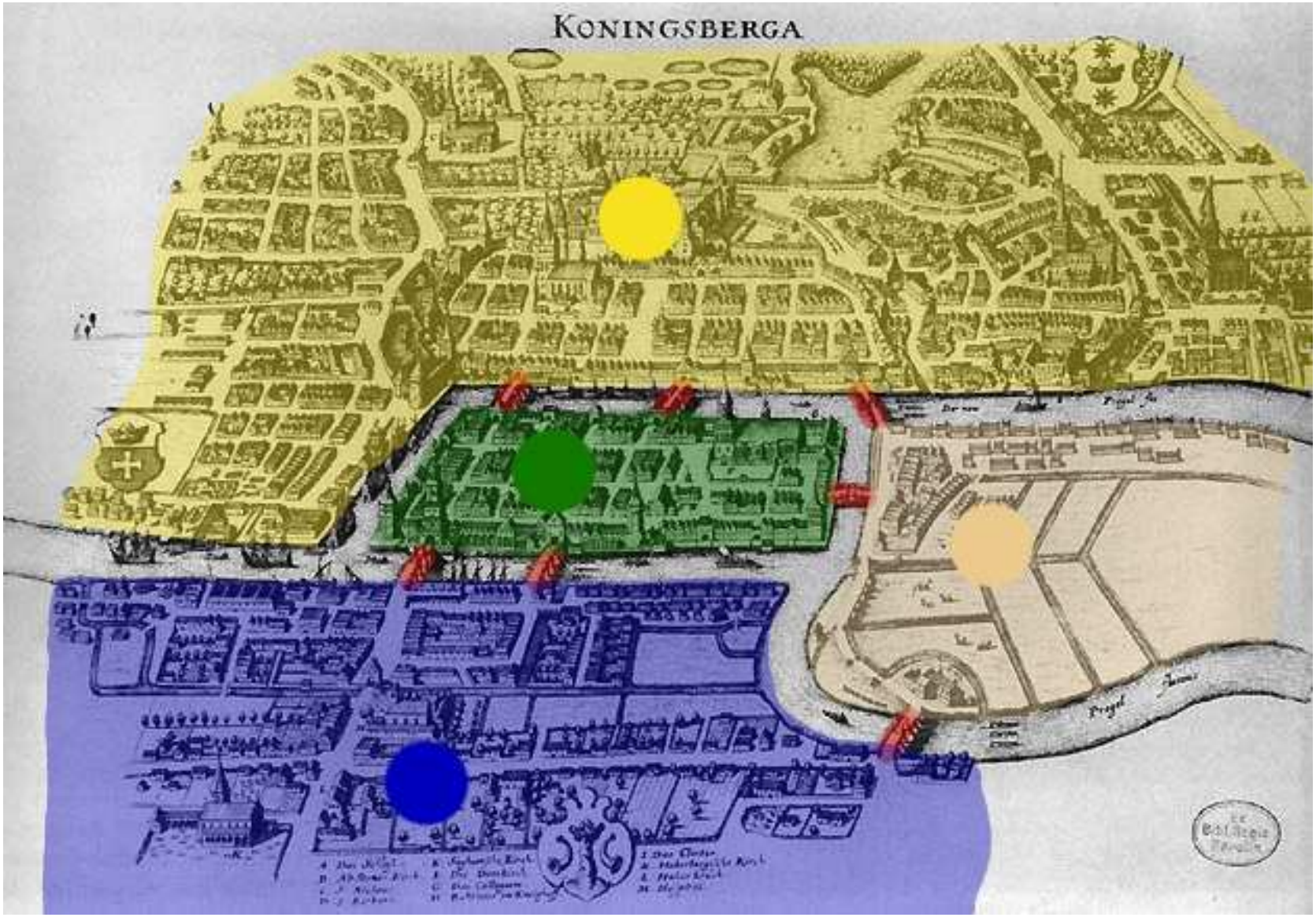
Die Königsberger Brücken



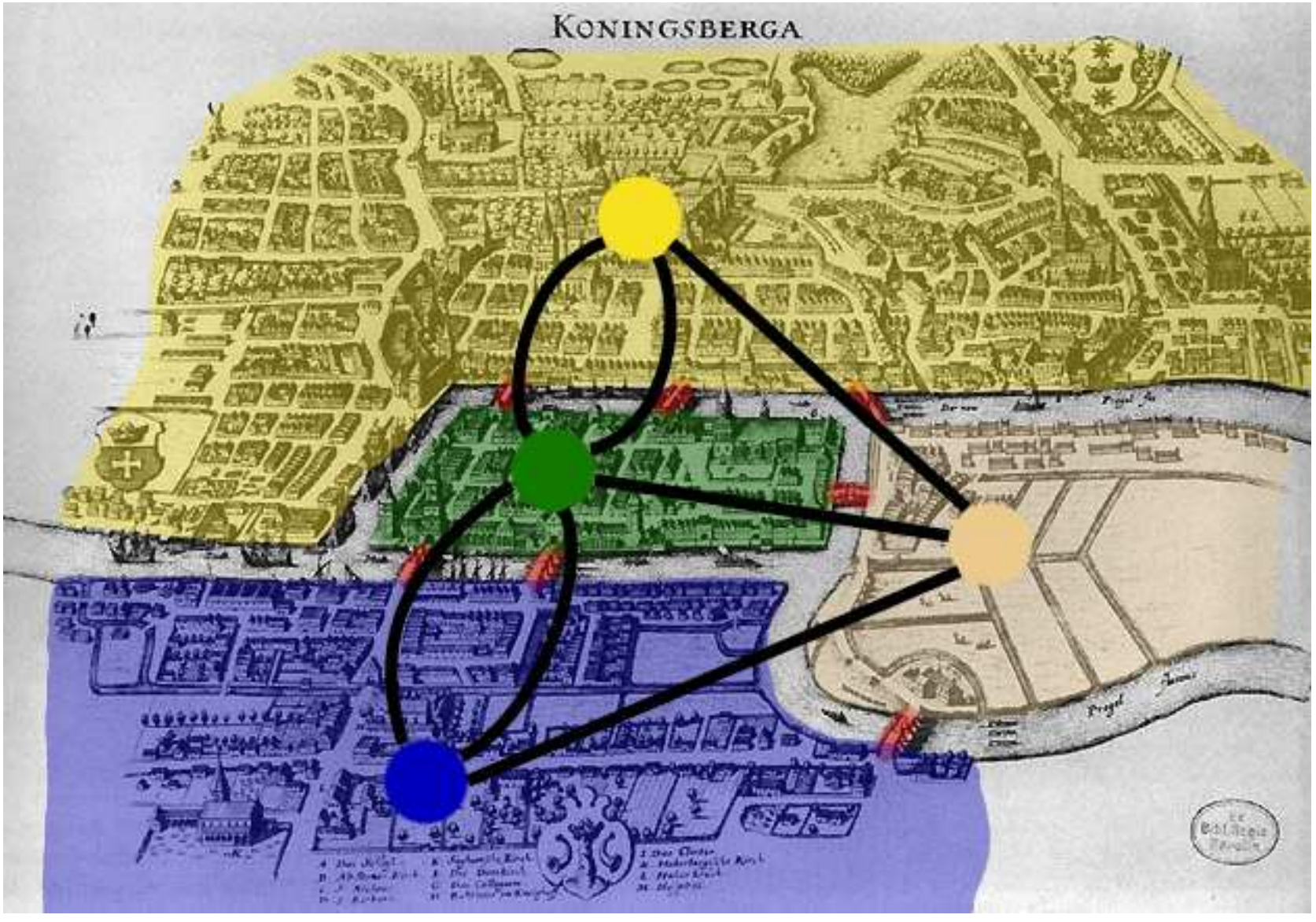
Brücken und Stadtteile



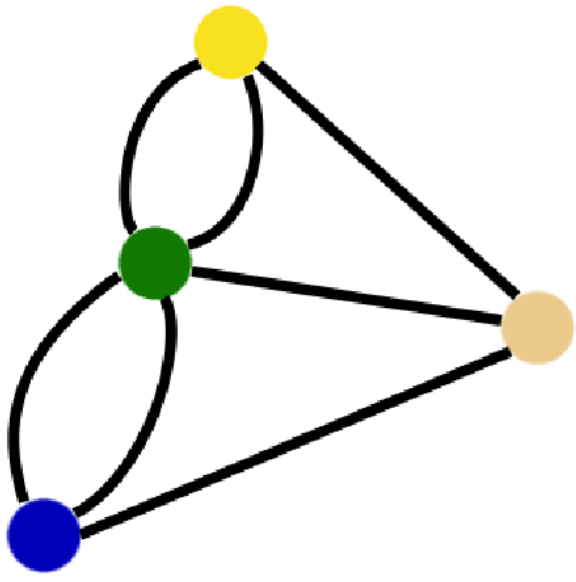
Jeder Stadtteil entspricht einem Knoten...



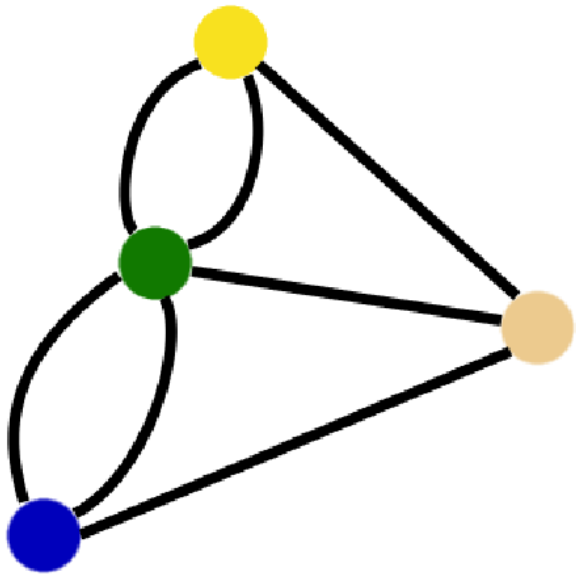
... und jede Brücke einer Kante



Es kann keine Lösung geben, weil...



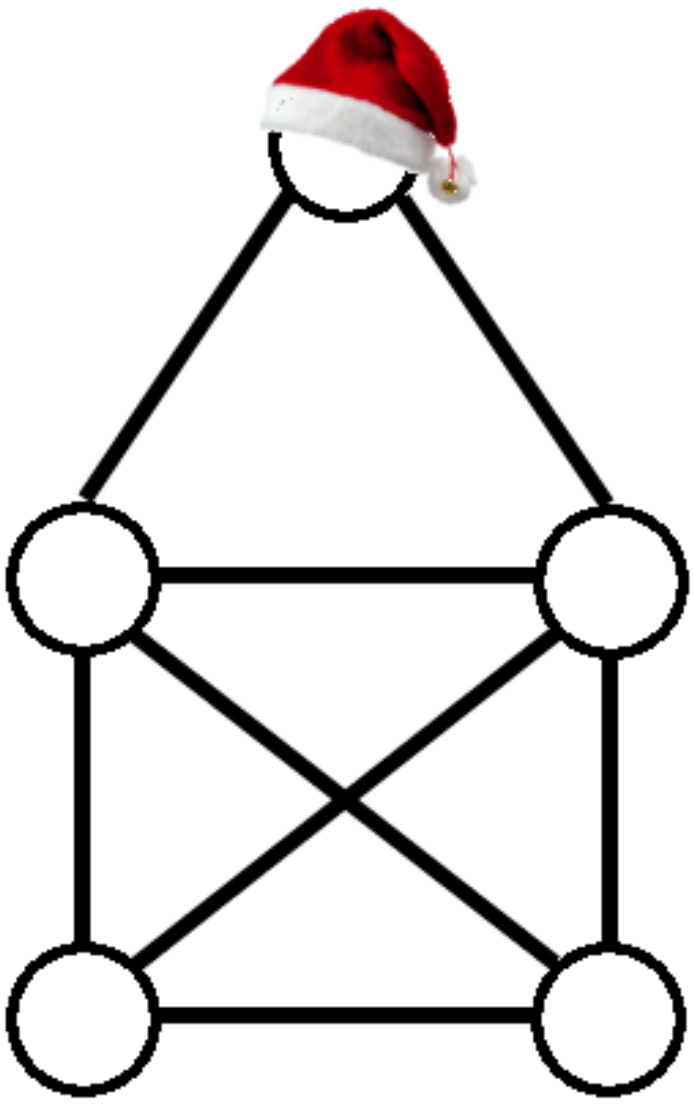
Es kann keine Lösung geben, weil...



