

Analysis auf Mannigfaltigkeiten Übungsblatt 5

Abgabe: 21. Mai 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Standard-Einheitssphäre. Für einen Punkt $x \in S^n$ identifizieren wir den Tangentialraum $T_x S^n$ mit Hilfe des Differentials $T_x S^n \xrightarrow{d\iota} T_x \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ als Unterraum in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir betrachten die Teilmenge

$$N = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S^n, v \in \mathbb{R}^{n+1}, v \perp T_x S^n\}.$$

Zeigen Sie, dass N eine Mannigfaltigkeit von Dimension $n + 1$ ist. 6 Punkte

2. Bezeichne $\mu: GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n$ die Matrizenmultiplikation von invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen. Wir identifizieren den Tangentialraum $T_{I_n} GL_n$ an der Einheitsmatrix mit $T_{I_n} \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation das Differential der Multiplikation genau der Addition auf $\mathbb{R}^{n^2}$ entspricht. 6 Punkte

3. Seien $1 \leq k < n$ natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit $\text{Gr}(k, n)$ die Menge der k -dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$. Ein Untervektorraum kann durch eine reelle $(n \times k)$ -Matrix mit Rang k dargestellt werden (die Spalten sind gewählte Basisvektoren). Für eine invertierbare $(k \times k)$ -Matrix M liefert Rechtsmultiplikation mit M eine andere Basis desselben Vektorraums. Insbesondere können wir $\text{Gr}(k, n)$ als Quotient der Menge $F(k, n) \subset \mathbb{R}^{nk}$ der $(n \times k)$ -Matrizen von Rang k bezüglich der Äquivalenzrelation

$$A \sim B \iff \exists M \in GL_k : A = BM$$

identifizieren.

- (a) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzrelation offen ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\text{Gr}(k, n)$ ein Hausdorff-Raum ist.

6 Punkte