Ein Filter-Trust-Region Verfahren zum Lösen nichtlinearer Zulässigkeitsprobleme mit teuren Funktionen

Markus Kaiser[1], Alexander Thekale[2]

[1] Arbeitsgruppe Optimierung & Approximation
Bergische Universität Wuppertal

[2] Lehrstuhl für Angewandte Mathematik II
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

06. Januar 2010

Übersicht

Anwendungen des Verfahrens

Teure Funktionen sind im Allgemeinen zeitaufwendige oder kostspielige black-boxes, z.B.

- Simulationen,
- Versuche oder
- Anwendungen von Algorithmen auf eine Menge von Testbeispielen.

Zusätzliche Verwendung:
Restorations Phase für ein TR-basiertes Optimierungsverfahren für Probleme mit teuren Funktionen (EFOS von A. Thekale).

Teures Gleichungssystem

Bestimme einen zulässigen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ für:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{I}}(x, u(x)) &\leq 0 \\ c_{\mathcal{E}}(x, u(x)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \begin{array}{lcll} u & : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m & \text{zweimal stetig differenzierbar, teuer} \\ c_{\mathcal{I}} & : & \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^p & \text{zweimal stetig differenzierbar} \\ c_{\mathcal{E}} & : & \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^q & \text{zweimal stetig differenzierbar} \end{array}$$

Umformulierung als billiges System

Idee: Löse teures nichtlineares System durch iteratives Lösen billiger nichtlinearer Systeme:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{I}}(x, m_k^u(x)) &\leq 0 \\ c_{\mathcal{E}}(x, m_k^u(x)) &= 0 \\ x &\in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k) \end{aligned}$$

mit

m_k^u	:	billige Modellfunktion in Iteration k
$Q(x_k, \delta_k)$	:	Kugel mit Radius δ_k um x_k, in der m_k^u hinreichend gut ist

Grundlegende Ideen

- allgemeine nichtlineare Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme
  $\Rightarrow$ Filter-Trust-Region Algorithmus FILTRANE von Gould, Toint (2007) als grundlegendes Lösungsverfahren

- Teure Funktionen
  $\Rightarrow$ Λ-balanciertes Interpolationsmodell von Conn, Scheinberg, Vicente (2008) bzw. Thekale (2010?)

- allgemeines nichtlineares Trust-Region Subproblem
  $\Rightarrow$ Lösungsmethode des Subproblems muss eine Bedingung zur hinreichenden Modellverbesserung erfüllen.

Grundlegende Ideen

- allgemeine nichtlineare Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme
  $\Rightarrow$ Filter-Trust-Region Algorithmus FILTRANE
  von Gould, Toint (2007) als grundlegendes Lösungsverfahren
- Teure Funktionen
  $\Rightarrow$ Λ-balanciertes Interpolationsmodell von
  Conn, Scheinberg, Vicente (2008) bzw. Thekale (2010?)
- allgemeines nichtlineares Trust-Region Subproblem
  $\Rightarrow$ Lösungsmethode des Subproblems muss eine Bedingung zur hinreichenden Modellverbesserung erfüllen.

Allgemeines nichtlineares Zulässigkeitsproblem

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$, welches das nichtlineare Gleichungs-/Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{I}}(x) &\leq 0 \\ c_{\mathcal{E}}(x) &= 0 \end{aligned}$$

mit $c_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $c_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ (zweimal stetig differenzierbar) erfüllt.

Lösungsidee

Ersatzproblem:
Finde einen (lokalen) Minimierer des *nichtlinearen Ausgleichsproblems*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|\vartheta(x)\|_2^2$$

mit der Verletzung der Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\vartheta(x) := \begin{pmatrix} c_{\mathcal{E}}(x) \\ [c_{\mathcal{I}}(x)]_+ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}$$

und $[c_{\mathcal{I}}(x)]_+ := \max[0, c_{\mathcal{I}}(x)]$.

Idee eines Algorithmus (nach Gould, Leyffer, Toint 2004)

Löse

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

mit einem Filter-Trust-Region-Algorithmus:

- minimiere einfaches Modell m_k von f in seinem Gültigkeitsbereich $TR(x_k, \Delta_k) \Rightarrow$ Testpunkt x_k^+
- übernehme x_k^+ für die nächste Iteration, falls x_k^+
  - f hinreichend verbessert oder
  - die Verletzung der Nebenbedingung ϑ hinreichend verbessert,

  sonst verwende x_k
- aktualisiere m_k und Δ_k

Hinreichende Verbesserung von f

Definiere

$$\rho_k := \frac{f(x_k) - f(x_k^+)}{m_k(x_k) - m_k(x_k^+)}.$$

Akzeptiere x_k^+ wenn

$$\rho_k > \eta_1$$

für $0 < \eta_1 < 1$.