... drei der Knoten in diesem Graph den Grad 3 haben und einer Grad 5.
Damit kann es nach dem Satz von Euler keine Lösung des Königsberger Brücken-problems geben.

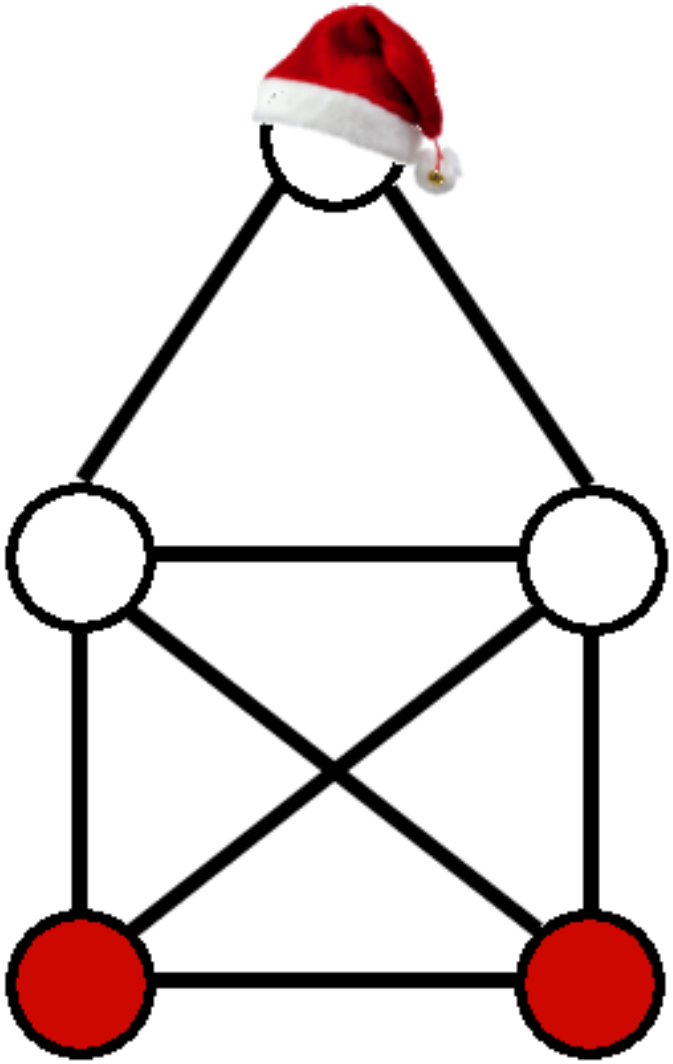
Das Haus des Nikolaus

Das Haus des Nikolaus



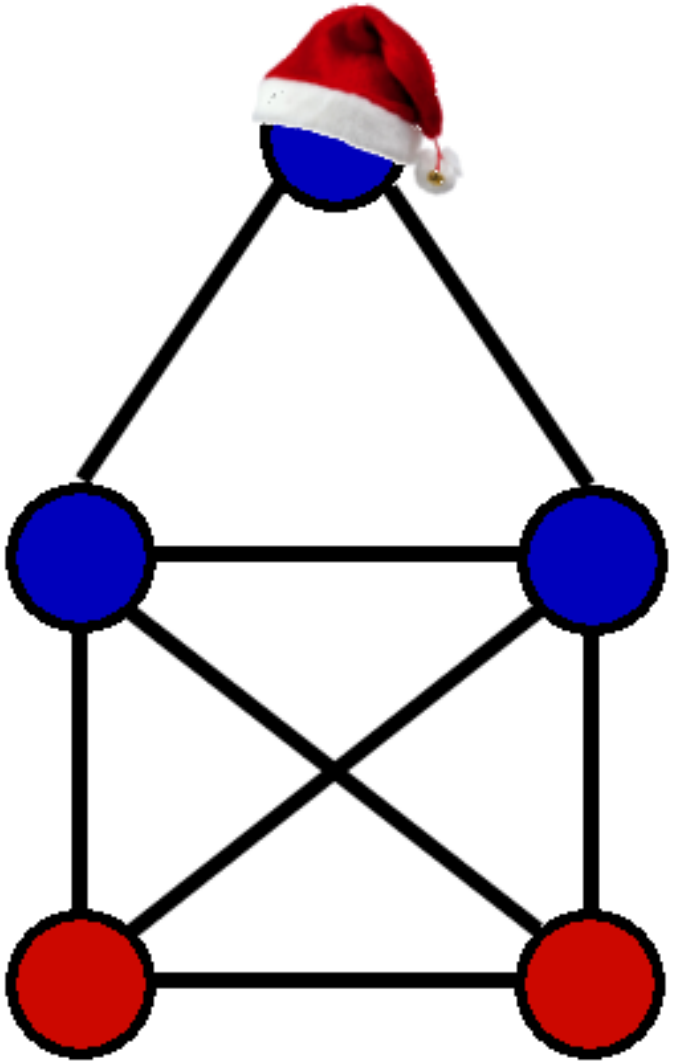
Gibt es eine Möglichkeit, diese Figur in einem Zug zu zeichnen, ohne dabei eine Kante mehrfach zu übermalen?

Die Antwort liefert der Satz von Euler:



Knoten mit ungerader Ordnung

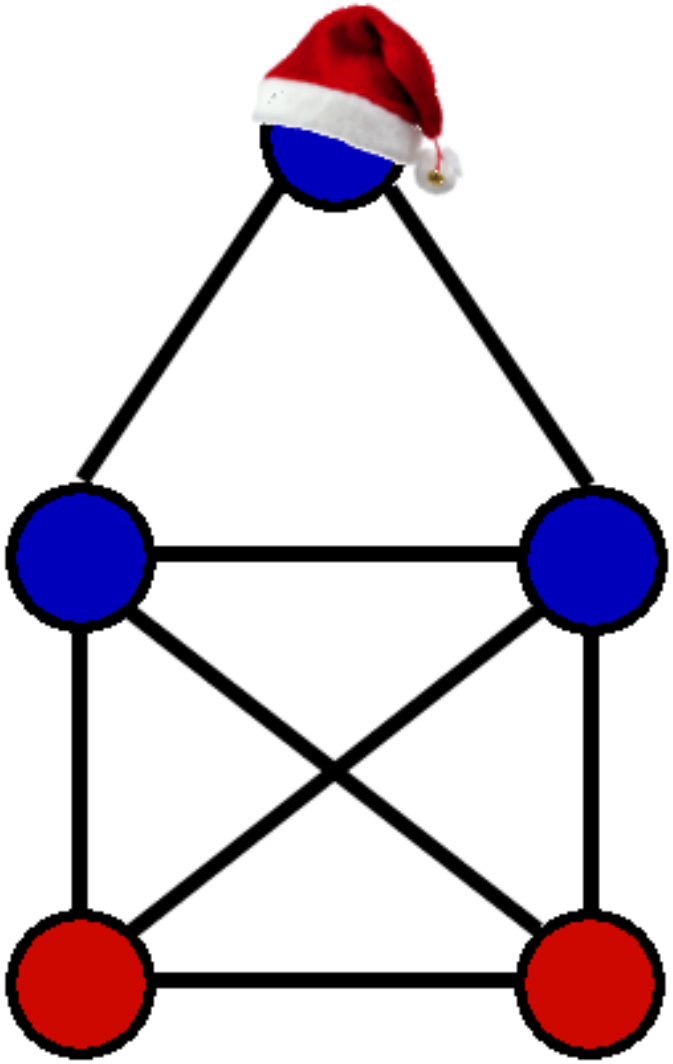
Die Antwort liefert der Satz von Euler:



Knoten mit ungerader Ordnung

Knoten mit gerader Ordnung

Die Antwort liefert der Satz von Euler:

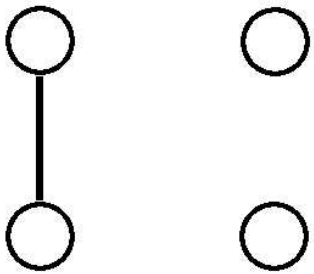


Knoten mit ungerader Ordnung

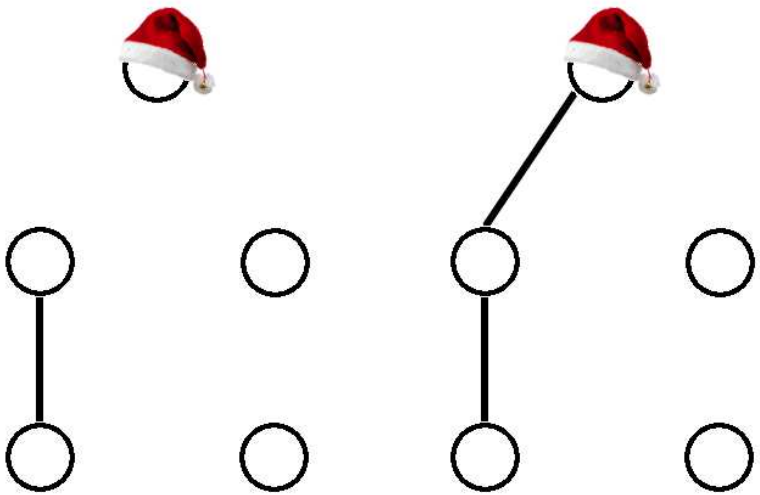
Knoten mit gerader Ordnung

Es gibt Lösungen des Problems in Form von Eulerwegen, deren jeweilige Start- und Endknoten die beiden unteren Knoten mit ungerader Ordnung sind.

