Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
16. April 2019

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 2

Abgabe: 23. April 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine offene Äquivalenzrelation. Zeigen Sie, dass für eine Basis $\{U_i\}_{i\in I}$ von X die Menge der Bilder $\{\pi(U_i)\}_{i\in I}$ unter der Projektion $\pi\colon X \to X/_\sim$ auch eine Basis von $X/_\sim$ ist.

   Zusatz: Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$, für die $x \sim y$ genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{Z}$ oder $x = y$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}/_\sim$ nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. *3+3 Punkte*

2. Sei $f\colon X \to Y$ eine eigentliche stetige Abbildung in einen lokal kompakten Hausdorff-Raum Y. Zeigen Sie, dass f abgeschlossen ist.

   Terminologie: Ein Raum Y heißt *lokal kompakt*, wenn es für jeden Punkt $y \in Y$ eine offene Menge $U \subseteq Y$ und eine kompakte Menge $K \subseteq Y$ gibt mit $y \in U \subseteq K$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Menge $C \subseteq X$ auch das Bild $f(C) \subseteq Y$ wieder abgeschlossen ist. *4 Punkte*

3. In der Vorlesung haben wir zwei Strukturen von T^n als topologische Mannigfaltigkeit gesehen: die Produktstruktur auf $(\mathrm{S}^1)^{\times n}$ und die Quotientenstruktur auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie, dass diese Strukturen homöomorph sind.

   Zusatz: Begründen Sie informell (anhand eines Bildes), dass der 2-Torus T^2 einen Atlas hat, der aus nur drei Karten besteht für die die Kartenbereiche homöomorph zum $\mathbb{R}^2$ sind. *4+2 Punkte*

4. Wir bezeichnen mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. *4 Punkte*