Hinreichende Verbesserung von ϑ

Definition (Dominanz)
Seien $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$. ϑ_1 *dominiert* ϑ_2 genau dann, wenn

$$\vartheta_{1i} \leq \vartheta_{2i}$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Hinreichende Verbesserung von ϑ

Definition (Dominanz)
Seien $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$. ϑ_1 *dominiert* ϑ_2 genau dann, wenn

$$\vartheta_{1i} \leq \vartheta_{2i}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

Definition (Filter)
Ein Filter $\mathcal{F}$ ist eine Menge von Punkten $\vartheta_j \in \{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_k\}$, $\vartheta_j := \vartheta(x_j)$, so dass kein ϑ_j von einem anderen in $\mathcal{F}$ dominiert wird.

Hinreichende Verbesserung von ϑ

Akzeptanzbedingung

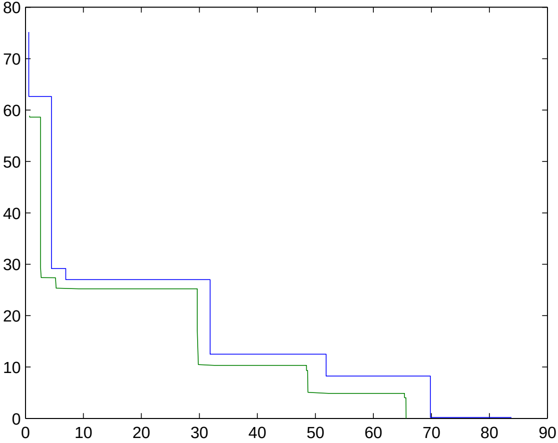
Ein Testpunkt x_k^+ ist genau dann *akzeptabel* für den Filter-Trust-Region Algorithmus, wenn gilt:

$$\forall \vartheta_j \in \mathcal{F} \qquad \exists i \in \{1, \ldots, n\} : \vartheta_i(x_k^+) < \vartheta_{ji} - \gamma \|\vartheta_j\|_2$$

mit $\gamma \in (0, 1)$.

Der Strafterm $\gamma \|\vartheta_j\|_2$ garantiert eine Mindestverbesserung.

Zweidimensionaler Filter



Filter-Trust-Region-Algorithmus (Übersicht)

Schritt 0: Initialisierung

Schritt 1: Optimalitätstest (STOP, falls $\vartheta_k = 0$ oder $\|\nabla f(x_k)\| = 0$)

Schritt 2: Testpunkt mit Hilfe der Modellfunktion bestimmen

Schritt 3: Exaktheit des Modells bestimmen (ρ_k berechnen)

Schritt 4: Akzeptanzbedingung prüfen (hinreichende Verbesserung in f bzw. ϑ?)

Schritt 5: Aktualisierung des TR-Radius

Modellfunktionen

Mögliche Modellfunktionen, wobei g der Gradient und H die Hessematrix der Funktion $f(x)$ in x_k ist:

- Lineare Approximation der Zielfunktion:

$$m_1(x_k + s) = f(x_k) + \langle g, s \rangle$$

- Quadratische Approximation der Zielfunktion:

$$m_2(x_k + s) = f(x_k) + \langle g, s \rangle + \frac{1}{2} \langle s, Hs \rangle$$

Modellfunktionen

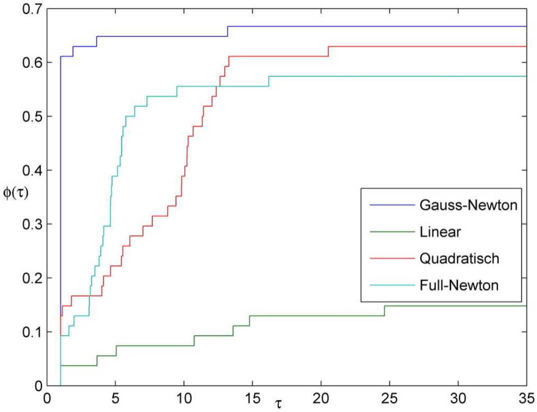
- Gauß-Newton-Modell:

$$m_3\left(x_k+s\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p+q}\left\|c_i\left(x_k\right)+\nabla c_i(x_k)s\right\|_2^2$$