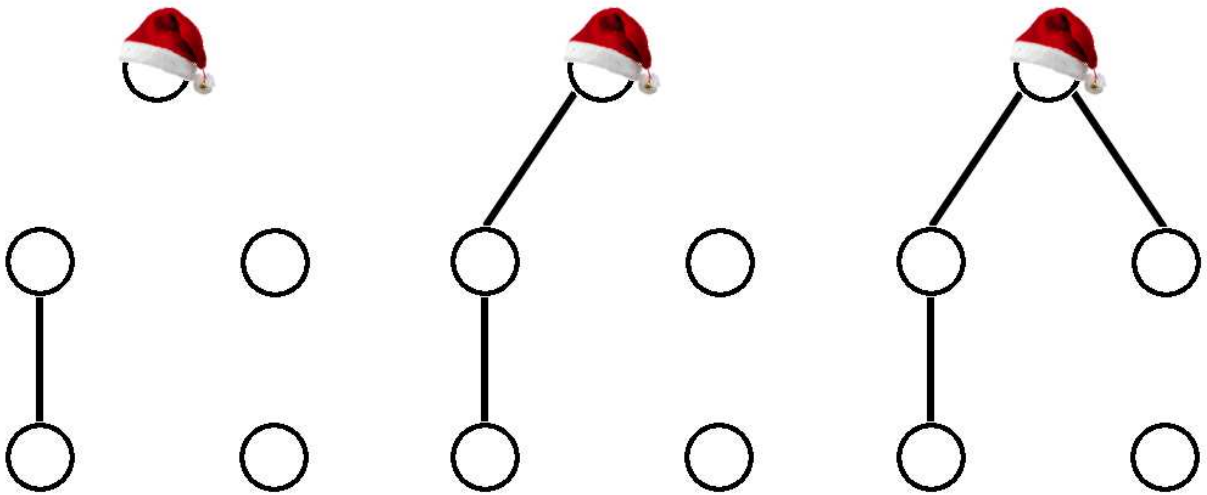
Eine mögliche Lösung:



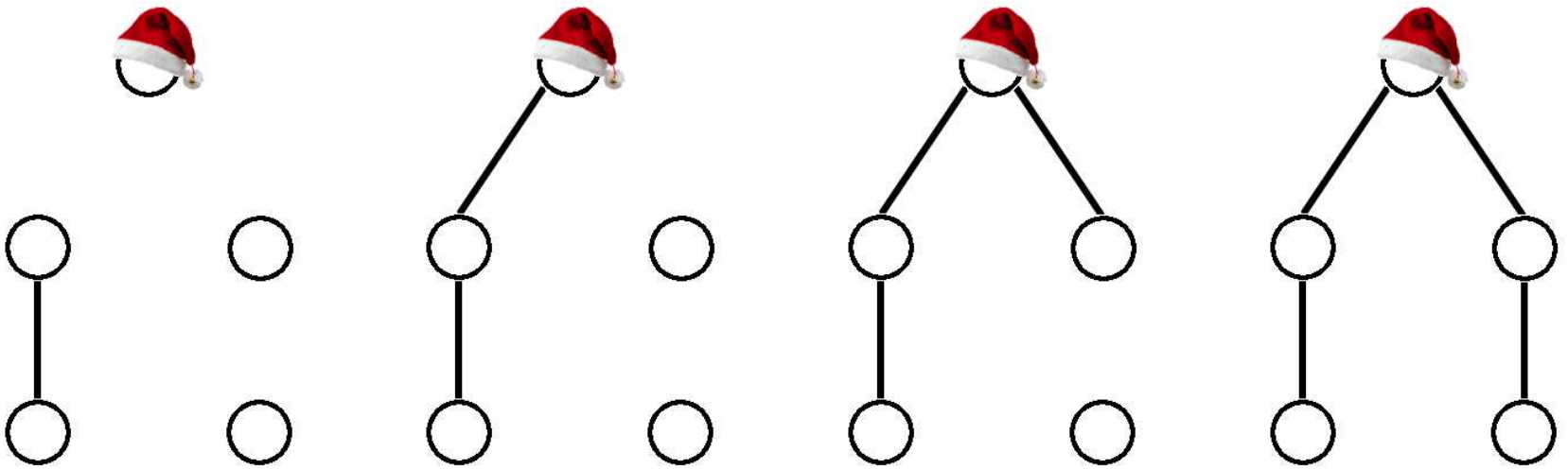
Eine mögliche Lösung:



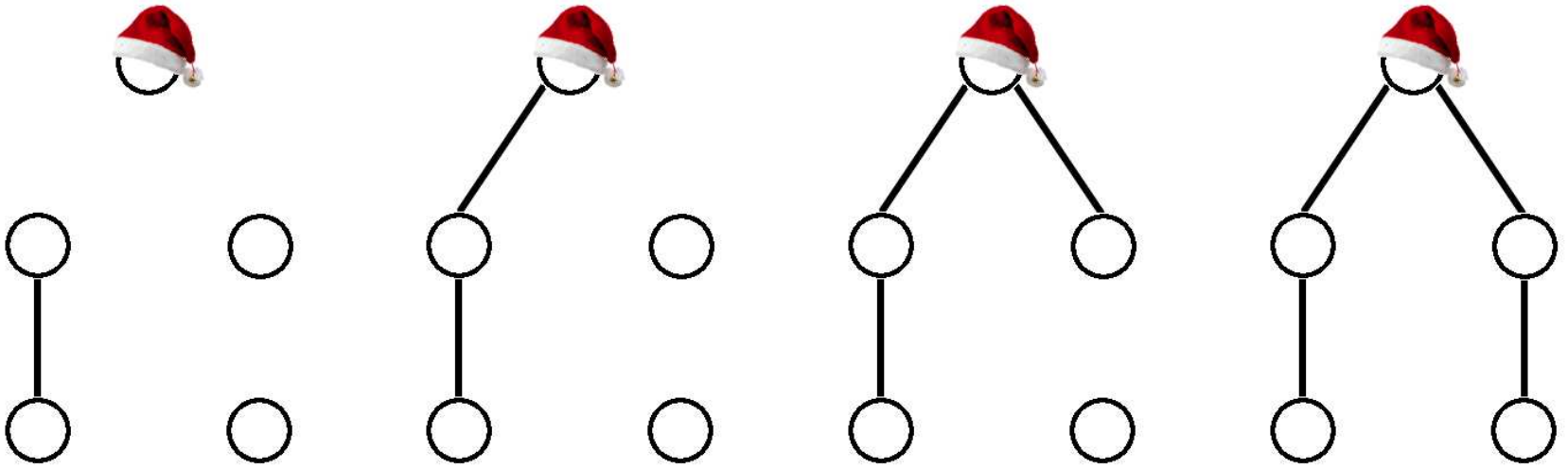
Eine mögliche Lösung:

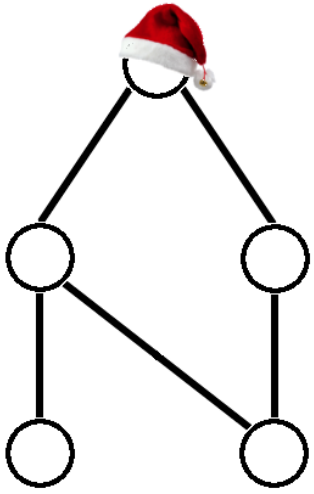


Eine mögliche Lösung:

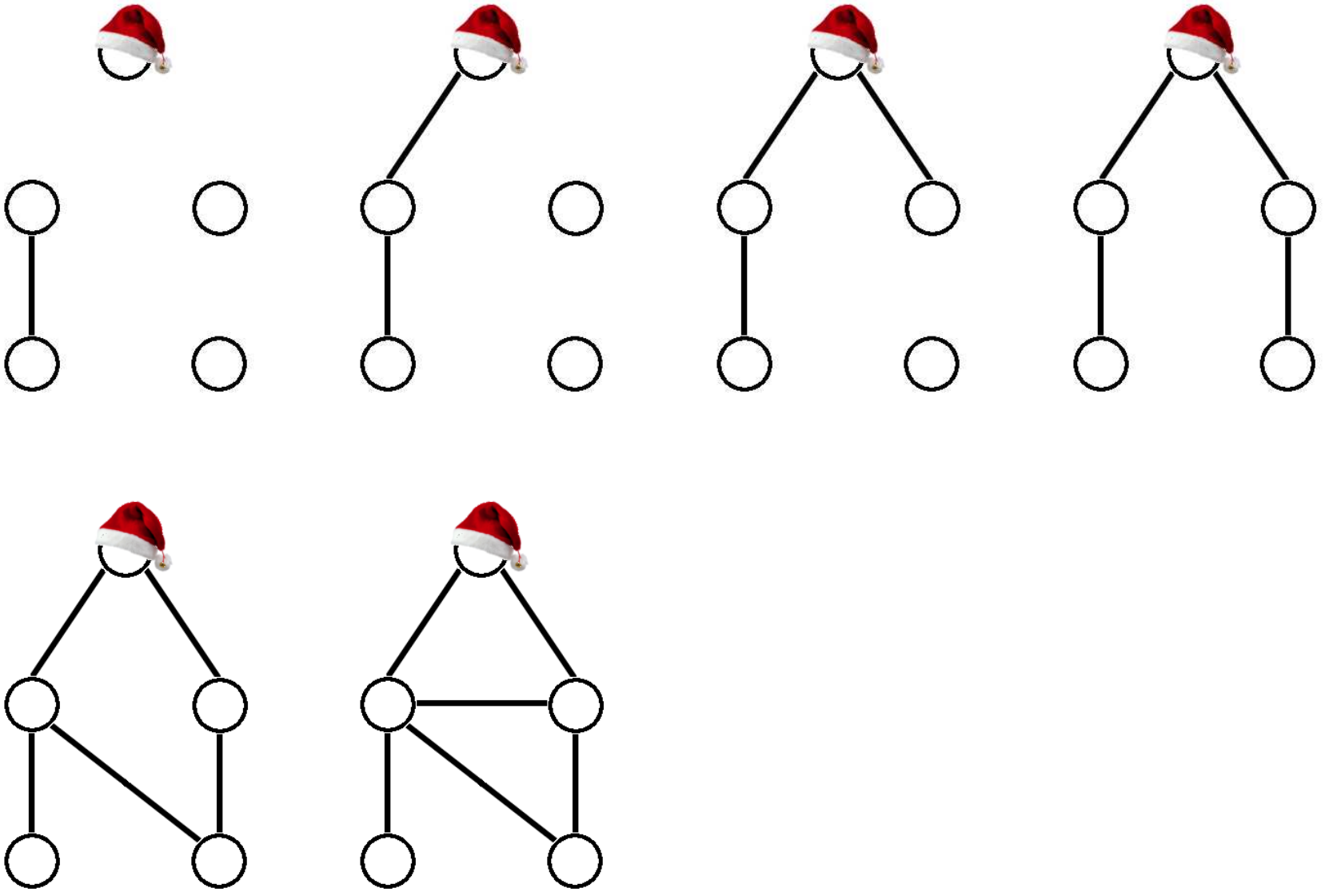


Eine mögliche Lösung:

