Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
25. Juni 2019

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 9

Abgabe: 2. Juli 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Auf dem $\mathbb{R}^3$ haben wir die euklidischen Koordinaten x, y, z und die Kugelkoordinaten r, ϕ, θ, die durch die Transformationsformeln $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ und $z = r\cos\theta$ verbunden sind. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ haben wir entsprechend zwei Erzeuger $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ und $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta$ für den 1-dimensionalen Vektorraum $\bigwedge^3(\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3)^\vee$. Berechnen Sie den skalaren Faktor λ, so dass $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \lambda\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\theta$. *4 Punkte*

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von p. Für eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(U)$ existiert eine Differentialform $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ und eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p, so dass $\omega|_V = \tilde{\omega}|_V$ gilt. *4 Punkte*

3. (a) Wir bezeichnen mit $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1\colon x \mapsto (\cos x, \sin x)$. Zeigen Sie, dass der Pullback $\pi^*\colon \Omega^i(\mathrm{S}^1) \to \Omega^i(\mathbb{R})$ für $i = 0, 1$ eine Identifikation zwischen glatten i-Formen auf S^1 und glatten 2π-periodischen i-Formen auf $\mathbb{R}$ induziert. (Dabei sind 2π-periodische 1-Formen durch $f\mathrm{d}r^1$ mit 2π-periodischem $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben.)

   (b) Sei $g \in C^\infty(\mathrm{S}^1)$, und sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ so dass $\pi^*\mathrm{d}g = f\mathrm{d}r^1$. Zeigen Sie, dass dann gilt $\int_0^{2\pi} f\mathrm{d}r^1 = 0$.

   (c) Geben Sie eine 1-Form auf S^1 an, die nicht Differential einer Funktion ist.

   4+4+2 Punkte