Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
23. April 2019

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 3

Abgabe: 30. April 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Bezeichne $\mathbb{R}$ die reelle Gerade mit der glatten Struktur, die durch den Atlas $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ gegeben ist, und bezeichne $\mathbb{R}'$ die reelle Gerade mit der glatten Struktur, die durch den Atlas $(\mathbb{R}, \phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{3}})$ gegeben ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Die beiden Atlanten (bzw. glatten Strukturen) sind nicht äquivalent.

   (b) Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist kein Diffeomorphismus.

   (c) Es gibt einen Diffeomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}'$.

   6 Punkte

2. Seien N, M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon N \to M_1 \times M_2$ genau dann glatt ist, wenn die beiden Kompositionen $\mathrm{pr}_i \circ f\colon N \to M_i$, $i = 1, 2$ glatt sind. *4 Punkte*

3. Bestimmen Sie durch Berechnung der Jacobi-Matrix, für welche Punkte in $\mathbb{R}^3$ die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x, y, z) \mapsto (x, x^2 + y^2 + z^2 - 1, z)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. *4 Punkte*

4. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ definieren wir auf der Menge

   $$\{(U, f) \mid p \in U, U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen }, f \in C^\infty(U)\}$$

   von in einer Umgebung von p definierten C^∞-Funktionen die folgende Äquivalenzrelation:

   $$(U, f) \sim (V, g) \quad \Longleftrightarrow \exists W \subset U \cap V \text{ offen, und } f|_W = g|_W.$$

   Die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation heißt die *Menge der Funktionenkeime am Punkt p* und wird mit C_p^∞ bezeichnet. Zeigen Sie, dass C_p^∞ mit Addition und Multiplikation von Keimen eine $\mathbb{R}$-Algebra ist. *6 Punkte*