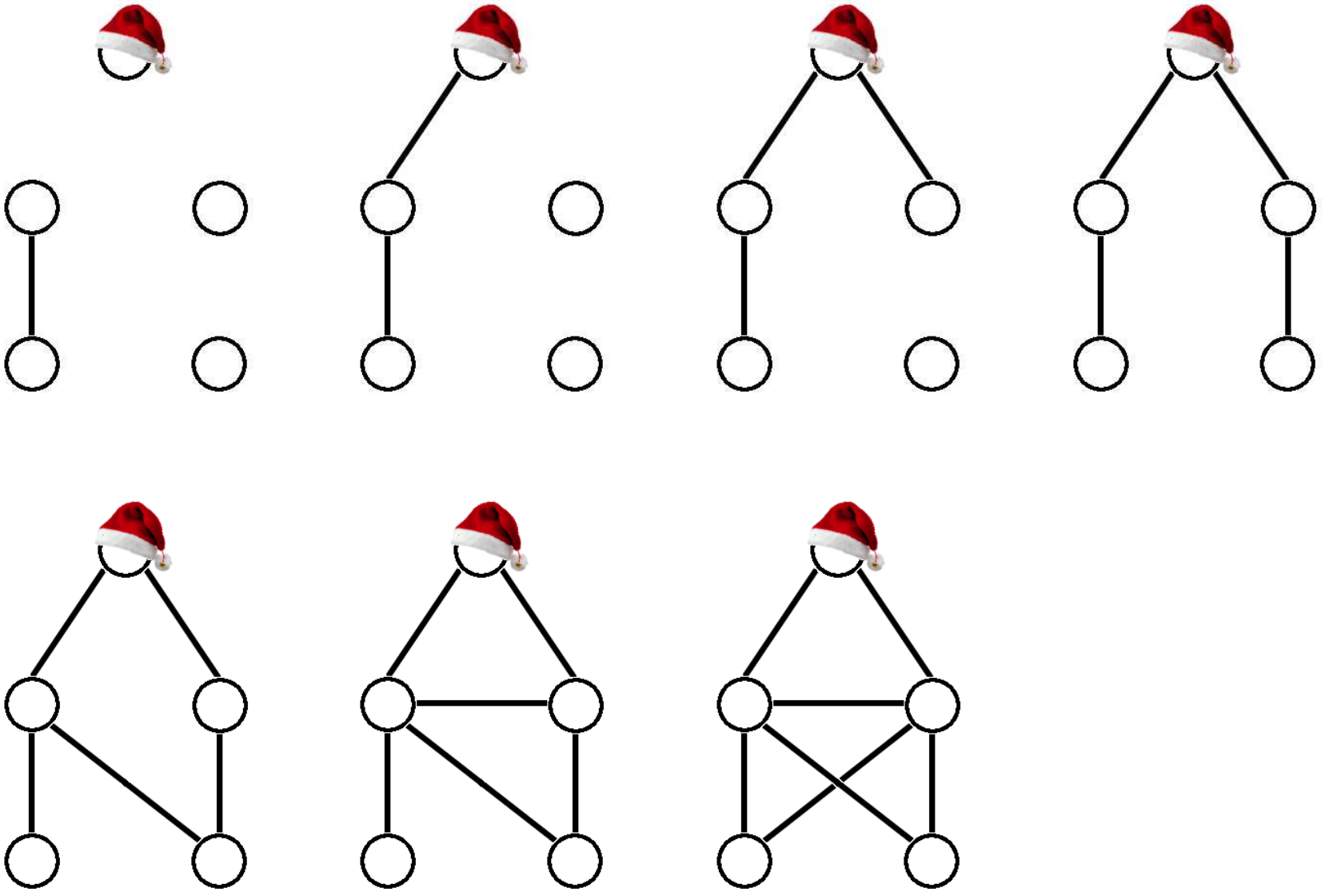




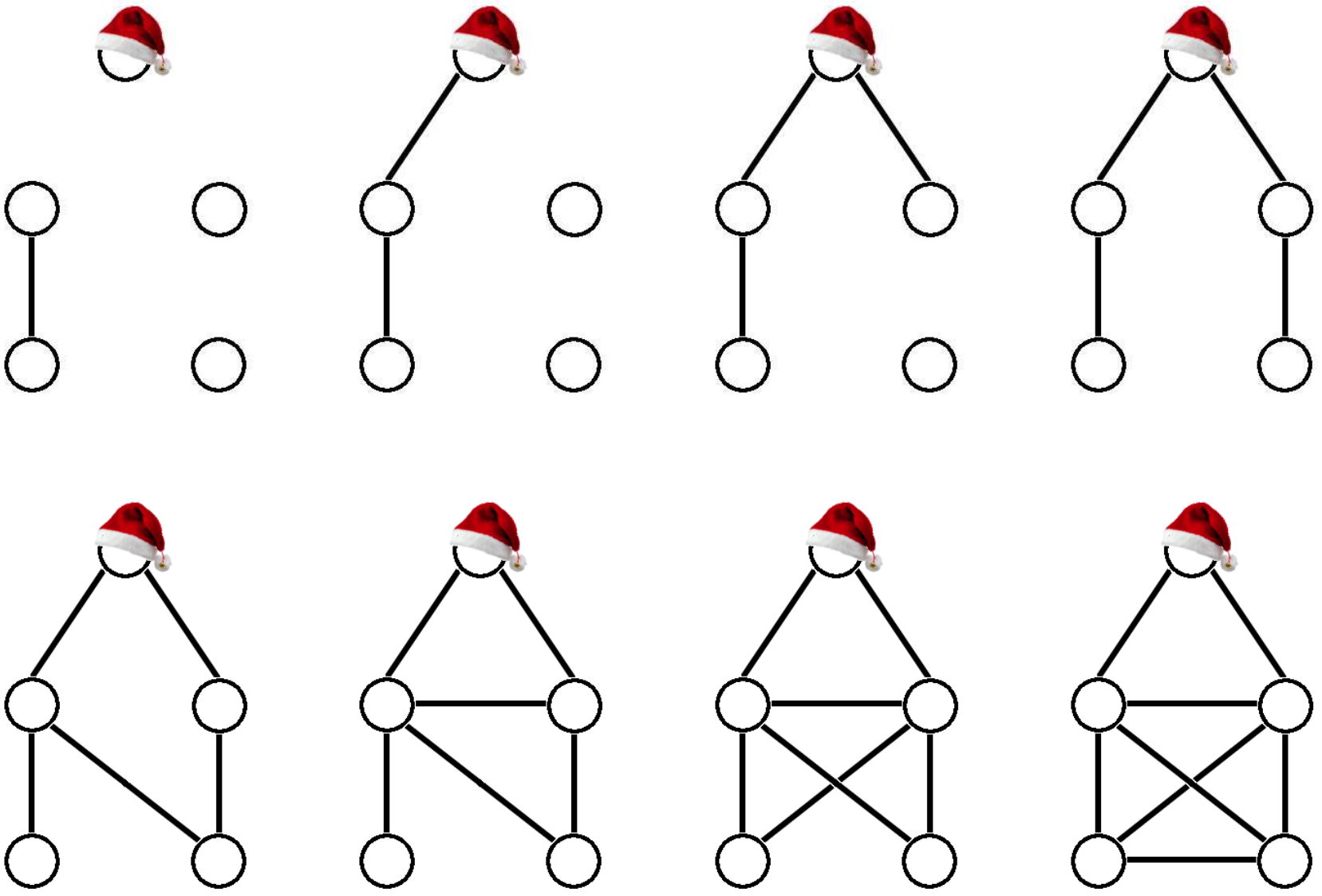
Eine mögliche Lösung:



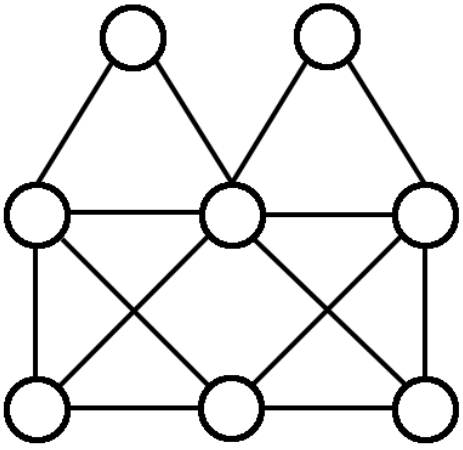
Eine mögliche Lösung:

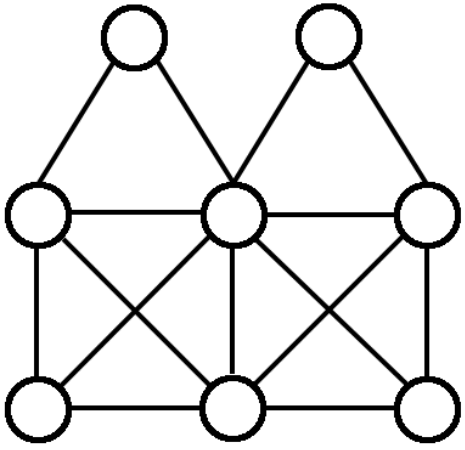


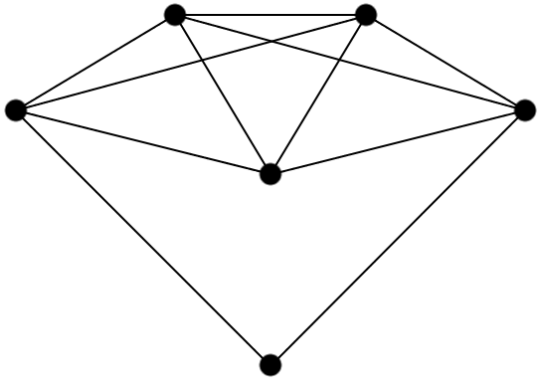
Eine mögliche Lösung:

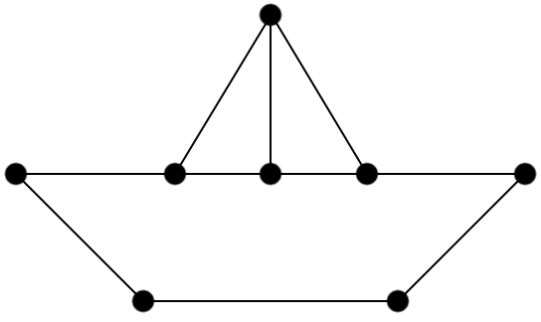


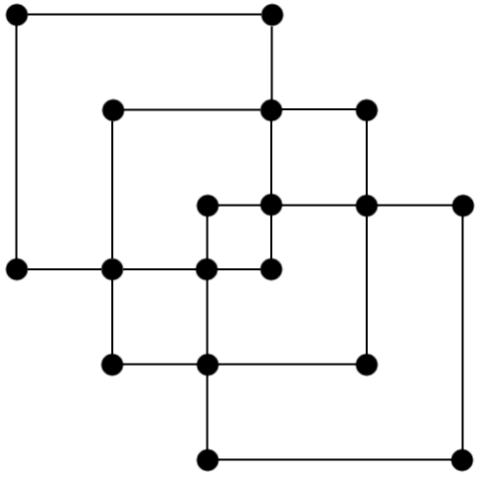
Können diese Figuren auch in einem Zug gezeichnet werden?











