Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt, Dr. Thomas Hudson

Sommersemester 2019
9. April 2019

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 1

Abgabe: 16. April 2019 in der Übungsgruppe
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. (a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \mathrm{d}s$ für $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 3x$.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \mathrm{d}s$ für $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t,t)$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy$.

   4 Punkte

2. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung zwischen Hausdorffräumen.

   (a) Zeigen Sie: wenn X kompakt ist, dann ist auch Y kompakt.

   (b) Geben Sie ein Beispiel, in dem Y kompakt, aber X nicht kompakt ist.

   4 Punkte

3. Welche der folgenden Räume sind hausdorffsch/lokal euklidisch?

   (a) offene Unterräume $U \subset \mathbb{R}^n$

   (b) $X = \mathbb{R}^n \sqcup \{*\}$. Die Topologie ist dadurch gegeben, dass eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist, wenn i) $* \notin U$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, oder ii) $* \in U$ und $U \setminus \{*\} \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

   (c) die Teilmenge $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

   6 Punkte

4. Zeigen Sie, dass das Produkt $X \times Y$ von topologischen Mannigfaltigkeiten X und Y wieder eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dabei trägt $X \times Y$ die Produkttopologie, für die eine Basis durch die Menge

$$\{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

   der "offenen Rechtecken" gegeben ist.

   6 Punkte

Präsenzaufgaben für die Übung am 9. April 2019

1. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

   (a) Berechnen Sie den Gradienten von F und zeichnen Sie das zugehörige Gradientenvektorfeld $\operatorname{grad} F$. (Zeichnung für $U = (-2,2) \times (-2,2)$, mit geeigneter Skalierung, Vergleich mit Niveaulinien für Funktion)

   (b) Wählen Sie einen Weg γ von $a = (0,0)$ nach $b = (1,1)$ und berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \operatorname{grad} F$. (geometrische Interpretation)

   Für kompliziertere Funktionen, wie z.B. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2-3xy+4$ kann man auch gut GeoGebra (z.B. `geogebra.org/m/nuR3n88b`) zur Veranschaulichung von Niveaulinien und Gradientenfeldern benutzen.

2. Sei X ein topologischer Raum, $M \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt von M, falls jede Umgebung von x_0 einen Punkt $x \in M$ mit $x \neq x_0$ enthält. Zeigen Sie:

   (a) Es existiert eine kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält. Diese ist gleich dem Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen in X, die M enthalten. Sie wird mit $\overline{M}$ bezeichnet und heißt *Abschluss von M in X*. M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{M} = M$ ist. Es gilt $\overline{M} = M \cup \{\text{Häufungspunkte von } M\}$.

   (b) Es existiert eine größte offene Menge, die in M enthalten ist. Diese ist gleich der Vereinigung aller offener Mengen in X, die in M enthalten sind. Sie wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet und heißt *Inneres von M*. M ist genau dann offen, wenn $\mathring{M} = M$ ist.

3. Sei X ein Hausdorffraum. Zeigen Sie:

   (a) Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A auch kompakt.

   (b) Ist $K \subset X$ kompakt, dann ist K abgeschlossen in X.

   (c) Ist $K \subset X$ kompakt und $M \subset K$, dann ist $\overline{M}$ kompakt und in K enthalten.