Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
18. Juni 2019

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 8

Abgabe: 25. Juni 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ haben wir euklidische Koordinaten x, y und Polarkoordinaten r, θ. Entsprechend haben wir für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zwei Basen für den Kotangentialraum $(\mathrm{T}_p\mathbb{R}^2)^\vee$: $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta$. Die Koordinatentransformation von Polar- zu euklidischen Koordinaten ist durch $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ gegeben. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix für den Übergang von Polar- zu euklidischen Koordinaten. *4 Punkte*

2. Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$. Zeigen Sie, dass $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ eine Basis von $\bigwedge^k V$ ist. Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$ und $\sum_{k=0}^n \dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^k V = 2^n$. *4 Punkte*

3. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Eine k-Multilinearform $\phi\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ heißt *alternierend*, wenn für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_k$ gilt $\phi(v_1, \ldots, v_k) = \operatorname{sgn}(\sigma)\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$ gilt. Wir bezeichnen der Raum der k-Multilinearformen auf V mit $\operatorname{Alt}^k(V)$. Für zwei Multilinearformen $\phi\colon V^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon V^{\otimes l} \to \mathbb{R}$ definieren wir das Dachprodukt

$$(\phi \wedge \psi)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\psi(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

   Zeigen Sie:

   - Das Dachprodukt ist assoziativ, d.h. $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$.
   - Das Dachprodukt ist graduiert-kommutativ, d.h. $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$ für $f \in \operatorname{Alt}^k(V)$ und $g \in \operatorname{Alt}^l(V)$.

   8 Punkte