Das Färbeproblem

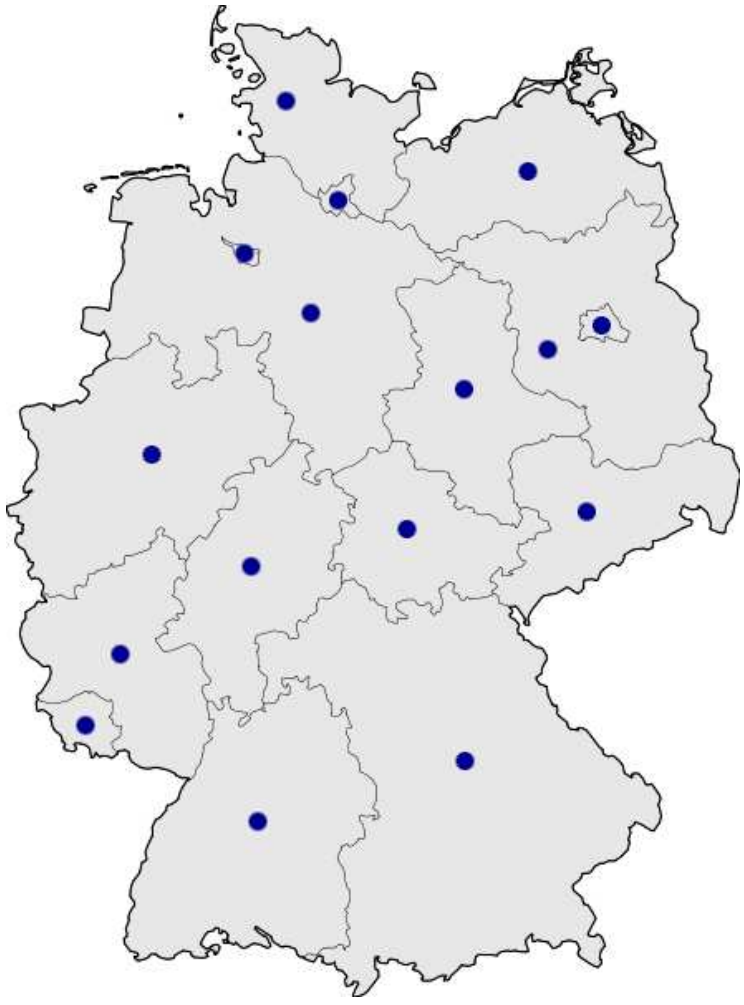
Landkarten färben

Wie viele Farben sind nötig, wenn benachbarte Länder unterschiedliche Farben erhalten sollen?

Beispiel: Bundesländer

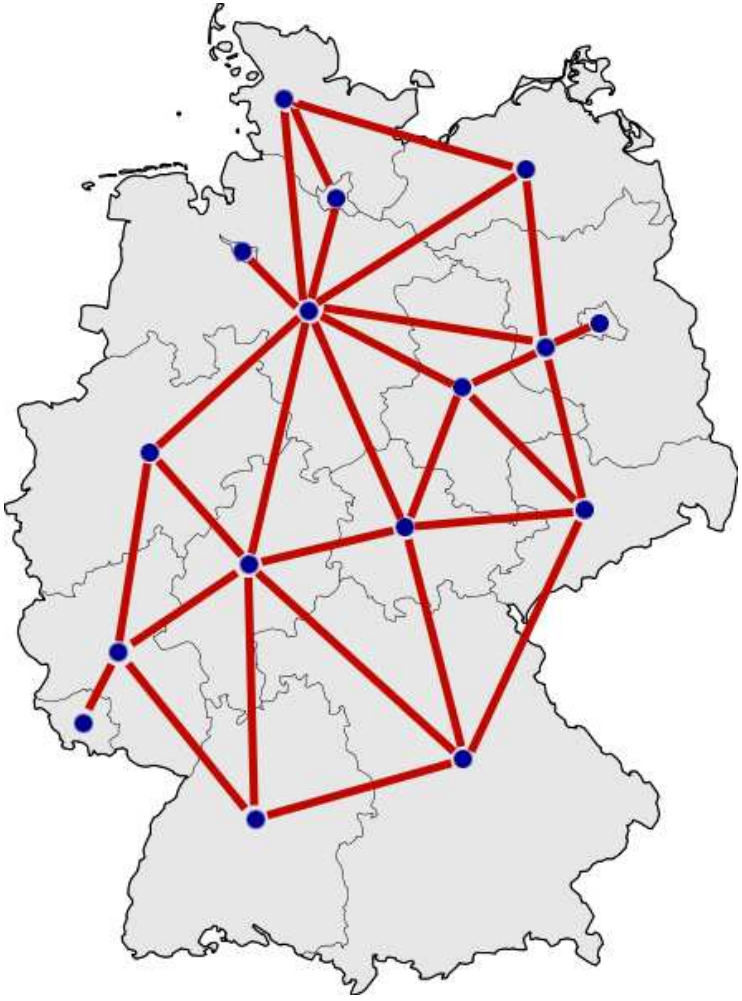
Wie wird aus einer Landkarte ein Graph?

Beispiel: Bundesländer



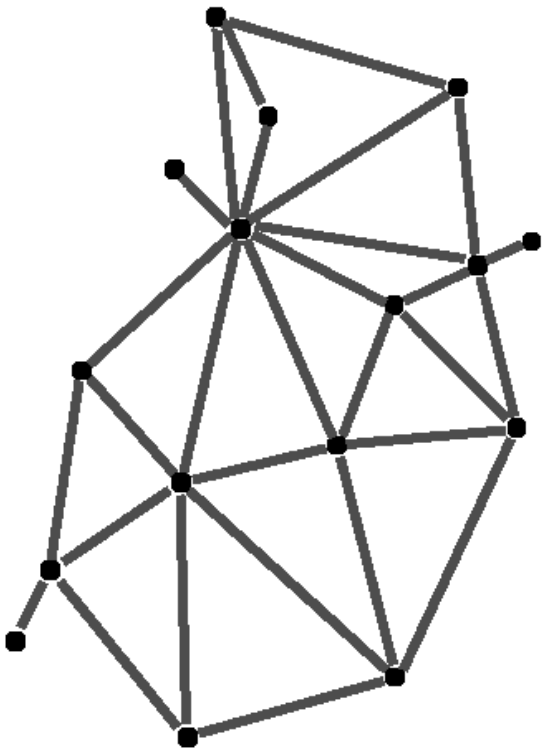
Man setzt für jedes (Bundes-)Land einen Knoten...

Beispiel: Bundesländer



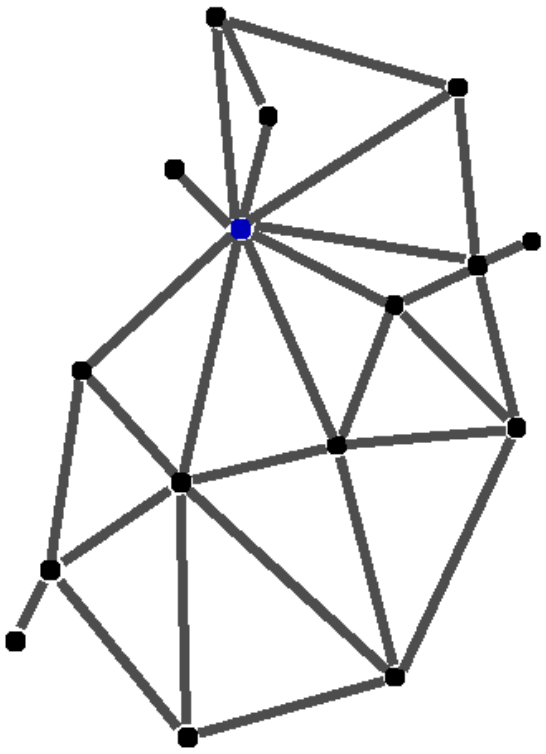
... und Kanten für alle benachbarten Bundesländer.

Beispiel: Bundesländer



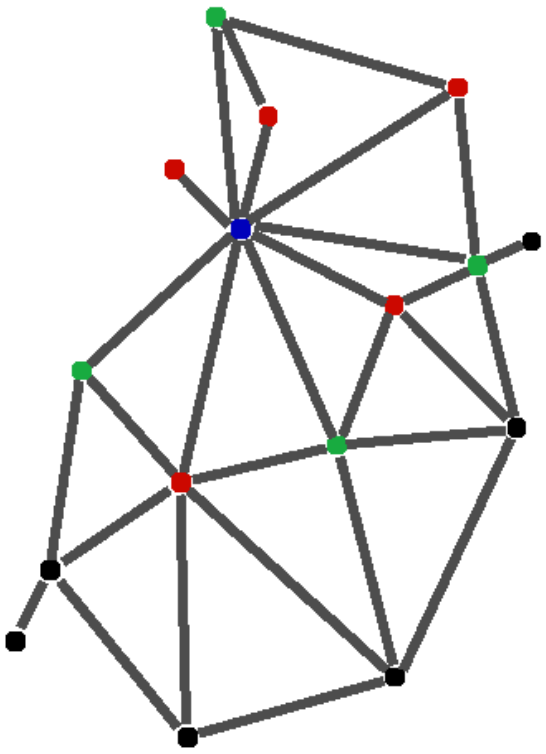
... und für jede Grenze eine Kante.

Beispiel: Bundesländer



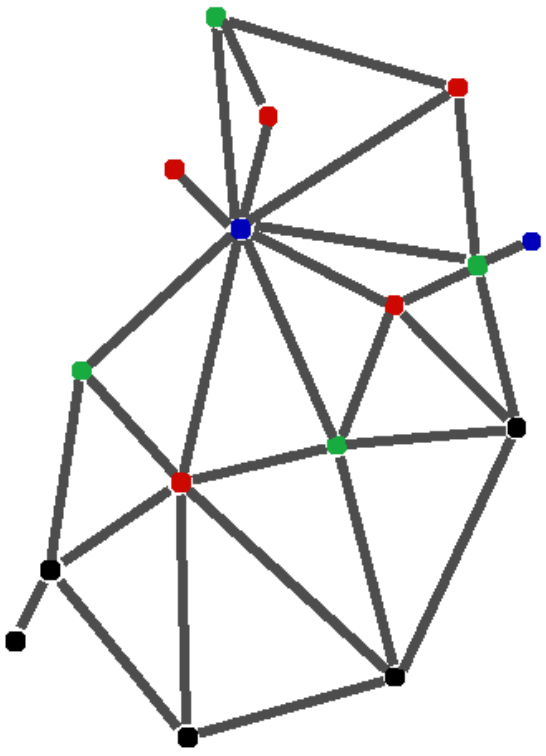
Beginne mit dem Knoten, der die meisten Nachbarn hat. (Niedersachsen)

Beispiel: Bundesländer



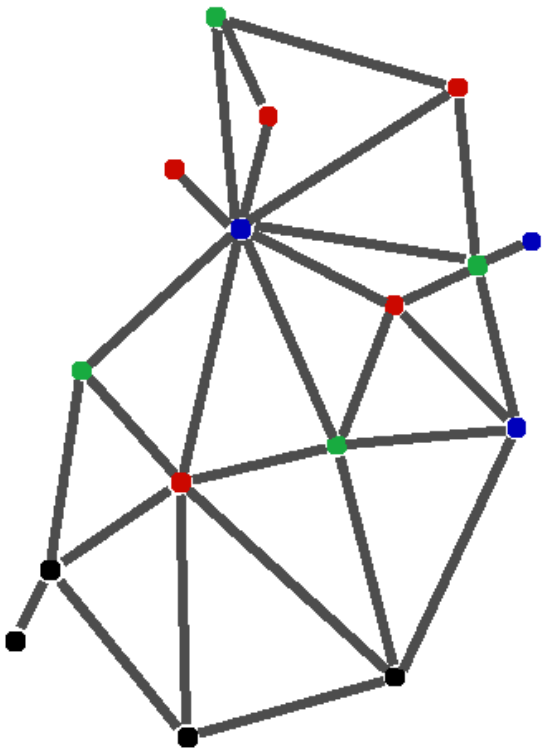
Male als nächstes die angrenzenden Knoten in zwei weiteren Farben immer abwechselnd an.