- Volles Newton-Modell:

$$m_4\left(x_k+s\right)=m_3\left(x_k+s\right)+\frac{1}{2}(x_k+s)^\top H(x_k+s)$$

Vergleich der Modellfunktionen



Wichtige Annahmen für den Konvergenzbeweis

1. $c_{\mathcal{I}}$, $c_{\mathcal{E}}$ zweimal stetig differenzierbar
2. alle Iterationspunkte liegen in einem beschränkten Gebiet
3. m_k zweimal stetig differenzierbar
4. $m_k(x_k) = f(x_k)$ und $\nabla m_k(x_k) = \nabla f(x_k) =: g_k(x_k)$
5. es existieren Fehlerschranken für m_k

Wichtige Eigenschaften für die Konvergenz

- Hinreichende Modellverbesserung: Für alle k gilt:

$$m_k(x_k) - m_k(x_k + s_k) \geq \kappa_{mdc} \|g_k(x_k)\| \min \left[\frac{\|g_k(x_k)\|}{\beta_k}, \Delta_k \right]$$

mit einer Konstanten $\kappa_{mdc} \in (0, 1)$, wobei $x_k + s_k$ der Testpunkt aus dem FTR-Algorithmus in Iteration k ist und

$$\beta_k := 1 + \max_{x \in TR_k} \|\nabla_{xx} m_k(x)\|.$$

- Approximationsfehler

$$\|m_k(x) - f(x)\|_2 \leq \kappa_u \Delta_k^2$$

Konvergenzresultat

Konvergenzresultat:

$$\lim_{k \to \infty} \|\nabla_x f(x_k)\|_2 = 0$$

und falls unendlich viele Punkte im Filter hinzugefügt werden

$$\lim_{k \to \infty} \|\vartheta(x_k)\|_2 = 0$$

Grundlegende Ideen

- allgemeine nichtlineare Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme
  $\Rightarrow$ Filter-Trust-Region Algorithmus FILTRANE von Gould, Toint (2007) als grundlegendes Lösungsverfahren
- Teure Funktionen
  $\Rightarrow$ Λ-balanciertes Interpolationsmodell von Conn, Scheinberg, Vicente (2008) bzw. Thekale (2010?)
- allgemeines nichtlineares Trust-Region Subproblem
  $\Rightarrow$ Lösungsmethode des Subproblems muss eine Bedingung zur hinreichenden Modellverbesserung erfüllen.

Lagrange-Interpolation

Gegeben: Stützstellen $\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m$

Lagrange-Basisfunktionen:

$$L_i(\bar{x}_j) := \begin{cases} 1 & \text{für} \qquad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lagrange-Interpolation

Gegeben: Stützstellen $\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m$

Lagrange-Basisfunktionen:

$$L_i(\bar{x}_j) := \begin{cases} 1 & \text{für} \qquad i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Approximationsmodell:

$$m(x) = \sum_{i=1}^{m} f(\bar{x}_i) L_i(x)$$

Λ-Balanciertheit

Definition:
Die Menge der Stützstellen $\bar{X} := \{\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m\}$ ist Λ-*balanciert* in einer Menge $\mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$ genau dann, wenn

$$\Lambda(\bar{X}, \delta_k) := \max_{i=0,\ldots,m} \max_{x \in \mathcal{Q}(x_k,\delta_k)} |L_i(x)| \leq \Lambda$$

für ein von der Wahl von $\bar{X} \subseteq \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$ unabhängiges $\Lambda > 0$.

Bemerkung: Λ ist abhängig von n.

Approximationsfehler

Conn, Scheinberg und Vicente (2006) bzw. Thekale (2010?):

Falls $\bar{X}$ Λ-balanciert ist in $\mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$, f stetig differenzierbar und ∇f Lipschitz-stetig in einer offenen Menge, die $\mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$ enthält, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\|m(x) - f(x)\|_2 &\leq \kappa_u \delta_k^2 \\
\|\nabla m(x) - \nabla f(x)\|_2 &\leq \kappa_{gu} \delta_k
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$.

