**Bergische Universität Wuppertal**
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
21. Mai 2019

# Analysis auf Mannigfaltigkeiten
# Übungsblatt 6

*Am 28. Mai findet zum üblichen Übungstermin eine Vorlesung statt, um die Ausfälle am 30. und 31. Mai zu kompensieren. Die Lösungen zum 6. Übungsblatt werden zum nächsten Übungstermin am 4. Juni abgegeben.*

Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Die Übungsaufgabe vervollständigt den auf Übungsblatt 5 begonnenen Beweis, dass $\mathrm{Gr}(k,n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Für $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ definieren wir eine Menge

$$V_I = \{A \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid \det A_I \neq 0\}$$

wobei für eine Matrix $A \in F(k,n)$ die $(k \times k)$-Matrix $A_I$ ist, die aus den $i_1, \ldots, i_k$-ten Zeilen von $A$ besteht. Wir definieren

$$\phi_I \colon V_I \to \mathbb{R}^{(n-k)k} \mapsto A \mapsto (A \cdot A_I^{-1})_{I'}$$

wobei $B_{I'}$ die $(n-k) \times k$-Matrix ist, die aus den durch das Komplement $I' = \{1, \ldots, n\} \setminus I$ spezifizierten Zeilen von $B$ besteht. Zeigen Sie, dass $(V_I, \phi_I)$ ein $C^\infty$-Atlas für $\mathrm{Gr}(k,n)$ ist. *6 Punkte*

2. Das Differential der Abbildung $\mu\colon\ \mathrm{GL}_n \times \mathrm{Gr}(k,n) \to \mathrm{Gr}(k,n)$, die durch Linksmultiplikation mit einer Matrix $M \in \mathrm{GL}_n$ gegeben ist, induziert am Punkt $(\mathrm{I}_n, W)$ eine natürliche Abbildung $\mathrm{d}\mu\colon\ \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{T}_W \mathrm{Gr}(k,n)$.

   Es gibt eine natürliche Abbildung

$$\pi\colon\ \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{Hom}(W, V/W)\colon (\alpha\colon V \to V) \mapsto (W \hookrightarrow V \xrightarrow{\alpha} V \twoheadrightarrow V/W),$$

wobei $W \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung als Unterraum und $V \twoheadrightarrow V/W$ die natürliche Projektion ist. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung

$$\nu\colon\ \mathrm{Hom}(W, V/W) \to \mathrm{T}_W \mathrm{Gr}(k,V)$$

gibt, für die $\mathrm{d}\mu = \nu \circ \pi$ gilt. Zeigen Sie, dass $\nu$ ein Isomorphismus ist. *6 Punkte*

Bitte wenden.

3. Wir bezeichnen mit $x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n$ die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^{2n}$. Zeigen Sie, dass durch

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left( -y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

ein nirgends verschwindendes glattes Vektorfeld auf der Einheitssphäre

$$\mathrm{S}^{2n-1} = \left\{ (x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n) \mid \sum_{i=1}^{n} \big( (x^i)^2 + (y^i)^2 \big) = 1 \right\}$$

induziert wird. *4 Punkte*

4. Bestimmen Sie die maximale Integralkurve $\gamma(t)$ mit Anfangspunkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ des folgenden Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^2$:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

*4 Punkte*