Beispiel: Bundesländer



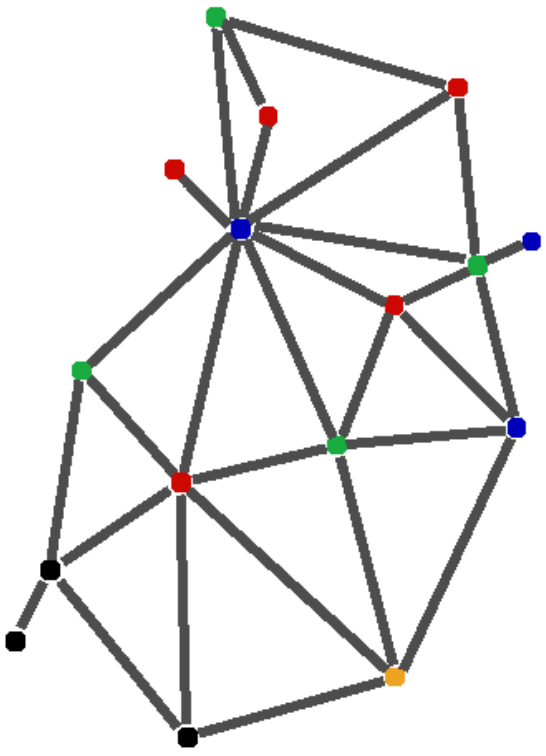
Knoten mit nur einem Nachbarn sind ganz einfach zu färben.

Beispiel: Bundesländer



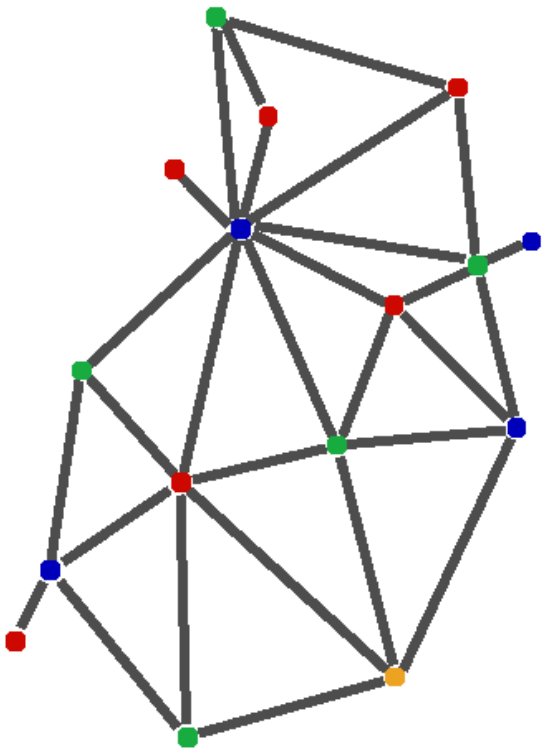
Bisher reichten drei Farben aus, um den Graph zu färben...

Beispiel: Bundesländer



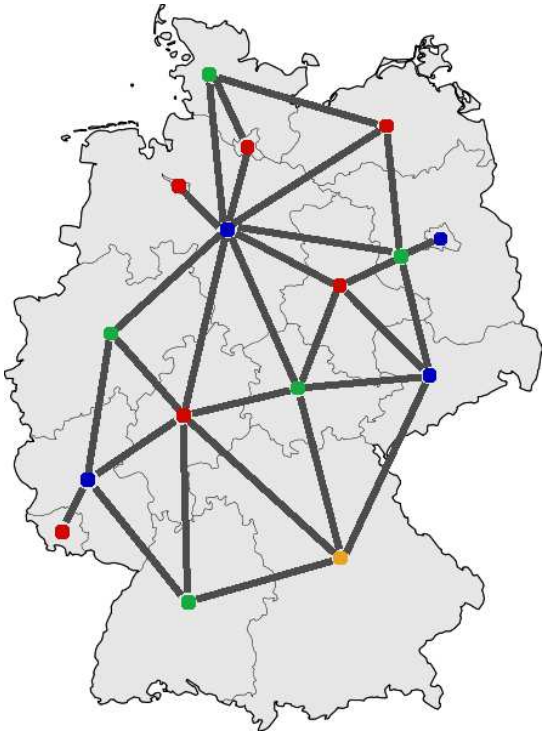
... aber der nächste Knoten hat schon Nachbarn in drei verschiedenen Farben $\Rightarrow$ man benötigt eine vierte Farbe.

Beispiel: Bundesländer

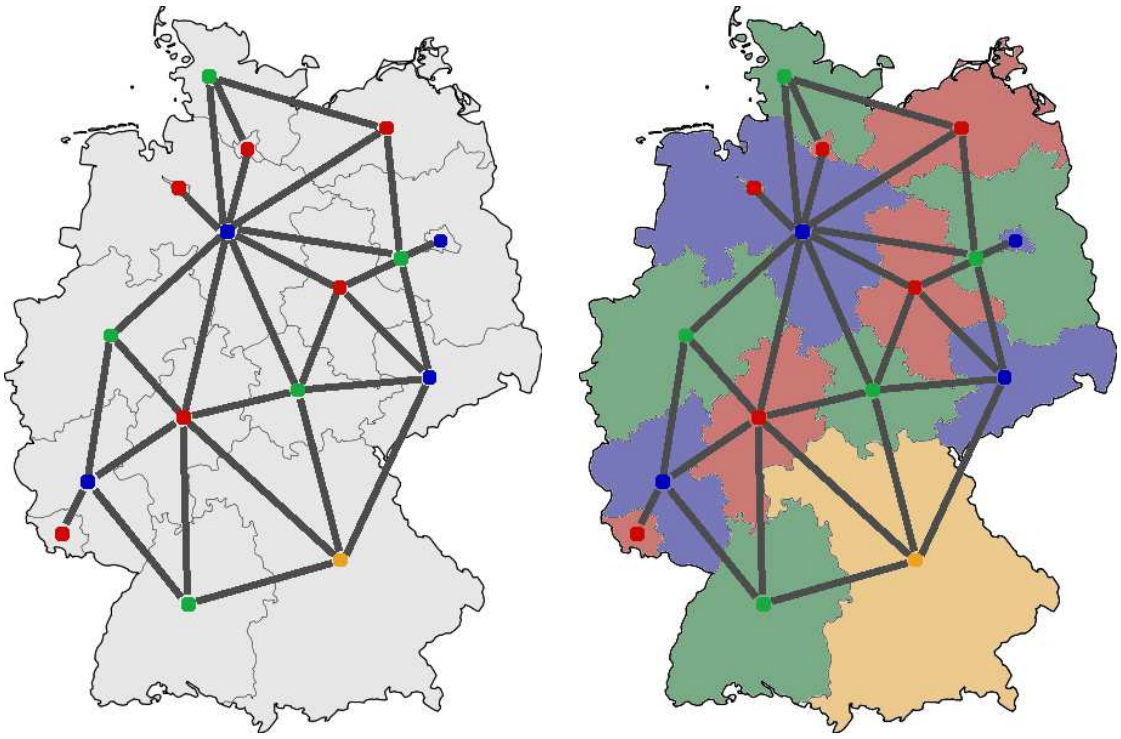


Die restlichen Knoten sind wieder einfach.