Modellfunktion m_k^u der teuren Funktion u

- linear ($n+1$ Stützstellen $\bar{X} = \{\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n\}$ inklusive x_k)
- basierend auf Lagrange Basispolynomen

$$m_k^u(x) = \sum_{i=0}^{n} u(\bar{x}_i) L_i(x) \quad \text{with} \quad L_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = \bar{x}_i \\ 0 & \text{if} \quad x \in \bar{X} \setminus \{\bar{x}_i\} \end{cases}$$

- Λ-Balanciertheit, falls benötigt

$$\max_{i=0,\ldots,n} \max_{x \in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)} |L_i(x)| \leq \Lambda$$

Problem

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$, welches das nichtlineares Gleichungs-/Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{I}}(x, u(x)) &\leq 0 \\ c_{\mathcal{E}}(x, u(x)) &= 0 \end{aligned}$$

mit
$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ teuer (zweimal stetig differenzierbar) und $c_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^p$, $c_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^q$ (zweimal stetig differenzierbar) erfüllt.

Problemformulierung

Idee: Löse teures nichtlineares System durch iteratives Lösen des billigen nichtlinearen Systems:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{I}}(x, m_k^u(x)) &\leq 0 \\ c_{\mathcal{E}}(x, m_k^u(x)) &= 0 \\ x &\in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k) \end{aligned}$$

mit

m_k^u	:	billige Modellfunktion
$Q(x_k, \delta_k)$	:	Kugel mit Radius δ_k um x_k, in der m_k^u hinreichend gut ist

Formulierung als Minimierungsproblem

Ersatzproblem:
Finde einen (lokalen) Minimierer des beschränkten *nichtlinearen Ausgleichsproblems*

$$\begin{array}{rrcl} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x, m_k^u(x)) & = & \frac{1}{2}\|\vartheta(x, m_k^u(x))\|_2^2 \\ s.t. & x & \in & \mathcal{Q}(x_k, \delta_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_k\|_\infty \leq \delta_k\} \end{array}$$

mit der Verletzung der Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$\vartheta(x, m_k^u(x)) := \begin{pmatrix} c_{\mathcal{E}}(x, m_k^u(x)) \\ [c_{\mathcal{I}}(x, m_k^u(x))]_+ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}$$

FTR-Algorithmus mit teuren Funktionen

Schritt 0: (Initialisierung) Gegeben sind Startpunkt x_0, Trust-Region-Radius $\delta_0 = \delta_{\mathrm{ref}} > 0$, und Konstanten. Berechne $c_0 = c(x_0, u(x_0))$, ϑ_0 und bestimme Modell m_0^u von u. Setze $k = 0$, $RESTRICT = 0$ und $\mathcal{F} = \emptyset$.

Schritt 1: (Optimalitätstest) STOP, falls $\vartheta(x_k, u(x_k)) = 0$ oder $\|g_k\| = 0$ für ein zulässiges Model m_k^u in $\mathcal{Q}_k(x_k, \delta_k)$ für ein $\delta_k \in (0, \mu\|g_k\|)$.
Falls m_k^u nicht zulässig in $\mathcal{Q}_k(x_k, \mu\|g_k\|) \Rightarrow$ Verbesserungsschritte und gehe zu Schritt 1.

FTR-Algorithmus mit teuren Funktionen

Schritt 2: (Testpunkt) Versuche x_k^+ zu berechnen, der $f(x, m_k^u(x))$ hinreichend reduziert und für den $x_k^+ \in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$ gilt, falls $RESTRICT = 1$.
Falls unmöglich, setze $x_{k+1} = x_k$, $RESTRICT = 1$, $\delta_{k+1} = \gamma_0 \delta_k$, verbessere das Modell zu m_{k+1}. Gehe zu Schritt 1.

Schritt 3: (Bestimmen von ρ_k) Definiere

$$\rho_k = \frac{f(x_k, u(x_k)) - f(x_k^+, u(x_k^+))}{f(x_k, m_k^u(x_k)) - f(x_k^+, m_k^u(x_k^+))}.$$

Falls $\rho_k \geq \eta_1$, setze $\mathcal{X}_k = \{x_k^+\}$, sonst $\mathcal{X}_k = \{x_k\}$.

FTR-Algorithmus mit teuren Funktionen

Schritt 4: (Modelverbesserung) Falls $\rho_k < \eta_2$ und m_k^u ist unzulässig in $\mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$, verbessere das Modell zu m_{k+1}^u und vergrößere $\mathcal{X}_k$.

