Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
30. April 2019

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 4

Abgabe: 7. Mai 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Sei A eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra, M ein A-Modul und D eine Derivation mit Werten in M. Zeigen Sie:

   (a) Für alle $r \in \mathbb{R}$ und $a \in A$ gilt $D(ra) = rD(a)$.

   (b) Für alle Elemente $a \in A$ gilt $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$.

   4 Punkte

2. Sei A eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra. Für zwei Derivationen $D_1, D_2 \colon A \to A$ definieren wir den Kommutator $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

   (a) Zeigen Sie, dass $[D_1, D_2]$ wieder eine Derivation ist.

   (b) Zeigen Sie, dass für den Kommutator die Jacobi-Identität erfüllt ist:

   $$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_3, [D_1, D_2]] + [D_2, [D_3, D_1]] = 0.$$

   6 Punkte

3. Gegeben seien das Vektorfeld $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ und die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Xf (die Funktion, die sich durch Anwendung der zu X gehörenden Derivation auf f ergibt). *4 Punkte*

4. Sei $f \colon M \to N$ eine C^∞-Abbildung und $p \in M$ ein Punkt. Beweisen Sie, dass das Differential $\mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$ eine lineare Abbildung ist. *6 Punkte*