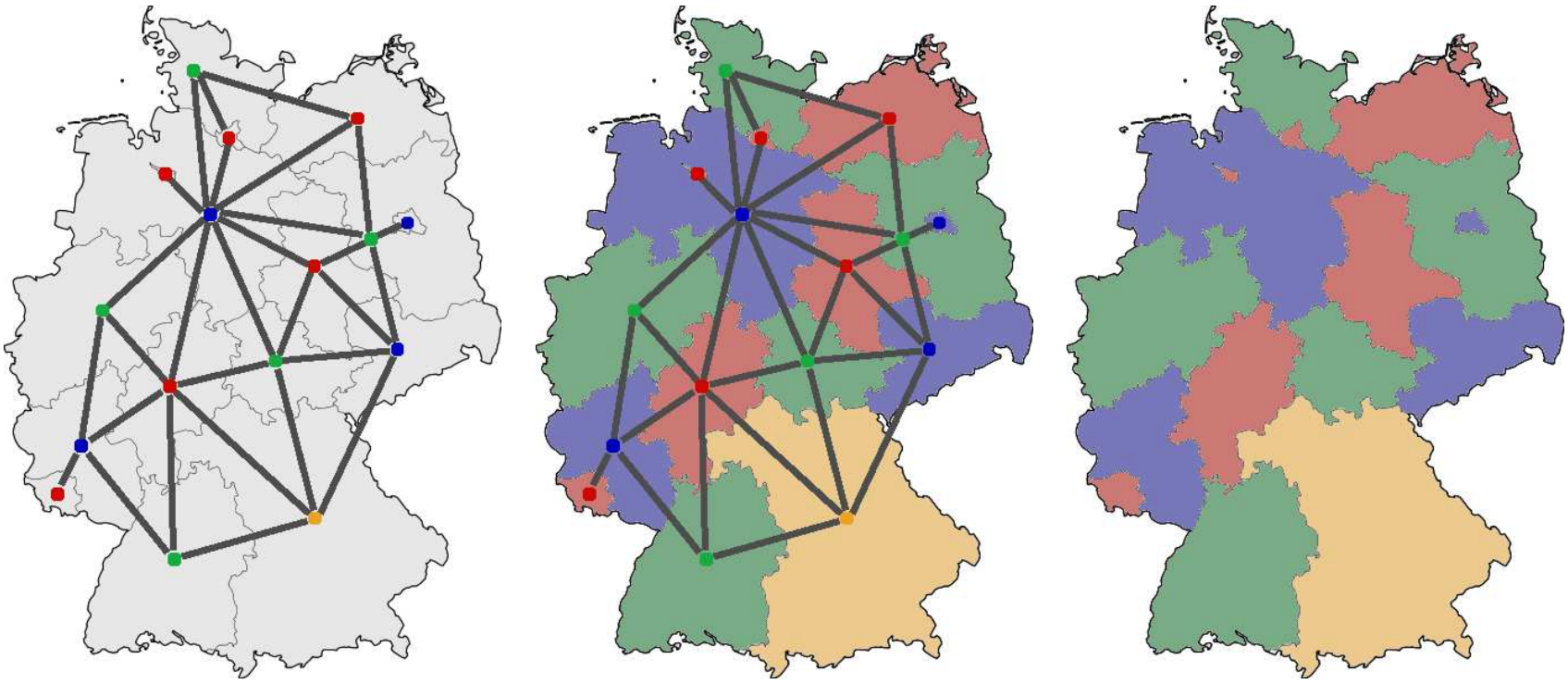
Beispiel: Bundesländer



Beispiel: Bundesländer



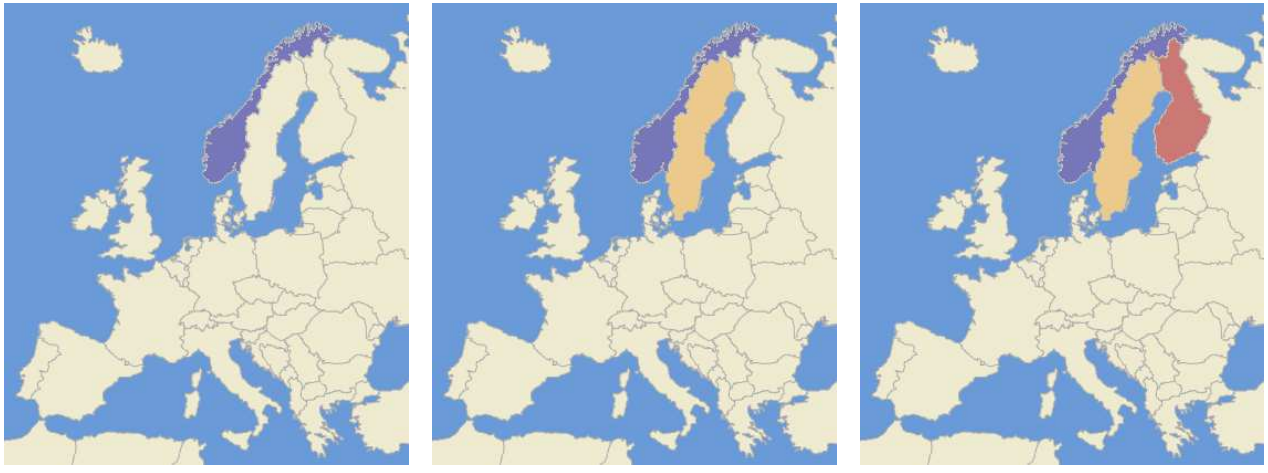
Beispiel: Bundesländer



Zweites Beispiel: Europa

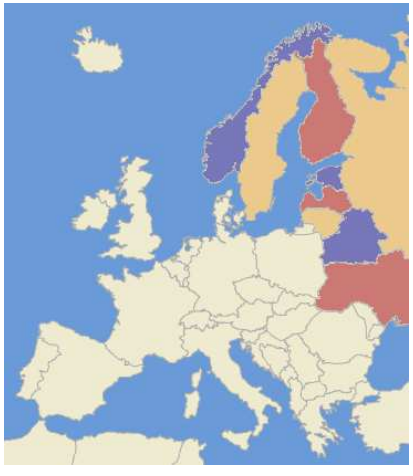
Zweites Beispiel: Europa

Zweites Beispiel: Europa

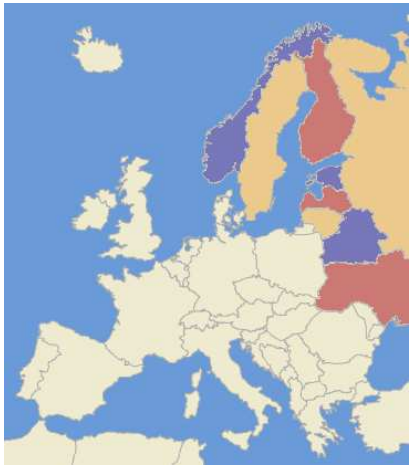


Zweites Beispiel: Europa

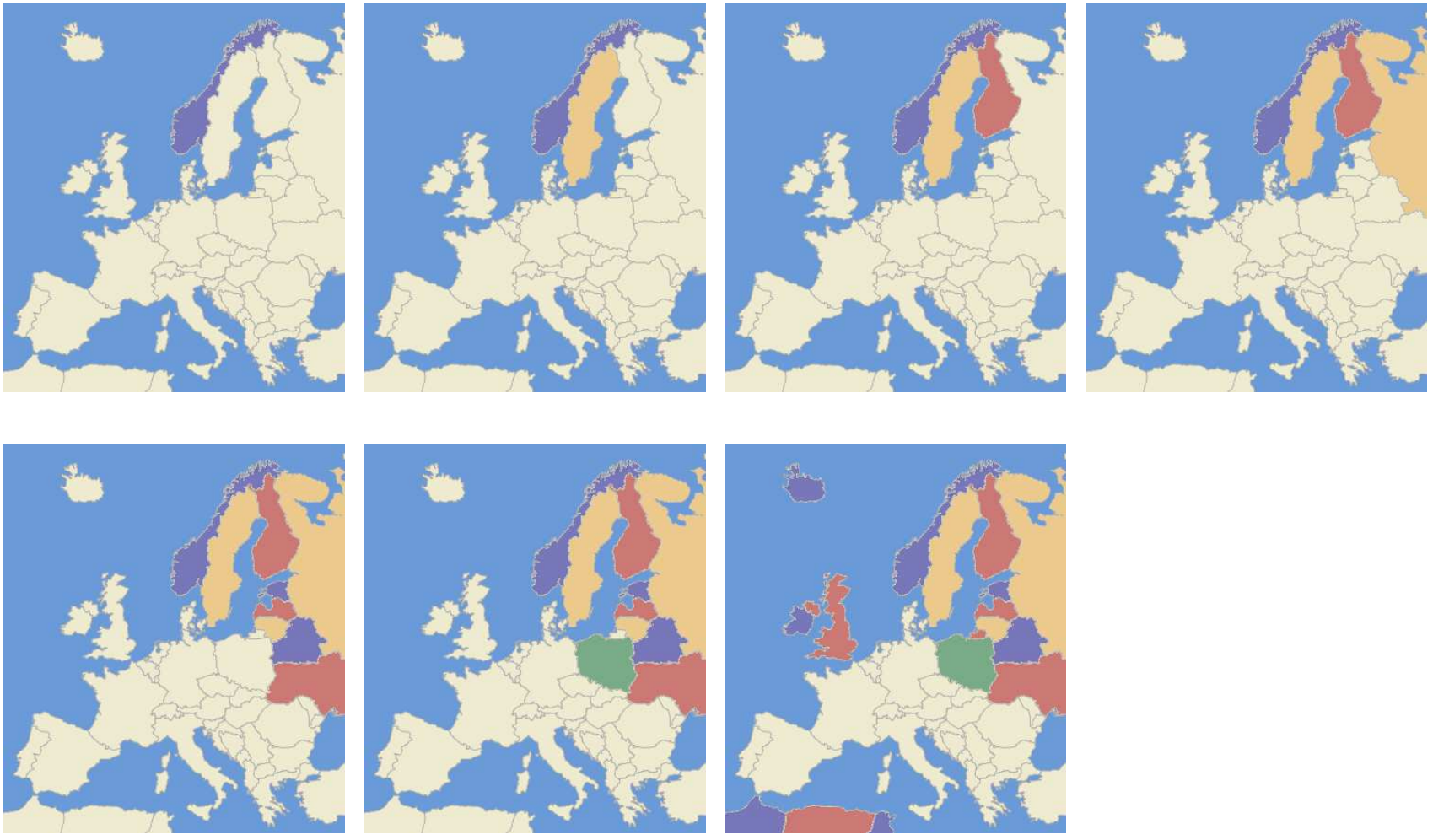
Zweites Beispiel: Europa



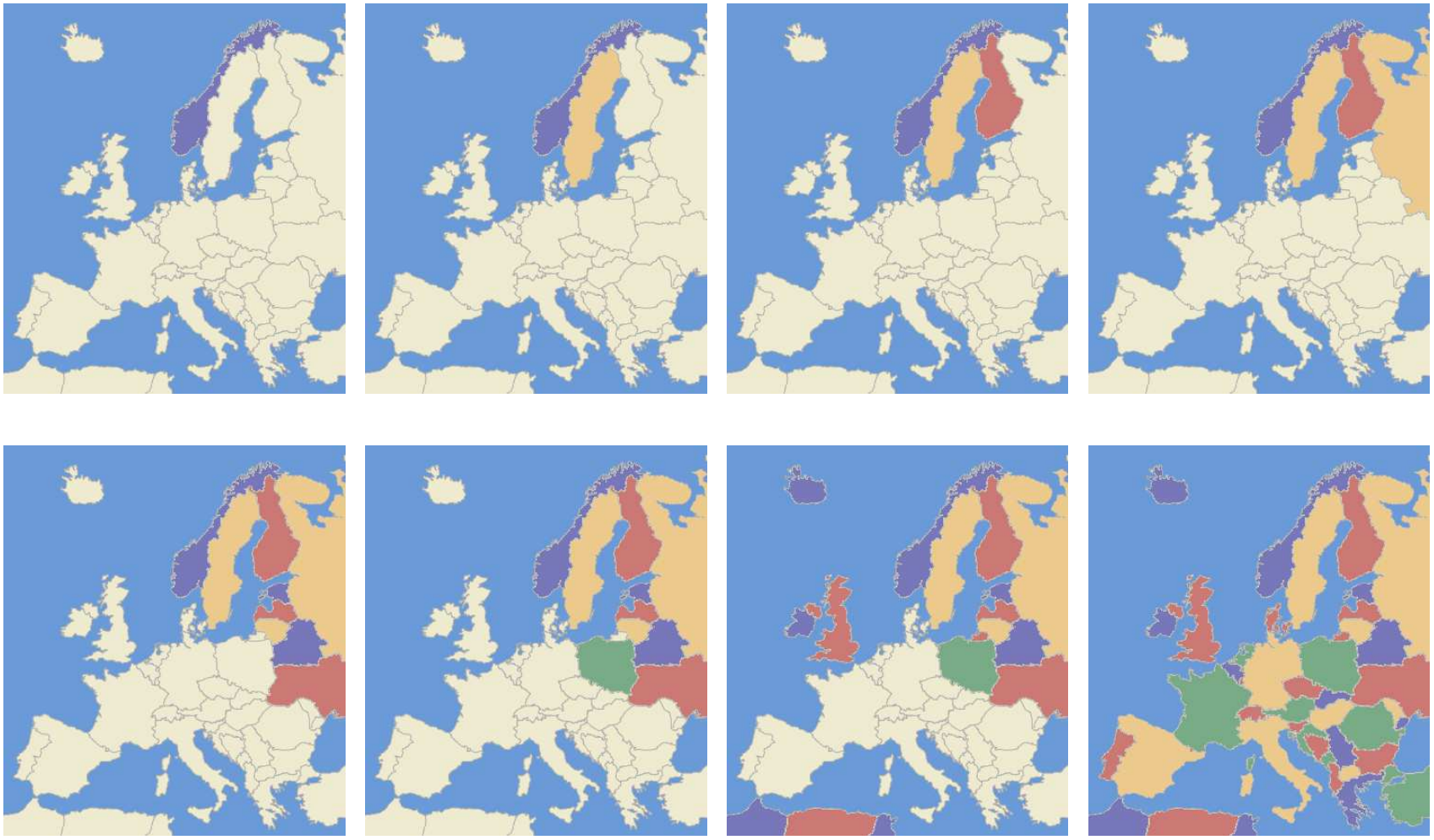
Zweites Beispiel: Europa



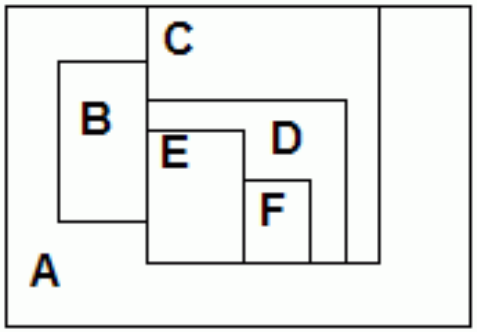
Zweites Beispiel: Europa

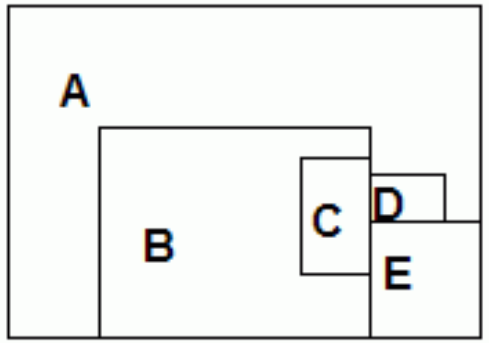


Zweites Beispiel: Europa

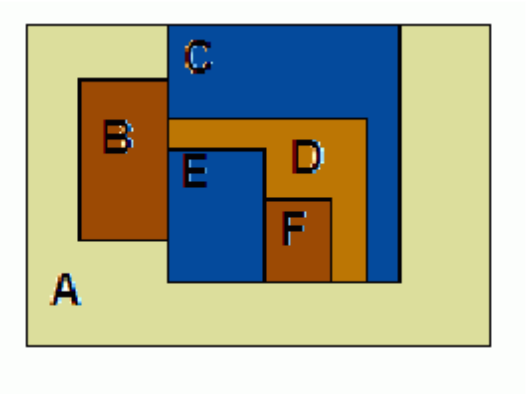


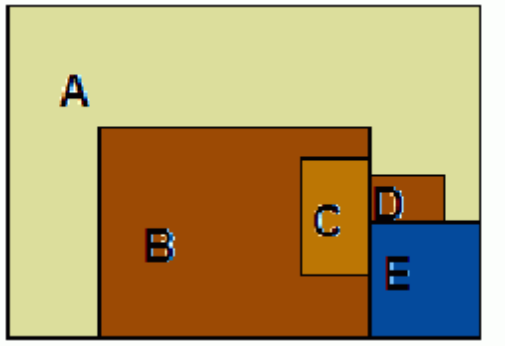