Step 5: (Neuer Testpunkt) Bestimme $\hat{x}_k \in \mathcal{X}_k$, so daß

$$f(\hat{x}_k, u(\hat{x}_k)) = \min_{x \in \mathcal{X}_k} f(x, u(x)).$$

Setze $\hat{\vartheta}_k := \vartheta(\hat{x}_k)$ und definiere

$$\hat{\rho}_k = \frac{f(x_k, u(x_k)) - f(\hat{x}_k, u(\hat{x}_k))}{f(x_k, m_k^u(x_k)) - f(x_k^+, m_k^u(x_k^+))}.$$

FTR-Algorithmus mit teuren Funktionen

Step 6: (Akzeptanztest)

- Falls $\hat{x}_k$ akzeptabel in $\mathcal{F}$:
  setze $x_{k+1} = \hat{x}_k$, $RESTRICT = 0$, und, falls $\hat{x}_k \notin \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$ oder $\hat{\rho}_k < \eta_1$, füge $\hat{\vartheta}_k$ zu $\mathcal{F}$ hinzu.
- Falls $\hat{x}_k$ nicht akzeptabel in $\mathcal{F}$:
  Falls $\hat{x}_k \in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$ und $\hat{\rho}_k \geq \eta_1$, setze $x_{k+1} = \hat{x}_k$ und $RESTRICT = 0$. Sonst setze $x_{k+1} = x_k$ und $RESTRICT = 1$.

Step 7: (Trust-Region Radius) Falls $x \in \mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$, setze $\delta_{\mathrm{ref}} = \delta_k$, falls $\hat{\rho} \geq \eta_1$ oder m_k^u ist gültig in $\mathcal{Q}(x_k, \delta_k)$, und setze

$$\delta_{k+1} \in \begin{cases} [\gamma_0 \delta_{\mathrm{ref}}, \gamma_1 \delta_{\mathrm{ref}}] & \text{if} \quad \hat{\rho}_k < \eta_1 \\ [\gamma_1 \delta_{\mathrm{ref}}, \delta_{\mathrm{ref}}] & \text{if} \quad \hat{\rho}_k \in [\eta_1, \eta_2) \\ [\delta_{\mathrm{ref}}, \gamma_2 \delta_{\mathrm{ref}}] & \text{if} \quad \hat{\rho}_k \geq \eta_2; \end{cases}$$

sonst setze $\delta_{k+1} = \delta_k$. Erhöhe k um eins und gehe zu Schritt 1.

Grundlegende Ideen

- allgemeine nichtlineare Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme
  $\Rightarrow$ Filter-Trust-Region Algorithmus FILTRANE von Gould, Toint (2007) als grundlegendes Lösungsverfahren
- Teure Funktionen
  $\Rightarrow$ Λ-balanciertes Interpolationsmodell von Conn, Scheinberg, Vicente (2008) bzw. Thekale (2010?)
- allgemeines nichtlineares Trust-Region Subproblems
  $\Rightarrow$ Lösungsmethode des Subproblems muss eine Bedingung zur hinreichenden Modellverbesserung erfüllen.

Konvergenz

Annahme 1
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varepsilon_{\mathrm{mdc}} > 0$, so dass, wenn $\|g_k\|_2 > \varepsilon$ und $\delta_k \leq \varepsilon_{\mathrm{mdc}}$ gilt, x_k^+ die hinreichende Modellverbesserung

$$f(x_k, m_k^u(x_k)) - f(x_k^+, m_k^u(x_k^+)) \geq \kappa_{\mathrm{mdc}\delta} \|g_k\|_2 \min\left(\frac{\|g_k\|_2}{\beta_k}, \delta_k\right)$$

für ein $\kappa_{\mathrm{mdc}\delta} \in (0, 1)$ erfüllt.

Konvergenz

Annahme 1
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varepsilon_{\mathrm{mdc}} > 0$, so dass, wenn $\|g_k\|_2 > \varepsilon$ und $\delta_k \leq \varepsilon_{\mathrm{mdc}}$ gilt, x_k^+ die hinreichende Modellverbesserung

$$f(x_k, m_k^u(x_k)) - f(x_k^+, m_k^u(x_k^+)) \geq \kappa_{\mathrm{mdc}\delta} \|g_k\|_2 \min\left(\frac{\|g_k\|_2}{\beta_k}, \delta_k\right)$$

für ein $\kappa_{\mathrm{mdc}\delta} \in (0,1)$ erfüllt.