Weitere Beispiele

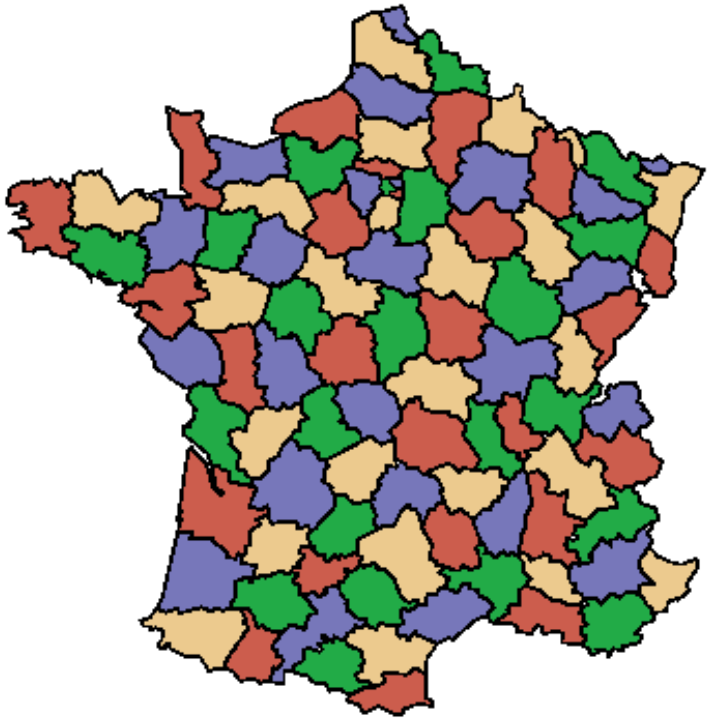




Mögliche Lösungen





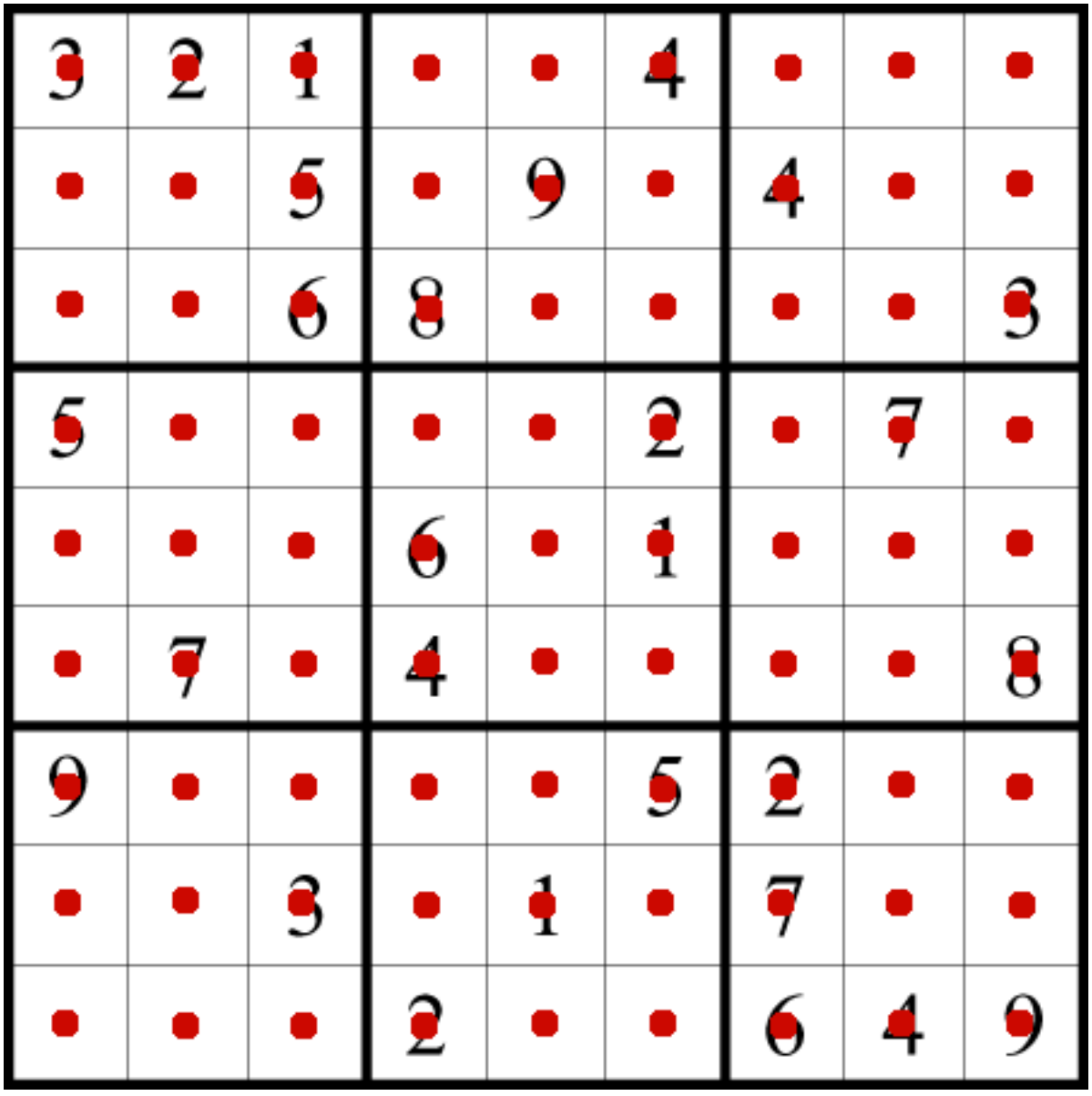


Anwendung des Färbeproblems: Sudoku

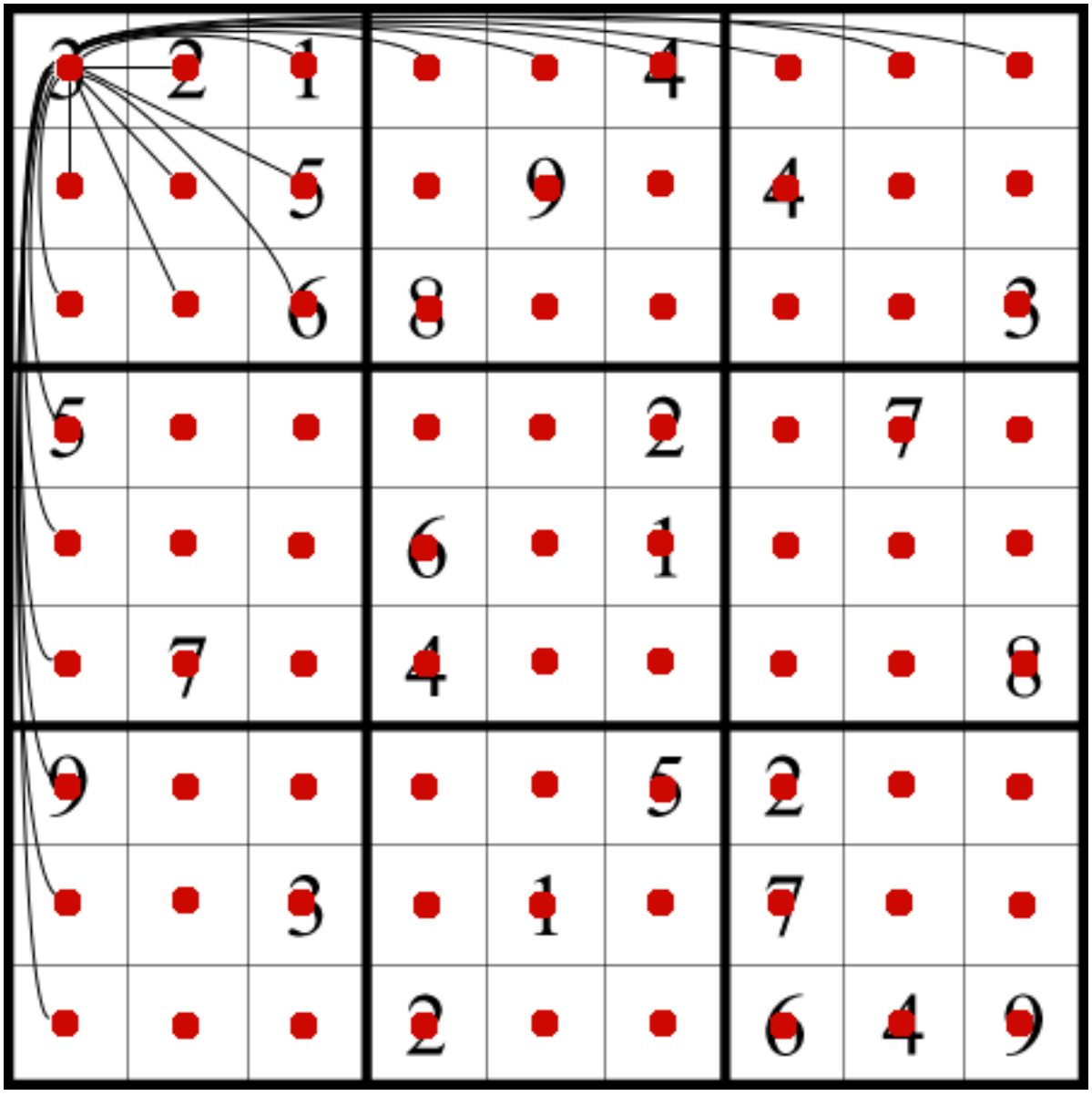
Ein Sudoku-Zahlenrätsel:

3	2	1			4			
		5		9		4		
		6	8					3
5					2		7	
			6		1			
	7		4					8
9					5	2		
		3		1		7		
			2			6	4	9

Hier sind die Knoten...



...und hier ein paar der Kanten.



Die Lösung:

3	2	1	5	6	4	8	9	7
7	8	5	1	9	3	4	6	2
4	9	6	8	2	7	1	5	3
5	1	4	3	8	2	9	7	6
8	3	9	6	7	1	5	2	4
6	7	2	4	5	9	3	1	8
9	6	8	7	4	5	2	3	1
2	4	3	9	1	6	7	8	5
1	5	7	2	3	8	6	4	9

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit

und weiterhin

viel Spaß bei den Kinderforschertagen 2010!