Garantie durch Filter-Trust-Region Algorithmus für nichtlineare Optimierungsprobleme mit Box Nebenbedingungen.

Konvergenz

Satz (Kaiser, Thekale, 2010?)
Unter Standardannahmen und Annahme 1 gilt entweder

$$\|\nabla f(x_k, u(x_k))\|_2 = 0$$

für ein endliches k oder

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k, u(x_k))\|_2 = 0.$$

Falls unendlich viele Punkte in $\mathcal{F}$ hinzugefügt werden, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|c(x_k, u(x_k))\|_2 = 0.$$

Testbedingungen

EFNES: Implementation des vorgestellten Algorithmus in Matlab.

Testbeispiele:

- 54 Testbeispiele aus der CUTEr Bibliothek
- bis zu 100 (Un-)Gleichungen und Variablen
- Teure Funktionen mussten künstlich eingefügt werden.
- Spezialfälle wie z.B. komplett teure Zeilen / Systeme wurden betrachtet.

Verwendung der verfügbaren Information

Beispiel:

$$c_i := x_1 e^{\frac{x_2}{2}(\alpha_i - x_3)^2} - \beta_i = 0$$

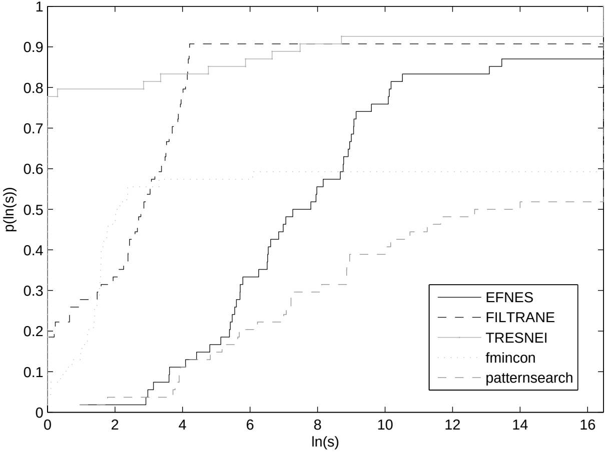
für $i = 1, \ldots, 15$, mit $\alpha_i = 4 - \frac{i}{2}$ und $\beta_i \in \mathbb{R}$ kleinen positiven Konstanten.
Laufzeit und Anzahl der Funktionsauswertungen bei verschiedenen teuren Funktionen:

	$e_i = (\alpha - x_3)^2$	$e_i = \frac{x_2}{2}(\alpha_i - x_3)^2$	$e_i = e^{\frac{x_2}{2}(\alpha_i - x_3)^2}$	$e_i = x_1 e^{\frac{x_2}{2}(\alpha_i - x_3)^2} - \beta_i$
CPU time	0.6362	1.7265	2.1693	3.3095
evaluations	8	17	19	24

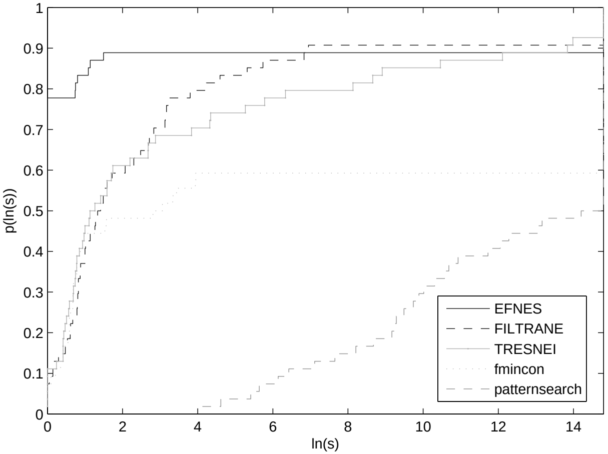
Vergleich mit anderen Verfahren

- Matlabfunktionen *fmincon* und *patternsearch* (aus der Optimierungs- bzw. Directsearchtoolbox)
- TRESNEI (Filter-Trust-Region basierter Löser für nichtlineare (Un-)Gleichungssysteme von B.Morini und M.Porcelli)
- FILTRANE (Teil der Galahad Toolbox entwickelt von N.I.M. Gould, D. Orban und Ph. Toint)

Performance Profile bzgl. der Rechenzeit



Performance Profile bzgl. der Anzahl der Funktionsauswertungen



Vielen Dank für Ihre / Eure Aufmerksamkeit!